УДК 658.512.2

Структурная оптимизация интегрированных АСУ

Александр ПОПОВ

Alexander P.POPOV

Попов Александр Петрович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Автоматизированные станочные системы и инструменты» Московского государственного машиностроительного университета (МАМИ), Москва, Россия.

Отличительной особенностью структурирования сетевых математических моделей является использование имеющегося спектра весовых значений вершин антисимметричных связных графов. Отраженные математические объекты позволяют строить упорядоченную структуру отношений между полными путями сетевого графа, описываемую ориентированным граф-деревом. А это дает, в свою очередь, возможность эффективно решать численные задачи на моделях. Представленное структурирование помогает получить эффективный алгоритм поиска полных путей. Такого рода алгоритм способствует реализации нового метода структурной оптимизации.

Ключевые слова: АСУ, сетевая модель, структурирование, граф, орграф, граф-дерево, контур, группа, оптимизация, математическая модель, алгоритм, дифференциал.

Широкий спектр задач структурной оптимизации технических решений основан на использовании в качестве математических моделей сетевых орграфов G= (X, U) ($U \subset X \times X$), каждой вершине $x_i \in X$ которых поставлено в соответствие одно или несколько чисел $\left\{\varepsilon\left(x_i\right)\right\}$, представляющих критерии оптимизации.

В этой связи с целью создания математического обеспечения системной структурной оптимизации интегрированных автоматизированных систем управления необходимо решить задачу структурирования соответствующих математических моделей.

Известны разные методы построения структур при упорядочении вершин графов [1–4]. Отличительной особенностью подобного структурирования считается то, что оно строится с использованием имеющегося спектра весовых значений вершин. При этом внимание уделяется антисимметричным связным графам (рис. 1) с отношением строгого порядка на основе свойства «существует путь из x_i в x_j», разбитым на слои так, что:

- все элементы данного слоя не имеют предков в следующем слое;

• в первом и последнем слоях находится по одному элементу (вершины входа x' и выхода x" из сети);

• элемент последнего слоя не имеет потомков;

• вершины одного слоя не соединены между собой дугами.

Основные понятия. Построим свободную группу P (U) над порождающим множеством U всех дуг графа G= (X, U) следующим образом. В качестве элементов P (U) будем рассматривать множество формальных линейных комбинаций элементов из U с целыми коэффициентами вида

$$p_j=\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i\cdot u_i),\qquad p_j\in P(U);$$
$$u_i\in U;\qquad \gamma_i=0,\pm1,$$

где *n* — количество дуг графа.

В качестве бинарной аддитивной операции определим сумму элементов из множества P (U) формулой

$$\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i\cdot u_i)+\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i'\cdot u_i)=\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i+\gamma_i')\cdot u_i .$$

Аналогично построим группу H (X) над множеством X всех вершин графа, определив ее элементы как

$$h_j=\sum_{i=1}^{m}(\gamma_i\cdot x_i),\qquad h_j\in H(X);$$
$$x_i\in X;\qquad \gamma_i=0,\pm1,$$

где *m* — количество вершин (в дальнейшем при записи элементов групп P (U) и H (X) будем опускать составляющие их элементы, имеющие нулевые коэффициенты).

Определение 1. Дифференциалом *d* группы P (U) называется гомоморфизм *d:* P (U) -> H (X), найденный следующим образом:

1) если $u_t=(x_i,x_j)$, то $du_t=x_j-x_i$;

2) если $p_q=\sum\gamma_t\cdot u_t$, то $dp_q=\sum\gamma_t\cdot du_t$,

при $p_q\in P(U)$; $u_t\in U$; $x_i,x_j\in X$.

Определение 2. Элемент $r\in P(U)$ является р-контуром (далее – просто контур, в рассматриваемом классе графов отсутствуют контуры в обычном понимании [2,4], что исключает смешение этих двух понятий), если $dr=0$. $R=Ker\,d\subset P(U)$ – подгруппа р-контуров.

ЛЕММА 1. Сумма нескольких контуров есть контур.

