



# Взаимодействие колеса с рельсом при качении



Вадим ПИСАРЕНКО

Vadim V. PISARENKO

## Interaction of a Wheel with a Rail during Rolling

(текст статьи на англ. яз. – English text of the article – p. 30)

**Проблемой неравномерного износа колёсных пар занимаются многие учёные мира, имеющие отношение к вагоностроению. Создаются всё новые программные комплексы для математического моделирования, и в каждом заложена своя теория динамики подвижного состава. В данном случае рассмотрены основные положения деформации и износа колеса по кругу катания при движении вагона. При этом более подробно расписана модель упругого скольжения. При качении колеса и наличии крутящего момента в области контакта всегда существует область схватывания, которая находится на входе. И область проскальзывания на выходе. Доказано, что коэффициент проскальзывания равен деформации в области схватывания.**

**При соблюдении определённых кинематических и динамических условий построен график распределения напряжения в зоне контакта. На основе теории касательных напряжений получена формула смещения, которая трансформирована в новую формулу коэффициента крипа, сохранившую физический смысл найденной величины.**

*Ключевые слова:* теория динамики подвижного состава, колёсная пара, рельс, коэффициент крипа, скольжение, схватывание, пятно контакта, качение колеса, распределение напряжений.

*Писаренко Вадим Валерьевич – мастер производственного участка «Контрольный пункт автотормозов» пассажирского вагонного депо Москва Московского филиала АО «Федеральная пассажирская компания», аспирант кафедры вагонов и вагонного хозяйства Российского университета транспорта (МИИТ), Москва, Россия.*

**К**олёсная пара является наиболее нагруженным в эксплуатации элементом ходовых частей подвижного состава железных дорог, непосредственно взаимодействуя с рельсом. Вследствие извилистого движения колёсных пар в колее их взаимодействие сопровождается возникновением сил и моментов в горизонтальном направлении. Горизонтальные силы усиливаются с участием рамы. Между колесом и рельсом возникает трение качения. Касательные силы, которые обнаруживаются в точке контакта, вызывают проскальзывания колес по головке рельса.

Когда касательные силы меньше силы сухого трения, относительное скольжение колеса по рельсу в процессе качения считают происходящим за счёт упругих деформаций материалов колеса и рельса и называют упругим скольжением, или крипом:  $F = ku/v$ , где  $k$  – коэффициент крипа,  $v$  – скорость поезда,  $u$  – скорость проскальзывания [2].

Рассмотрим более подробно модель упругого скольжения. В контакте качения при незначительных крутящих моментах, как установлено, первоначально возникает малая область проскальзывания, которая затем возрастает с увеличением положи-

тельного момента, пока не наступит полное скольжение [11]. Для понимания процессов, протекающих в контакте (колесо–рельс), возьмем упрощённую модель упругого колеса (рис. 1).

При осуществлении полного поворота колеса можно заметить, что упругие элементы, которые входят в контакт с поверхностью, находятся в сжатом состоянии. При выходе из области контакта, где элементы нагружены на растяжение, а действие нормальной силы ослабевает, равновесие нарушается и элементы релаксируют. Вследствие этого колесо ещё немного проворачивается. При качении колеса и наличии крутящего момента в области контакта всегда существует область схватывания, которая находится на входе. И область проскальзывания – на выходе. Нетрудно определить, что коэффициент проскальзывания равен деформации в области схватывания в пятне контакта:

$$k = \frac{\varepsilon_{xx}}{1 + \varepsilon_{xx}} \approx \varepsilon_{xx}.$$

Теперь время использовать известные формулы из теории упругости. Предположим, что пятно контакта представляет собой круг с радиусом  $a$ , как показано на рис. 2а. В этой зоне действуют касательные напряжения:

$$\tau(r) = \sigma_{xx}(r) = \tau_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}.$$

Данные силы приводят к смещению в касательном направлении:

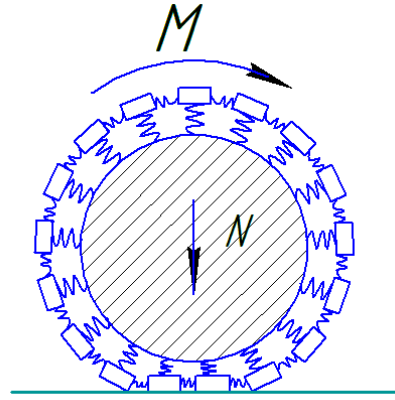


Рис. 1. Простейшая модель катящегося колеса.

$$u_x = \frac{\pi \tau_0}{32 G a} [4(2-v)a^2 - (4-3v)x^2 - (4-v)y^2],$$

где  $G$  – модуль сдвига,  $v$  – окружная скорость.

