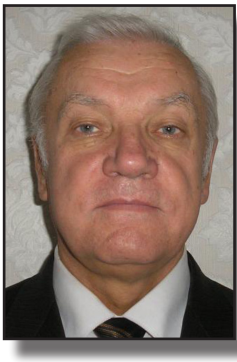
УДК 539.3, 625.03

Определение параметров динамического воздействия в плите безбалластного пути

Валентин ВИНОГРАДОВ
Valentine V. VINOGRADOV

Юрий БЫКОВ
Yuri A. BYKOV



Николай КОВАЛЕНКО
Nikolay I. KOVALENKO

Виноградов Валентин Васильевич *– доктор технических наук, профессор, первый проректор МИИТ, Москва, Россия.*
Быков Юрий Александрович *– доктор технических наук, профессор МИИТ, Москва, Россия.*
Коваленко Николай Иванович *– доктор технических наук, профессор МИИТ, Москва, Россия.*

Determining Parameters of Dynamic Impact in the Plate of Ballastless Track
(текст статьи на англ. яз. – English text of the article – p. 42)

Демонстрируется математическая модель распространения волновых поверхностей в плоском элементе, являющемся несущей плитой безбалластного пути при динамическом воздействии колёсной пары. Предложен алгоритм учета различных реологических свойств взаимодействующих тел, основанный на аналитическом методе представления неизвестных величин в виде разложений по пространственной координате и времени, начальных и граничных условий. Метод построения волновой картины в пластинке базируется на принципе суперпозиции двух отдельных задач: контактной задачи приложения первоначальной динамической нагрузки и волновой задачи деформирования плиты с течением времени, в том числе и за счет распространения с конечными скоростями упругих волн. В статье решается волновая задача в аналитическом виде для функций перемещений.

Ключевые слова: динамическое воздействие, пластина Уфлянда-Миндлина-Рейснера, упругие волны, ортотропные свойства, сферические функции, безбалластный железнодорожный путь.

Исследование поведения конструкций безбалластного пути под действием динамической нагрузки стимулирует поиск математических моделей, способных максимально облегчить понимание рассматриваемых явлений. При изучении волновых процессов в телах, подобных несущей плите, предлагается использовать модели идеально упругой среды [1, 2]. Если при этом учитывать [3, 4], что объекты обладают всеми свойствами такой среды, то дифференциальные уравнения распространения волн в телах плотностью ρ можно получить из общих уравнений равновесия прямоугольной призмы с ребрами dx, dy, dz, выделенной вблизи произвольной точки, приравняв нулю усилия и инерционные члены [5, 6].

Дифференциальные волновые уравнения для перемещений в упругой среде в общем виде примут вид:

$$\left(\chi + G\right)\frac{\partial \Delta}{\partial x} + G\nabla^2 u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$(\chi+G)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+G\nabla^2 v=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$(\chi+G)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+G\nabla^2 w=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (1)$$

Здесь: Δ – объёмная деформация; ∇^2 – оператор Лапласа второго порядка; $\chi=\nu E/(1+\nu)(1-2\nu)$; E и G – модули упругости и сдвига соответственно; ν – коэффициент Пуассона; *u, v, w* – перемещения элементов упругой среды вдоль координатных осей *0x, 0y, 0z*.

Динамическое поведение плиты в данном случае описывается волновыми уравнениями типа Уфлянда-Миндлина-Рейснера, имеющими гиперболическую структуру и учитывающими сдвиговые деформации и инерцию вращения поперечных сечений [7–10]. Нахождение динамических и кинематических параметров деформирования несущей армированной плиты безбалластного пути предполагает решение определяющей системы уравнений, записанной в безразмерном виде с помощью замен:

$$\tau=t\sqrt{c_1}/h, c_1=E_r/(1-\sigma_r\sigma_\theta)\rho,$$
$$w=w/h, u=u/h, v=v/h, r=r/h, \qquad (2)$$

где $w(r, \theta)$, $u(r, \theta)$ и $v(r, \theta)$ – перемещения по нормали и касательным в направлениях r, θ соответственно; $\varphi(r, \theta)$ и $\psi(r, \theta)$ – функции углов поворота в двух тангенциальных направлениях; E_r, E_θ и σ_r, σ_θ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона для направлений r, θ; h – толщина железобетонной плиты; t – время, прошедшее с момента начала динамического воздействия от транспортного средства.