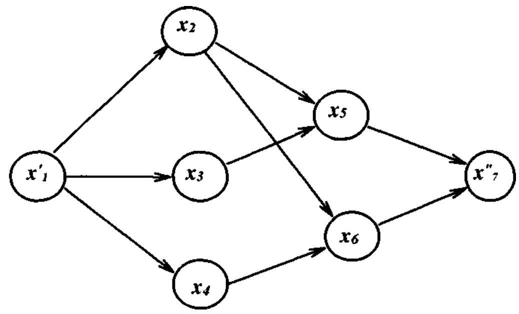

Рис. 1. Пример сетевого технологического графа G= (X, U).

Pic. 1. Example of network technological graph G= (X, U).

<u>Доказательство.</u> Во-первых, сумма $\sum r_i$ есть элемент группы P (U) как результат аддитивного сложения ее элементов. Во-вторых, дистрибутивность отображения *d,* согласно определению 1, позволяет записать $d\sum r_i=\sum dr_i=0$. Утверждение леммы доказано.

Используя общепринятое понятие пути на графе как связанной конечной последовательности дуг, будем обозначать его в виде

$$\Omega=\{u_1,u_2,...,u_w\}. \qquad (1)$$

При этом, если $u=(x_1,x_2)$, то $x_1=u^-, x_2=u^+$. Длину $L(\Omega)$ пути (1) будем определять через упомянутые численные весовые оценки вершин $\varepsilon(x)$ выражением

$$L(\Omega)=\varepsilon(u_1^-)+\sum_{i=1}^{w}\varepsilon(u_1^+). \qquad (2)$$

Если путь соединяет вершину входа *x*' с вершиной выхода *x*" сети, то будем называть такой путь полным.

Зададим отображение φ следующим образом:

$$\varphi(\{\gamma_1u_1,\gamma_2u_2,...,\gamma_nu_n\})=\sum_{i=1}^{n}\gamma_iu_i,\qquad \gamma_i>0, \quad (3)$$

а также обратное ему

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_iu_i\right)=\{|\gamma_1|u_1,|\gamma_2|u_2,...,|\gamma_n|u_n\}.$$

Определение 3. Образом пути $\Omega\subset U$ на графе G= (X, U) выступает отображение φ(Ω).

ЛЕММА 2. Дифференциал образа любого полного пути на сетевом графе определится как dφ(Ω)=x"–x'.

<u>Доказательство.</u> Поскольку полный путь Ω на рассматриваемых графах являет-

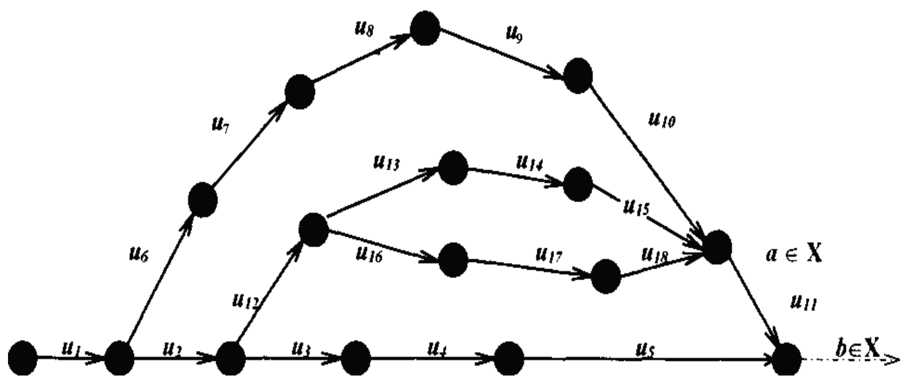

Рис.* 2. *Фрагмент графа, поясняющий введённые определения:
r[ab] ***– элементарный контур, базирующейся в вершине сечения*** $b \in X$ ***по дуге и***$_{11}$ **= (*a*, *b*), инцидентной пути** $\Omega_0 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots\}$ **, *то есть*** $r^{ab} \equiv r_0^{bj} \equiv r_{00}^{bi}$ **;** $r_1 = u_2 + u_3 + u_4 + u_5 - u_{11} - u_{10} - u_9 - u_8 - u_7 - u_6$ **;**

$r_2 = u_3 + u_4 + u_5 - u_{11} - u_{15} - u_{14} - u_{13} - u_{12}$; $r_2 = u_3 + u_4 + u_5 - u_{11} - u_{18} - u_{17} - u_{16} - u_{12}$; $r^{ab} \in \{r_1, r_2, r_3\}$;

$\alpha\left(r^{ab}\right) = \min\limits_i \left\{\alpha(r_1), \alpha(r_2), \alpha(r_3)\right\}$.