Распределение вида

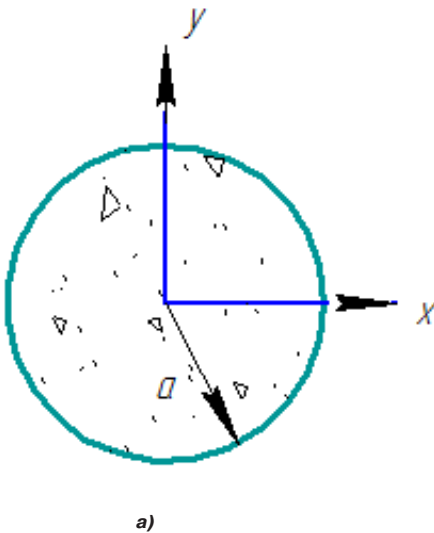
$$\tau(x) = \sigma_{xx}(x) = \tau_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

в полосе шириной  $2a$  (рис. 2б) приводит к смещению поверхности

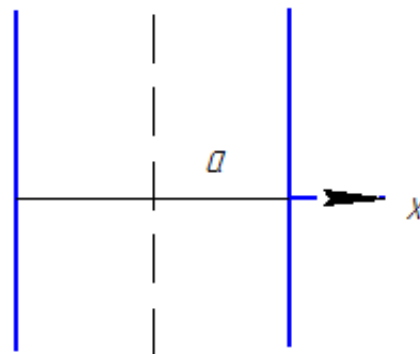
$$u_x = \text{Const} - \tau_0 \frac{x^2}{aE},$$

где  $E$  – модуль упругости материала колеса. С помощью этих зависимостей можно построить график распределения напряжения в контакте.

Распределение нормального давления по всей области контакта дается формулой Герца:



а)



б)

Рис. 2. Касательно нагруженный контакт.



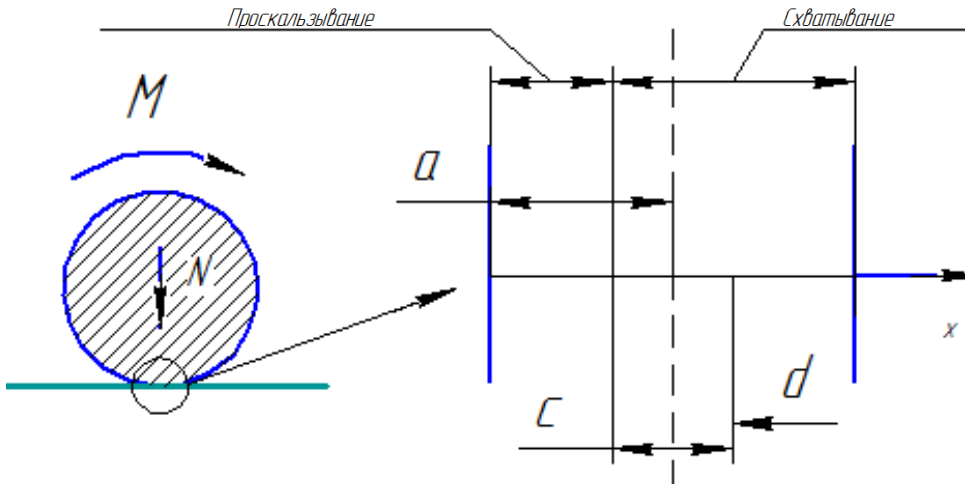


Рис. 3. Распределение касательных напряжений в зоне контакта. а – половина ширины зоны контакта; с – области схватывания.