При использовании замен (2) система уравнений, определяющих динамическое поведение несущей плиты, запишется в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r^2}\frac{c_2}{c_1}\varphi+\frac{c_2\sigma_r+c_3}{c_1 r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}-$$
$$-\frac{c_2+c_3}{c_1 r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\frac{12c_4}{c_1}\left(\frac{\partial w}{\partial r}-\varphi\right)=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{c_4}{c_1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{c_4}{c_1}\left(\frac{\partial w}{r\partial r}-\frac{\varphi}{r}\right)+$$
$$+\frac{c_4}{c_1}\left(\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2}-\frac{\partial\psi}{r\partial\theta}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}+q_1, \qquad (3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{c_3}{c_1 r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}-\frac{c_2}{c_1}\frac{u}{r^2}+$$
$$+\frac{c_2\sigma_r+c_3}{c_1 r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\theta}-\frac{c_2+c_3}{c_1 r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}=\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{c_2}{c_1 r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+\frac{c_3}{c_1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right)+$$
$$+\frac{\sigma_\theta+c_3}{c_1 r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}+\frac{c_2+c_3}{c_1 r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\partial^2 v}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{c_3}{c_1}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\psi}{r^2}\right)+\frac{c_2}{c_1 r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{\sigma_\theta+c_3}{c_1 r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}+$$
$$+\frac{c_2+c_3}{c_1 r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\frac{12c_5}{c_1}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\psi\right)=-\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2},$$

где $c_2=E_\theta/(1-\sigma_r\sigma_\theta)\rho$, $c_3=G_{r\theta}/\rho$, $c_4=KG_{rz}/\rho, c_5=KG_{\theta z}/\rho$, $q_1=qh/\rho c_1$; ρ – плотность материала плиты; θ – внешняя нагрузка (здесь от динамического воздействия); $E_r\sigma_r=E_\theta\sigma_\theta, K=5/6$, D_r, D_θ, C_r, C_θ – жесткости изгиба и растяжения-сжатия для направлений r, θ; G_{rz}, $G_{\theta z}$ – модуль сдвига в плоскостях, указанных в индексе нижнего регистра.

Параметры c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, входящие в выражения (3), представляют собой квадраты скоростей фронтов упругих волн, индексы у величины обозначают тип волновой поверхности: 1, 2 определяют квазипродольные волновые поверхности растяжения-сжатия, распространяющиеся вдоль направлений r и θ (вдоль и поперек рельс соответственно), индекс 3 – квазипоперечную волновую поверхность сдвига в плоскости $r\theta$, индексы 4, 5 – квазипоперечные волновые поверхности сдвига по направлениям, нормальным к плоскостям rz, θz. Значения скоростей волновых поверхностей напрямую зависят от механических анизотропных свойств материала плиты в соответствующих направлениях. Можно считать, что набор значений этих скоростей определяет упругие свойства несущей железобетонной плиты [9, 11].

Решение системы уравнений (3) предлагается искать в пространстве Лапласа. Все виды имеющихся в (3) линейных и угловых перемещений, а также внешнюю нагрузку $q(t, r, \theta)$ (функция, связанная с контактной силой $P(t)$) предлагается записать в виде разложений в степенные ряды [10, 11] по сферическим функциям с использованием полиномов Лежандра [5]. Такое представление неизвестных величин позволяет связать между собой искомые функции и их производные различных порядков с точностью до неизвестных коэффициентов, что не даст увеличиться числу неизвестных функций после их дифференцирования:

$$\bar{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} x_{2n+m} P_{2n+1}\left(\cos\frac{\pi r}{2R}\right)\cos(m\theta), \quad (4)$$

$$\bar{q}_1 = \frac{P(p)}{\pi R_c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} (4n+3) P_{2n+1}\left(\cos\frac{\pi r_1}{2R}\right)\bullet P_{2n+1}\left(\cos\frac{\pi r}{2R}\right)\cos(m\theta). \quad (5)$$

В приведенных выражениях R — характерный размер несущей плиты основания; r_1 — координата места динамического воздействия колеса на верхнее строение железнодорожного пути; x — величина, которая может принимать значения основных перемещений ϕ, ψ, w, u, v. Данные величины находятся в пространстве изображений, о чем и говорит черта сверху. $P(p)$ — зависимость силы взаимодействия от параметра пространства изображений.