Pic.2. Fragment of the graph, explaining introduced definitions*:* r[ab] **–elementary contour, which is based at the top of the section** $b \in X$ **in the arc *и***$_{11}$ **= (*a*, b), incident to the path** $\Omega_0 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots\}$ **, i. e.** $r^{ab} \equiv r_0^{bj} \equiv r_{00}^{bi}$ **;**

$r_1 = u_2 + u_3 + u_4 + u_5 - u_{11} - u_{10} - u_9 - u_8 - u_7 - u_6$ **;** $r_2 = u_3 + u_4 + u_5 - u_{11} - u_{15} - u_{14} - u_{13} - u_{12}$;

$r_2 = u_3 + u_4 + u_5 - u_{11} - u_{18} - u_{17} - u_{16} - u_{12}$; $r^{ab} \in \{r_1, r_2, r_3\}$; $\alpha\left(r^{ab}\right) = \min\limits_i \left\{\alpha(r_1), \alpha(r_2), \alpha(r_3)\right\}$.

ся простым путем, не имеющим кратных дуг, то его образ с учетом (1) можно записать как $\phi(\Omega) = u_1 + u_2 + \ldots + u_w$.

В соответствии с определением 1 получим $d\phi(\Omega) = du_1 + du_2 + \ldots + du_w$, или $d\phi(\Omega) = \left(u_1^+ - u_1^-\right) + \left(u_2^+ - u_2^-\right) + \ldots + \left(u_w^+ - u_w^-\right)$,

или

$$d\phi(\Omega) = -u_1^- + \left(u_1^+ - u_2^-\right) + \ldots + \left(u_{w-1}^+ - u_w^-\right) + u_w^+ . \quad (4)$$

Свойство инцидентности дуг пути предполагает $u_i^+ = u_{i=1}^-, i \in [1, w-1]$. Следовательно, выражение (4) запишется в виде $d\phi(\Omega) = u_w^+ - u_1^-$ или $d\phi(\Omega) = x'' - x'$.

ЛЕММА 3. Разность образов двух полных путей на сетевом графе есть контур.

Доказательство. Разность образов полных путей $\phi(\Omega_i)$ и $\phi(\Omega_j)$, являясь результатом аддитивной функции сложения двух элементов группы P (U), также принадлежит этой группе. С другой стороны, дифференциал получаемой разности определится как $d\left[\phi(\Omega_i) - \phi(\Omega_j)\right] = d\phi(\Omega_i) - d\phi(\Omega_j)$.

Однако в силу утверждения леммы 2 $d\phi(\Omega_i) = d\phi(\Omega_j)$. Следовательно, $d\left[\phi(\Omega_i) - \phi(\Omega_j)\right] = 0$, что доказывает утверждение леммы.

Зададим отображение α следующим образом:

$$\alpha(p) = \sum_{u_i \in p}^{n} \gamma_i \cdot \varepsilon\left(u_i^+\right). \quad (5)$$

Определение 4. Значением контура *r* является величина $\alpha(r)$.

ЛЕММА 4. Разность длин двух полных путей на сетевом графе равна значению контура, образованного разностью их образов.

Доказательство. Пусть $\Omega_i = \{u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{iw}\}$ и $\Omega_j = \{u_{j1}, u_{j2}, \ldots, u_{js}\}$ – два любых полных пути графа. Тогда их длины в соответствии с (2) можно записать как

$$L(\Omega_i) = \varepsilon(x') + \sum_{t=1}^{w} \varepsilon\left(u_{it}^+\right),$$

$$L(\Omega_j) = \varepsilon(x') + \sum_{t=1}^{s} \varepsilon\left(u_{jt}^+\right),$$

а разность длин – как

$$L(\Omega_i) - L(\Omega_j) = \sum_{t=1}^{w} \varepsilon\left(u_{it}^+\right) - \sum_{t=1}^{s} \varepsilon\left(u_{jt}^+\right). \quad (6)$$