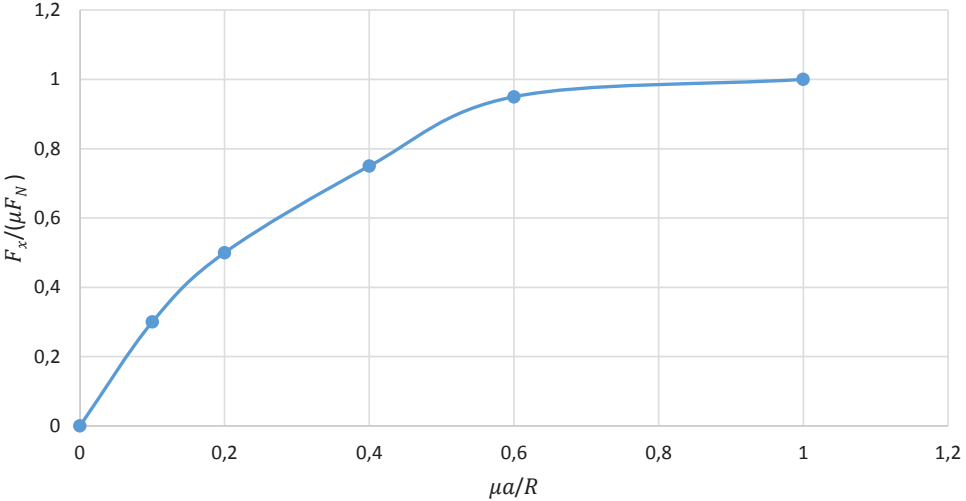


Рис. 4. Кривая проскальзывания при наличии тангенсальной силы.

$$p(x) = p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Чтобы построить распределение напряжения для контакта качения, необходимо выполнить определённые кинематические и динамические условия. Согласно рис. 1 материал, входящий в область контакта, находится в деформации. Допустим, что деформация в зоне контакта постоянна. И предположим, что в зоне проскальзывания должно выполняться условие (закон трения Кулона)  $F_{тр} = \mu N$ :  $\tau(x) = \mu p(x)$ .

Тогда формула расчёта касательных напряжений в зоне контакта:

$\tau(x) = \tau_1(x) + \tau_2(x)$ ,  
 где  $\tau_1(x)$  – касательное напряжение в зоне схватывания,  $\tau_2(x)$  – касательное напряжение в зоне проскальзывания.

Как следует из рис. 3,  $d = a - c$ .

Формула расчёта касательных напряжений позволяет вывести формулы смещения:

$$u_{x1} = Const - \tau_1 \frac{x^2}{aE}; \quad u_{x2} = Const + \tau_2 \frac{(x-d)^2}{cE}$$

Для полного смещения получаем:

$$u_x = Const - \tau_1 \frac{x^2}{aE} + \tau_2 \frac{(x-d)^2}{cE}.$$

А формула для деформации принимает вид:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\tau_1 \frac{2x}{aE} + \tau_2 \frac{2(x-d)}{cE}.$$

Подставляем вместо  $\tau_1$  выражение закона Кулона, получаем  $\tau_1 = \mu p_0$ .

Принимая во внимание то, что деформация в зоне схватывания постоянна, имеем формулу:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{2\mu p_0 d}{aE}.$$

Полная поперечная сила в области контакта рассчитывается уравнением

$$F_x = \int_{-a}^a L \cdot \tau(x) dx \approx L \cdot \left( \frac{\pi}{2} a \mu p_0 - \frac{c}{a} \frac{\pi}{2} c \mu p_0 \right) = \mu F_N \left( 1 - \frac{c^2}{a^2} \right).$$

Выражение  $d = a - c$  преобразуем, получаем  $d/a = 1 - c/a$  и, подставив его в выражение для полной поперечной силы, находим неизвестное расстояние  $d$ :

$$d = a \sqrt{\frac{F_x}{\mu F_N}}.$$

Используя формулу для деформации в зоне схватывания, выводим коэффициент кривизны:

$$k = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{2\mu p_0}{E} \sqrt{\frac{F_x}{\mu F_N}}.$$

Принимаем

$$p_0 = E \cdot \frac{a}{2R},$$

где  $R$  – радиус колеса.