Для определения коэффициентов разложений (4), (5) воспользуемся их представлением в виде рядов Лорана вблизи исследуемой точки плиты [6, 7]:

$$x_{2n+m} = x_{2n+m}^0\varepsilon^0 + x_{2n+m}^1\varepsilon^1 + x_{2n+m}^2\varepsilon^2 + x_{2n+m}^3\varepsilon^3, \quad (6)$$

где $\varepsilon = p^{-2}$, p — параметр пространства Лапласа.

Подставляя ряды (4), (5) с учетом (6) в систему (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим системы линейных алгебраических уравнений, из которых найдем коэффициенты соотношений (6):

$$\psi_{2n+m}^3 = P(p)P_s,$$

$$\varphi_{2n+m}^3 = P(p)\left(\frac{c_1}{c_4}\frac{R_1\cos\alpha_1}{A_1^3} - P_s\right),$$

$$\psi_{2n+m}^2 = P(p)P_s\left(1 + D_1\cdot\frac{B_1^3}{A_1^3} - D_2\right) - \frac{P(p)R_1\cos\alpha_1}{A_1^3}\frac{c_1}{c_4}D_1,$$

$$\varphi_{2n+m}^2 = P(p)\frac{B_1^3}{A_1^3}P_s\left[-2 - \frac{D_3}{A_1^3} + D_2\right] + \frac{P(p)R_1\cos\alpha_1}{A_1^3}\frac{c_1}{c_4}\left(1 + \frac{D_3}{A_1^3}\right), \quad (7)$$

$$\psi_{2n+m}^i = \left[P(p)\frac{c_1}{c_4}\left(A_1^3 - A_2^3R_1\cos\alpha_1\right) - \varphi_{2n+m}^{i+1}\left(A_1^3A_2^2 - A_2^3A_1^2\right) - \psi_{2n+m}^{i+1}\left(A_1^3B_2^2 - A_2^3B_1^2\right) - \psi_{2n+m}^{i+2}B_2^1\right] \Big/ \left(B_2^3A_1^3 - B_1^3A_2^3\right),$$

$$\varphi_{2n+m}^i = \frac{P(p)R_1\cos\alpha_1}{A_1^3}\frac{c_1}{c_4} - \frac{B_1^3}{A_1^3\left(B_2^3A_1^3 - B_1^3A_2^3\right)}\left[\frac{c_1}{c_4}\frac{P(p)}{A_1^3}\left(A_1^3 - A_2^3R_1\cos\alpha_1\right) - \varphi_{2n+m}^{i+1}\left(A_1^3A_2^2 - A_2^3A_1^2 + \frac{A_1^2}{A_1^3}\right) - \psi_{2n+m}^{i+1}\left(A_1^3B_2^2 - A_2^3B_1^2 + \frac{B_1^2}{A_1^3}\right) - \psi_{2n+m}^{i+2}A_1^3B_2^1\right],$$

$$w_{2n+m}^3 = -C_1^3\psi_{2n+m}^3, \quad w_{2n+m}^i = C_1^2\psi_{2n+m}^{i+1} - C_1^3\psi_{2n+m}^i,$$

$$v_{2n+m}^3 = \frac{\cos\alpha_1 P(p)S_p\left(T_2^3\cos\alpha_2 - T_1^3\sin\alpha_2\right)}{T_1^3S_2^3 - S_1^3T_2^3},$$

$$u_{2n+m}^3 = \cos\alpha_1\sin\alpha_2\frac{P(p)S_p}{S_2^3} - \frac{v_{2n+m}^3T_2^3}{S_2^3},$$

$$u_{2n+m}^i = \frac{u_{2n+m}^{i+1}\cos(m\theta) + \cos\alpha_1\cos\alpha_2P(p)S_p}{S_2^3} - \frac{v_{2n+m}^iT_2^3}{S_2^3},$$

$$v_{2n+m}^i = \frac{\left(u_{2n+m}^{i+1}\cos(m\theta) + \cos\alpha_1\cos\alpha_2P(p)S_p\right)S_2^3 - \left(v_{2n+m}^{i+1}\cos(m\theta) + \cos\alpha_1\sin\alpha_2P(p)S_p\right)S_1^3}{T_1^3S_2^3 - S_1^3T_2^3}.$$

Здесь i = 0, 1, 2, индекс после запятой обозначает частную производную по указанной координате.