С другой стороны, в соответствии с леммой 3 контур, определяемый образами этих полных путей, запишется с учетом выражения (3) в виде

$$r = \phi(\Omega_i) - \phi(\Omega_j) =$$

$$= u_{i1} + u_{i2} + \ldots + u_{iw} - u_{j1} - u_{j2} - \ldots - u_{js} ,$$

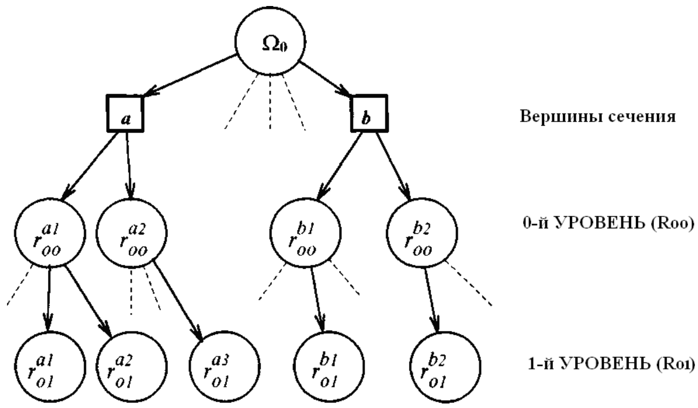

Рис. 3. Структурная модель системы производящих контуров.

Pic.3. Structural model of a system of generating contours.

а значение этого контура с учетом (5) как

$$\alpha(r)=\sum_{t=1}^{w}\varepsilon\left(u_{it}^{+}\right)-\sum_{t=1}^{s}\varepsilon\left(u_{jt}^{+}\right). \qquad (7)$$

Сравнивая выражения (6) и (7), приходим к утверждению леммы.

Определение 5. Элементарным контуром r^{ab} относительно дуги графа $u=(a,b)\in U$ называется ее сумма с разностью между образами кратчайших путей (под кратчайшим понимается путь, имеющий минимальное значение длины (2)), соединяющих вершины x' и a, а также вершины x' и *b* (рис. 2).

Определение 6. Дуга u_i называется инцидентной пути Ω_0 в вершине x_s, если выполняются следующие условия:

1) $u_i \notin \Omega_0$;

2) $\exists u_j \in \Omega_0$, $\quad u_i^{+}=u_j^{+}=x_s$. Вершина x_s называется при этом вершиной сечения пути Ω_0 (рис. 2).

Определение 7. Элементарный контур относительно дуги, инцидентной пути Ω_t в вершине сечения $b\in X$ называется базирующимся по пути Ω_t и обозначается как r_t^{bj} (рис. 2) (поскольку по вершине *b* может базироваться несколько элементарных контуров, то индекс *j* служит для их идентификации и в случае необходимости может опускаться).

На основании лемм 3 и 4 запишем соотношения

$$\begin{aligned}&\phi(\Omega_s)=\phi(\Omega_0)+r_{oz}^{bi},\\&L(\Omega_s)=L(\Omega_0)+\alpha\left(r_{oz}^{bi}\right),\qquad s\neq 0,\end{aligned} \qquad (8)$$

которые связывают определенный полный путь Ω_0 с любым другим Ω_s.

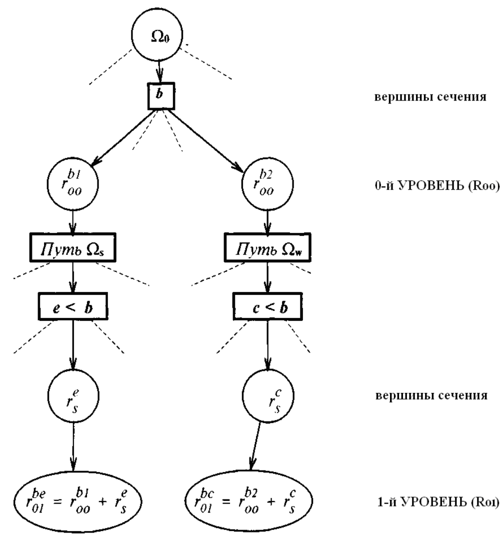

Рис. 4. Схема построения системы производящих контуров.

Pic. 4. Scheme of the system of generating contours.

Контур r_{0z}^{bj} назовем производящим контуром пути Ω_0 (смысл индексов *z* и *i* будет раскрыт ниже).

Очевидно, что множество производящих контуров любого полного пути сетевого графа является подмножеством множества R всех контуров, а количество его элементов равно общему количеству полных путей, уменьшенному на единицу.