Получаем окончательную формулу кривизны для железнодорожного колеса:

$$k = -\frac{\mu a}{R} \sqrt{\frac{F_x}{\mu F_N}}.$$

Эта зависимость, как показано на графике рис. 4, соответствует кривой проскальзывания.

Из графика видно, что полное скольжение во всей области контакта наступает,

когда  $F_x = \mu F_N$ . В этом случае коэффициент кривизны (псевдопроскальзывания):  $k = -\mu a/R$ .

Таким образом, мы получили новую формулу коэффициента кривизны, которая сохраняет физический смысл самой величины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Буйносов А. П. Теория наземных транспортно-технических машин: Учеб.-метод. пособие. – Екатеринбург: УрГУПС, 2016. – 92 с.

2. Вершинский С. В., Хусидов В. Д. Динамика вагона: Учебник. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Транспорт, 1991. – 860 с.

3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. – Т. VII: Теория упругости. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1987. – 248 с.

4. Sakalo V., Sakalo A., Tomashevskiy S., Kerentcev D. Computer modelling of process of accumulation of rolling contact fatigue damage in railway wheels. International Journal of Fatigue, Volume 111, June 2018, pp. 7–15.

5. Лысиков Н. Н., Ковалев Р. В. Комплексные исследования механических характеристик элементов конструкций методом компьютерного моделирования // Тяжёлое машиностроение. – 2009. – № 1. – С. 14–17.

6. Сладковский А. В., Погорелов Д. Ю. Исследование динамического взаимодействия в контакте колесо–рельс при наличии ползунов на колёсной паре // Вісник. – 2008. – № 5/1. – С. 11.

7. Ковалев Р. В., Даниленко Д. В. Введение в моделирование динамики механических систем // САПР и графика. – 2008. – № 4. – С. 26–31.

8. Погорелов Д. Ю. О численных методах моделирования движения систем твёрдых тел. – Брянск: БГТУ, 1997. – 153 с.

9. Михеев Г. В., Круговова Е. А. Взаимодействие железнодорожных экипажей и мостов: некоторые подходы и приложения // Наука и прогресс транспорта. Вестник ДНУЖТ. – 2010. – Вып. 33. – С. 178–179.

10. Кобищанов В. В., Азарченков А. А. Прогнозирование динамической нагруженности пассажирских вагонов при продольных соударениях // Тяжёлое машиностроение. – 2005. – № 12. – С. 31–48.

11. Захаров С. М., Горячева И. Г., Погорелов Д. Ю. Оценка эволюции профилей колес железнодорожного экипажа на основе применения трибодинамической модели // Тяжёлое машиностроение. – 2007. – № 3. – С. 19–24.

12. Михальченко Г. С., Погорелов Д. Ю. Совершенствование динамических качеств подвижного состава железных дорог средствами компьютерного моделирования // Тяжёлое машиностроение. – 2003. – № 12. – С. 2–6.

13. Ковалев Р. В., Котов С. В. Влияние параметров буксового адаптера для тележки типа 18–100 на показатели износа бандажей колёсных пар и устойчивость движения грузовых вагонов // Вестник БГТУ. – 2004. – № 1. – С. 147–155.

14. Сакало А. В. Метод моделирования контактных напряжений с использованием конечно-элементных фрагментов на упругом основании // Вестник ВГТУ. – 2009. – № 9. – С. 71–76.

15. Раус Э. Дж. Динамика системы твёрдых тел. – Том II: Пер. с англ. – М.: Наука, 1983. – 544 с.

Координаты автора: **Писаренко В. В.** – vadimbasket@mail.ru.

Статья поступила в редакцию 25.10.2017, актуализирована 14.02.2018, принята к публикации 15.02.2018.



## INTERACTION OF A WHEEL WITH A RAIL DURING ROLLING

Pisarenko, Vadim V., JSC Federal Passenger Company, Russian University of Transport, Moscow, Russia.