После обратного преобразования Лапласа можно записать в пространстве оригиналов перемещения как функцию времени, двух координат и силы взаимодей-

$$x(\varphi,\theta,\tau)=\frac{(1-\sigma_\theta\sigma_r)h}{\pi R_c^2 E_r}\int_0^\tau\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(4n+3)P(\tau_1)\times$$
$$\times P_{2n+1}\left(\cos\left(\frac{\pi r_1}{2R}\right)\right)P_{2n+1}\left(\cos\left(\frac{\pi r}{2R}\right)\right)\cos(m\theta)\times$$
$$\times\left[x_{2n+m}^0 Dirac(\tau-\tau_1)+x_{2n+m}^1(\tau-\tau_1)+\frac{x_{2n+m}^2(\tau-\tau_1)^3}{6}+\frac{x_{2n+m}^3(\tau-\tau_1)^5}{120}\right]d\tau_1. \quad (8)$$

ствия на пластинку (8), где *Dirac* (τ-τ_1) – дельта-функция от исходного временного интервала.

Соотношение (8) связывает перемещения точек плиты с силой динамического воздействия на нее от колёсной пары. Контактная сила обусловлена перемещениями точек плоского элемента в месте приложения взаимодействия и получает свое численное выражение в функциональном уравнении [3, 7]

$$y(t)=V_0 t-\frac{1}{m}\int_0^t P(t_1)(t-t_1)dt_1, \quad (9)$$

где $y(t)=\alpha(t)+w(t)$ – полное перемещение колеса экипажа; m – приведенная масса колеса; t – время, отсчитываемое с момента начала взаимодействия тел в выбранной точке; t_1 – переменная интегрирования.

Временные зависимости $\alpha(t)$ и $P(t)$ определяются при решении контактной задачи [3, 8, 9], результаты которой совмещаются с результатами волновой задачи. При этом решение уравнения (9) находится численно с помощью ЭВМ, исходя из предположения, что на каждом достаточно малом интервале $(n-1)\tau\le t\le n\tau$ неизвестные величины изменяются линейно.

Таковы подходы и логика нахождения параметров динамического воздействия в плите безбалластного пути, если пользоваться предложенными математическими моделями. Наличие в расчетах идеально упругой среды позволяет более точно определять искомые величины с учетом волновой картины в плоском элементе. И это несомненное преимущество демонстрируемого метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abrate S. Localized impact on sandwich structures with laminated facing // Applied Mechanics Reviews. – 1997. – Vol. 50, № 2. – pp. 69–82.
2. Сычева А. В., Локтев А. А., Залетдинов А. В. Расчет осадки полотна железнодорожного пути от действия динамической нагрузки с помощью лучевого метода // Нелинейный мир. – 2013. – № 11. – С. 67–76.
3. Loktev A. A. Dynamic contact of a spherical indenter and a prestressed orthotropic Uflyand-Mindlin plate // Acta Mechanica, 2011, V. 222, № 1–2, pp. 17–25.
4. Olsson R., Donadon M. V., Falzon B. G. Delamination threshold load for dynamic impact on plates // International Journal of Solids and Structures, 2006, V. 43, pp. 3124–3141.
5. Thomas T. Y. Plastic Flow and Fracture in Solids. N.Y.; L.: Acad. Press, 1961.
6. Achenbach J. D., Reddy D. P. Note on wave propagation in linear viscoelastic media // Z. Angew. Math. Phys. 1967. V. 18. – pp. 141–144.
7. Бирюков Д. Г., Кадомцев И. Г. Упругопластический неосесимметричный удар параболического тела по сферической оболочке // Прикладная математика и теоретическая физика. – 2005. – Т. 46. – № 1. – С. 181–186.
8. Залетдинов А. В., Локтев А. А. Определение точек взаимодействия прямых и отраженных волн в пластинке // Вестник МГСУ. – 2010. – № 4. – С. 92–98.
9. Malekzadeh K., Khalili M. R., Olsson R., Jafari A. Higher-order dynamic response of composite sandwich panels with flexible core under simultaneous low-velocity impacts of multiple small masses // International Journal of Solids and Structures. – 2006. – V.43. – pp. 6667–6687.
10. Agostinacchio M., Ciampa D., Diomedi M., Olita S. Parametrical analysis of the railways dynamic response at high speed moving loads // Journal of Modern Transportation, 2013. V. 21. № 3. P. 169–181.
11. Abrate S. Modelling of impact on composite structures // Compos Struct. 2001, V. 51. P. 129–138. ●

Координаты авторов: **Виноградов В. В.** – +7(495) 684–21–10, **Быков Ю. А.** – +7(495) 684–28–68, **Коваленко Н. И.** – kni50@mail.ru.

Статья поступила в редакцию 21.12.2015, принята к публикации 08.02.2016.