Метод структурирования. Введенные ранее математические объекты позволяют строить упорядоченную структуру отношений между полными путями сетевого графа, описываемую ориентированным граф-деревом. Это помогает эффективно решать численные задачи на принятых моделях. Причем вид отношений определяется решаемой оптимизационной задачей.

В данном случае применительно к разработке алгоритма оптимизации рассматривается задача поиска упорядоченного множества полных путей

$$\{\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k\},$$

$$L(\Omega_i) \le L(\Omega_{i+1}), \quad i \in [0, k-1]. \quad (9)$$

Система отношений между путями строится относительно полного пути Ω_0 с минимальной длиной, который может быть легко найден одним из известных алгоритмов. Такая система описывается граф-деревом G= (R, V), V = RxR, имеющим многоуровневую иерархическую структуру $R_0 = \bigcup_z R_{0z}$, где Ro – полное множество производящих контуров пути Ω_0, а R_{0z} – подмножество z-го уровня (рис. 3). Через отношение V элементы любого z-го уровня определяют элементы последующего (z+1) уровня.

Множество R_{00} элементов структуры самого верхнего (0-го) уровня полностью состоит из элементарных контуров, базирующихся по вершинам пути Ω_0, за исключением x'.

Отношение V, связывающее производящие контуры (поскольку по вершине сечения b базируется множество производящих контуров r_{0z}^{bi} z-го уровня, то индекс i служит для идентификации этих элементов во множестве) r_{0z}^{bi} и $r_{0(z+1)}^{bj}$, характерно следующими преобразованиями (рис. 4):

$$\begin{aligned} &\phi(\Omega_s) = \phi(\Omega_0) + r_{0z}^{bi}, \\ &r_{0(z+1)}^{be} = r_{0z}^{bi} + r_s^e, \quad e < b, \end{aligned} \quad (10)$$

то есть новый производящий контур $r_{0(z+1)}^{be}$ получается из производящего контура r_{0z}^{bi} предыдущего уровня, определяющего новый путь Ω_s за счет добавления к нему элементарного контура r_s^e, базирующегося по этому пути Ω_s в вершине сечения, расположенной левее вершины сечения предыдущего уровня (это условие связано с ориентацией на вершину входа x' при построении элементарных контуров – см. определение 5). Заметим, что оба контура – это производящие контуры пути Ω_0, то есть $r_{0z}^{bi}, r_{0(z+1)}^{be} \in R_0$. С другой стороны – $r_{0z}^{bi} \in R_{0z}$, $r_{0(z+1)}^{be} \in R_{0(z+1)}$.

На уровне множеств исходя из (10) отношение V можно представить с учетом того, что множество $R_{0z} = \bigcup_b \bigcup_i r_{0z}^{bi}$ производящих контуров z-го уровня определяет множество производящих контуров (z+1) уровня $R_{0(z+1)} = \bigcup_b \bigcup_i \bigcup_e \left(r_{0z}^{bi} + r_s^e\right)$.

Описанное структурирование отношений между путями сетевого графа позволяет получить эффективный алгоритм типа AMACONT [5], реализующий поиск полных путей, отвечающих условию (9). Этот алгоритм предназначен реализовать новый метод структурной оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харари Ф. Теория графов. – М.: УРСС, 2003. – 296 с.
2. Акулич И. С. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2003. – 320 с.
3. Новиков Д. А. Сетевые структуры и организационные системы. – М.: ИПУ РАН, 2003. – 102 с.
4. David Lee. Coping with Discontinuities in Computer Vision: Their Detection, Classification, and Measurement// IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.12, № 4, 1990. pp 321–344.
5. Вдовин В. М., Суркова Л. Е., Валентинов В. А. Теория систем и системный анализ. – М.: Дашков и Ко, 2011. – 640 с. ●

STRUCTURAL OPTIMIZATION OF INTEGRATED AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS

Popov, Alexander P. *– Ph.D. (Tech.), associate professor of the department of automated machining systems and tools of Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI), Moscow, Russia.*

ABSTRACT

A distinctive feature of the structuring of the network mathematical models is the use of available spectrum of weighting values of anti-symmetric connected graphs' nodes. Reflected mathematical objects make it possible to build an ordered structure of relations between full paths of network graph, which is described with an oriented graph- tree. And it provides, in turn, the ability to effectively solve the numerical problems on the models. Represented structuring process helps to get efficient search algorithm for full paths. This kind of algorithm contributes to the realization of a new method of a structural optimization.