### ABSTRACT

The problem of uneven wear of a wheel set is considered by many scientists of the world, in the works related to car building. New software complexes for mathematical modeling are being created, and each follows its own theory of rolling stock dynamics. In this article the main provisions for deformation and wear of a wheel along the circle of rolling during car movement are considered. In this case, the elastic sliding model is described in more detail. During wheel rolling and in the presence of

torque in the contact area, there is always a gripping area that is located at the entrance, and an area of slippage at the exit. It is proved that the coefficient of slippage is equal to deformation in the gripping area. Under certain kinematic and dynamic conditions, a stress distribution graph is plotted in the contact zone. On the basis of the theory of tangential stresses, a displacement formula for the creep coefficient, which retains the physical meaning of the value found.

**Keywords:** theory of rolling stock dynamics, wheel set, rail, creep coefficient, sliding, gripping, contact spot, wheel rolling, stress distribution.

**Background.** The wheel set is the most loaded element in operation of running parts of rolling stock of railways, directly interacting with the rail. Due to the twisting motion of wheel sets in the track, their interaction is accompanied by appearance of forces and moments in the horizontal direction. The horizontal forces are strengthened with participation of the frame. Rolling friction occurs between the wheel and the rail. The tangential forces that are detected at the point of contact cause slippage of the wheels along the rail head.

When the tangential forces are less than the dry friction force, the relative sliding of the wheel along the rail during rolling is considered to be due to the elastic deformations of the wheel and rail materials and is called elastic sliding, or creep:  $F = ku/v$ , where  $k$  is the creep coefficient,  $v$  is the train speed,  $u$  is the slippage velocity [2].

**Objective.** The objective of the author is to consider interaction of a wheel with a rail during rolling and to suggest a formula of creep coefficient.

**Methods.** The author uses general scientific and engineering methods, comparative analysis, mathematical apparatus, theory of elasticity, tangential stresses, elastic sliding model.

**Results.** Let us consider in more detail the elastic sliding model. In the rolling contact, with minor torques, it is established that a small slippage region initially appears, which then increases with an increase in the positive moment until full sliding occurs

[11]. To understand the processes taking place in the contact (wheel-rail), let's take a simplified model of an elastic wheel (Pic. 1).

When the wheel is fully rotated, it can be seen that the elastic elements that come into contact with the surface are in a compressed state. When leaving the contact area, where the elements are stressed, and the action of normal force weakens, the balance is broken and the elements relax. As a consequence, the wheel rotates a little more. During wheel rolling and in the presence of torque in the contact area, there is always a gripping area that is located at the entrance. And the slippage area is at the exit. It is easy to determine that the slippage coefficient is equal to deformation in the gripping area in the contact spot:

$$k = \frac{\epsilon_{xx}}{1 + \epsilon_{xx}} \approx \epsilon_{xx}.$$

Now it's time to use the known formulas from the theory of elasticity. Let's suppose that the contact spot is a circle with radius  $a$ , as shown in Pic. 2a. In this zone tangential stresses act as:

$$\tau(r) = \sigma_{xx}(r) = \tau_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}.$$

These forces lead to a displacement in the tangential direction:

$$u_x = \frac{\pi \tau_0}{32Ga} [4(2-v)a^2 - (4-3v)x^2 - (4-v)y^2],$$

where  $G$  is shear modulus,  $v$  – circumferential velocity.

Distribution is of a kind

$$\tau(x) = \sigma_{xx}(x) = \tau_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

in a strip of width  $2a$  (Pic. 2b), leads to displacement of the surface

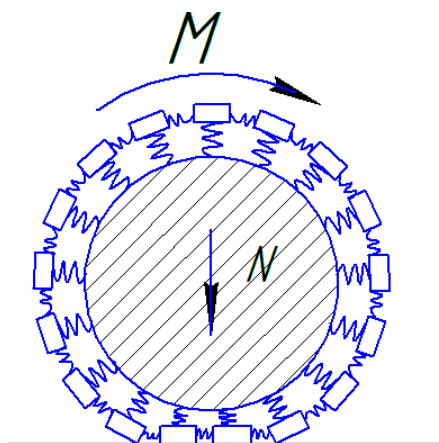
$$u_x = Const - \tau_0 \frac{x^2}{aE},$$

where  $E$  is modulus of elasticity of the wheel material. With the help of these dependencies, it is possible to plot the distribution of stresses in the contact.

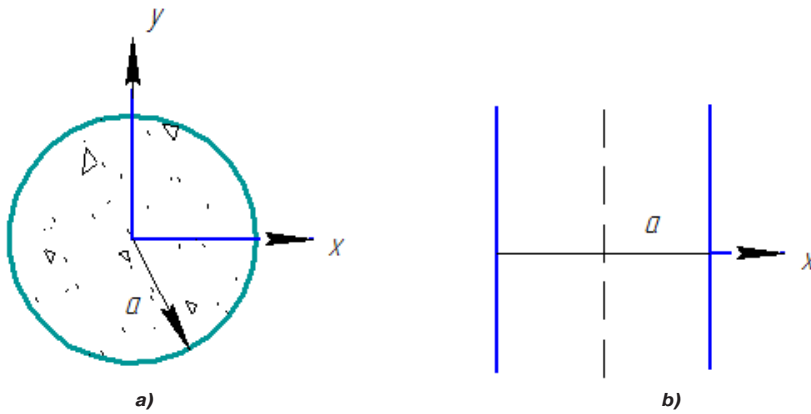
The distribution of normal pressure over the entire contact region is given by Hertz's formula:

$$p(x) = p \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

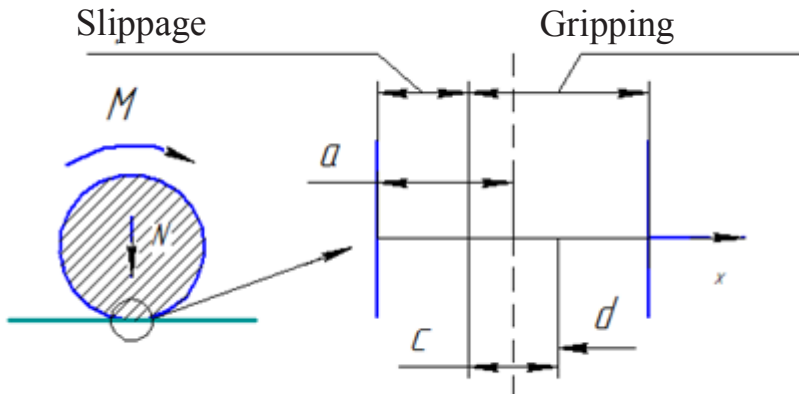
In order to construct a stress distribution for a rolling contact, it is necessary to fulfill certain kinematic and dynamic conditions. According to Pic. 1, the material entering the contact region is deformed. Let us assume that the deformation in the



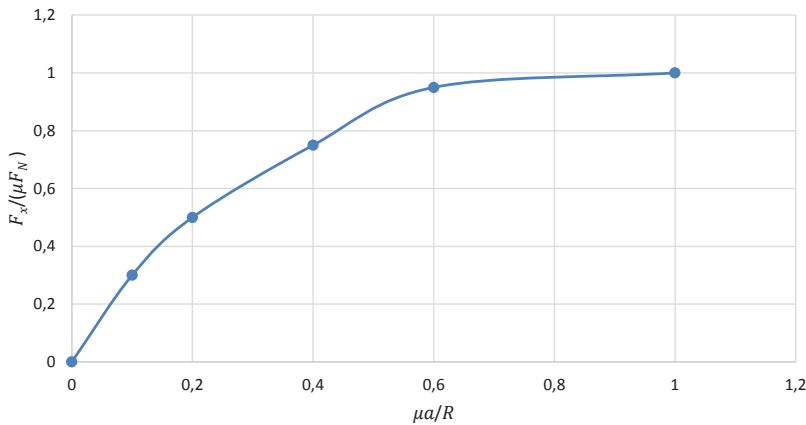
Pic. 1. The simplest model of a rolling wheel.



Pic. 2. Tangentially loaded contact.



Pic. 3. Distribution of tangential stresses in the contact zone.  
*a* – half the width of the contact zone; *c* – gripping areas.



Pic. 4. Slippage curve in the presence of tangential force.

contact zone is constant. And let us also suppose that the condition (Coulomb's law of friction) must be satisfied in the slippage zone  $F_{tp} = \mu N$ :  $\tau(x) = \mu p(x)$ .

Then the formula for calculating tangential stresses in the contact zone is:

$$\tau(x) = \tau_1(x) + \tau_2(x),$$

where  $\tau_1(x)$  – tangential stress in the gripping area,  $\tau_2(x)$  – tangential stress in the slippage area.

As follows from Pic. 3,  $d = a - c$ .

The formula for calculating tangential stresses allows us to derive the displacement formulas:

$$u_{x1} = \text{Const} - \tau_1 \frac{x^2}{aE};$$

$$u_{x2} = \text{Const} + \tau_2 \frac{(x-d)^2}{cE}.$$

For a complete displacement, we get:

$$u_x = \text{Const} - \tau_1 \frac{x^2}{aE} + \tau_2 \frac{(x-d)^2}{cE}.$$





And the formula for deformation transforms into:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\tau_1 \frac{2x}{aE} + \tau_2 \frac{2(x-d)}{cE}.$$

Substituting  $\tau_1$  for the expression of the Coulomb law, we obtain  $\tau_1 = \mu p_0$ .

Taking into account the fact that the deformation in gripping area is constant, we have the formula:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{2\mu p_0 d}{aE}.$$

The total transverse force in the contact region is calculated by equation

$$F_x = \int_{-a}^a L \cdot \tau(x) dx \approx L \cdot \left( \frac{\pi}{2} a \mu p_0 - \frac{c}{a} \frac{\pi}{2} c \mu p_0 \right) = \mu F_N \left( 1 - \frac{c^2}{a^2} \right).$$

By transforming the expression  $d = a - c$  we obtain  $d/a = 1 - c/a$  and, substituting it into the expression for the total transverse force, we find the unknown distance  $d$ :

$$d = a \sqrt{\frac{F_x}{\mu F_N}}.$$

Using the formula for deformation in the gripping area, we derive the creep coefficient:

$$k = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{2\mu p_0}{E} \sqrt{\frac{F_x}{\mu F_N}}.$$

We assume

$$p_0 = E \cdot \frac{a}{2R}, \text{ where } R \text{ is wheel radius.}$$

We get the final creep formula for the railway wheel:

$$k = -\frac{\mu a}{R} \sqrt{\frac{F_x}{\mu F_N}}.$$

This dependence, as shown in the graph of Pic. 4, corresponds to the slippage curve.

It can be seen from the graph that the total sliding in the entire contact area occurs when  $F_x = \mu F_N$ . In this case, the creep coefficient (pseudo-slippage):

$$k = -\mu a/R.$$

**Conclusion.** Thus, we have obtained a new formula for the creep coefficient, which preserves the physical meaning of the value itself.

## REFERENCES

1. Buynosov, A. P. Theory of ground-based transport-technical machines: Study-methodological guide [Teorija nazemnykh transportno-tehnicheskikh mashin: Ucheb.-metod. posobie]. Yekaterinburg, USURT publ., 2016, 92 p.
2. Vershinsky, S. V., Khusidov, V. D. Dynamics of a car: Textbook [Dinamika vagona: Uchebnik]. 3<sup>rd</sup> ed., rev. and enl. Moscow, Transport publ., 1991, 860 p.
3. Landau, L. D., Lifshitz, E. M. Course of theoretical physics. Vol. VII: Theory of Elasticity. [Kurs teoreticheskoy fiziki. – T. VII: Teorija uprugosti]. 4<sup>th</sup> ed., rev. and enl. Moscow, Nauka publ., 1987, 248 p.

4. Sakalo, V., Sakalo, A., Tomashevskiy, S., Kerentcev, D. Computer modeling of process of accumulation of rolling contact fatigue damage in railway wheels. *International Journal of Fatigue*, Vol. 111, June 2018, pp. 7–15. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2018.02.002>.

5. Lysikov, N. N., Kovalev, R. V. Complex research of mechanical characteristics of structural elements by the method of computer simulation [Kompleksnyye issledovaniya mekhanicheskikh harakteristik elementov konstrukcij metodom komp'yuternogo modelirovaniya]. *Tjzhjoloe mashinostroenie*, 2009, Iss. 1, pp. 14–17.

6. Sladkovsky, A. V., Pogorelov, D. Yu. Study of the dynamic interaction in a wheel-rail contact in the presence of sliders on a wheel set [Issledovanie dinamicheskogo vzaimodejstviya v kontakte koleso–rel's pri nalichii polzunov na koljosnoj pare]. *Visnik*, 2008, Iss. 5/1, pp. 11.

7. Kovalev, R. V., Danilenko, D. V. Introduction to simulation of the dynamics of mechanical systems [Vvedenie v modelirovanie dinamiki mekhanicheskikh sistem]. *SAPR i grafika*, 2008, Iss. 4, pp. 26–31.

8. Pogorelov, D. Yu. On numerical methods of modeling the motion of systems of solids [O chislennykh metodah modelirovaniya dvizheniya sistem tvjordyh tel]. Bryansk, BSTU publ., 1997, 153 p.

9. Mikheev, G. V., Krugovova, E. A. Interaction of railway carriages and bridges: some approaches and applications [Vzaimodejstvie zheleznodorozhnykh ekipazhej i mostov: nekotorye podhody i prilozheniya]. *Nauka i progress transporta, Vestnik DNUZhT*, 2010, Iss. 33, pp. 178–179.

10. Kobishchanov, V. V., Azarchenkov, A. A. Prediction of the dynamic loading of passenger cars in longitudinal collisions [Prognozirovanie dinamicheskoy nagruzhennosti passazhirskih vagonov pri prodol'nykh soudarenijah]. *Tjzhjoloe mashinostroenie*, 2005, Iss. 12, pp. 31–48.

11. Zakharov, S. M., Goryacheva, I. G., Pogorelov, D. Yu. Evaluation of the evolution of the railroad wheel profiles on the basis of the tribodynamic model application [Ocenka evoljucii profilej koles zheleznodorozhnogo ekipazha na osnovu primeneniya tribodinamicheskoy modeli]. *Tjzhjoloe mashinostroenie*, 2007, Iss. 3, pp. 19–24.

12. Mikhalchenko, G. S., Pogorelov, D. Yu. Improvement of the dynamic qualities of the railroad rolling stock by means of computer simulation [Sovershenstvovanie dinamicheskikh kachestv podvizhnogo sostava zheleznykh dorog sredstvami komp'yuternogo modelirovaniya]. *Tjzhjoloe mashinostroenie*, 2003, Iss. 12, pp. 2–6.

13. Kovalev, R. V., Kotov, S. V. Influence of the parameters of the axle adapter for the trolley type 18–100 on the wear indicators of tire wheel bands and the stability of freight car motion [Vlijanie parametrov buksovogo adaptera dlja telezhki tipa 18–100 na pokazateli iznosa bandazhej koljosnykh par i ustojchivost' dvizheniya gruzovyyh vagonov]. *Vestnik BGTU*, 2004, Iss. 1, pp. 147–155.

14. Sakalo, A. V. A method for modeling contact stresses using finite-element fragments on an elastic base [Metod modelirovaniya kontaktnykh napryazhenij s ispol'zovaniem konechno-elementnykh fragmentov na uprugom osnovanii]. *Vestnik VGTU*, 2009, Iss. 9, pp. 71–76.

15. Routh, J. E. Dynamics of a System of Rigid Bodies. Vol. II [Russian title: *Dinamika sistemy tvjordyh tel. – Tom II. Trans. from English*]. Moscow, Nauka publ., 1983, 544 p.

Information about the author:

**Pisarenko, Vadim V.** – master of the production site «Control point of automatic brakes» of the passenger car shed Moscow of the Moscow branch of JSC Russian Federal Company, Ph.D. student of the department of Cars and Car Economy of Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia, vadimbasket@mail.ru.

Article received 25.10.2017, revised 14.02.2018, accepted 15.02.2018.