УДК 338:242:656.2

Линейные и дискретные функции безопасности

Сергей ГУСЕВ

Sergey A. GUSEV

Гусев Сергей Анатольевич – *соискатель Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ).*

Создание экономико-математической модели управления безопасностью на железнодорожном транспорте. Функция безопасности. Повышение сохранности объектов, финансовые ресурсы и их распределение.

Ключевые слова: *железнодорожный транспорт, математическая модель, безопасность, риски, линейная функция, дискретные функции.*

Для создания экономико-математической модели управления безопасностью на железнодорожном транспорте [3, 4] необходимо определить функцию безопасности, равную повышению меры сохранности объекта при вложении средств в него.

К примеру, возьмём 1000 вагонов, которые требуют ремонтных (а в идеальном случае – профилактических) работ. Пусть в течение какого-то времени (месяц, год) в них не вкладывались средства, и в результате различного рода аварий израсходована на ликвидацию их последствий некая сумма Б. Если же в рассматриваемый период на ремонтные нужды вложено x средств, то на ликвидацию тех же аварийных последствий ушло бы уже Б1 расходов. Тем самым мера сохранности равна Б–Б1 средств, то есть функцию безопасности отражает Б (x).

С этой точки зрения в продолжающем тему ключе статья предлагает рассмотреть некоторые отдельные функции безопасности.

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

При статистическом исследовании вложений в некоторую программу мы имеем дискретные данные для функции безопасности,

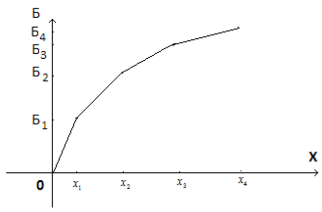


Рис. 1. Кусочно-линейные функции безопасности

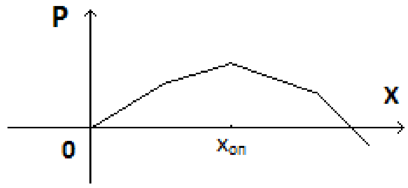


Рис. 2. Функция прибыли

т.е. набор последовательности вкладов $\{x_k\}$, k=0,1,2,..., и значения функции безопасности $\{Б_k\}$ для соответствующих вкладов (будем считать, что последовательность упорядочена: $x_k < x_{k+1},\ и\ x_0 = 0, Б_0 = 0)$.

Наиболее естественным приближением к функции безопасности является кусочно-линейная функция, получаемая соединением точек $(x_k, Д_k)$,$(x_{k+1}, Д_{k+1})$ отрезком прямой. Такая кусочно-линейная функция безопасности задается следующим образом:

$$Б(x) = \left\{ \frac{Б_{k+1} - Б_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) + Б_k,\quad при\ x_k \le x \le x_{k+1} \right\}.$$

Будем предполагать, что функция безопасности удовлетворяет естественным требованиям:

1. $Б(x)$ – возрастающая функция;

2. $Б(x)$ – выпуклая функция;

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{Б(x)}{x} = 0.$

В данных условиях возможны два случая:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} Б(x) = A - конечное\ число,$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} Б(x) = \infty.$

В первом случае получаем функцию безопасности с насыщением, во втором – без насыщения. График кусочно-линейной функции безопасности изображён на рис. 1.

Легко доказать, что функция прибыли P (x)=Б (x)–x также будет кусочно-линейной и выпуклой функцией при условии, что программа эффективна, т.е. $Б_1 > x_1$. В дальнейшем будем рассматривать только эффективные программы. График функции прибыли изображён на рис. 2

На графике максимальное значение прибыли достигается в одной точке при $x = x_{on} = x_k$. При некотором к, это будет тогда, когда нет отрезка функции безопасности, параллельного прямой y=x. Если есть отрезок функции безопасности, соединяющий точки $(x_k, Б_k)$; $(x_{k+1}, Б_{k+1})$ параллельным y=x, тогда функция прибыли на отрезке (x_k, x_{k+1}) постоянна и на нем достигается максимум. В этом случае полагаем $x_{on} = x_k$ (зачем лишние расходы, не приносящие прибыли). Обозначим через s_k тангенс угла наклона отрезка функции безопасности, соединяющего точки $(x_{k-1}, Б_{k-1}), (x_k, Б_k)$, где k=1,2,.. Из выпуклости функции следует, что последовательность S_k – убывающая. Определим функцию s(x), которая будет играть роль производной функции прибыли: $P'(x) = \{s_k - 1,\ при\ x_{k-1} \le x < x_k\}$.

Теперь рассмотрим вопрос об оптимальном распределении ресурса между программами с кусочно-линейными функциями безопасности. Пусть мы имеем финансовый ресурс x и его надо оптимально распределить между n программами с кусочно-линейными функциями. Обозначим через $(x_k^i, Б_k^i)$ точки, через которые проходит i-я функция безопасности $Б_i(x_i)$, а через $s_k^i, P_i'(x), x_{on}^i$ – соответственно тангенсы углов наклона отрезков функции безопасности, производную функции безопасности и оптимальное значение вкладов i-й программы. Для финансового ресурса x имеем естественные ограничения $x < \sum_{i=1}^{n} x_{on}^i$. Итак, получаем задачу на условный экстремум функции многих переменных:

$$P(x_1, x_2,.., x_n) = \sum_{i=1}^{n} (Б_i(x_i) - x_i);$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i;\ x < \sum_{i=1}^{n} x_{on}^i.$$

Надо найти оптимальное распределение финансового ресурса $x_i = x_i^{on}$, i=1,2,.., n, при котором достигается максимум функции прибыли P. Приведем блок-схему для нахождения оптимального распределения.

Таблица 1

Оптимальное распределение между программами с кусочно-линейными функциями безопасности

Величина вклада	Оптимальное распределение между программами					Максимальная прибыль
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	
100	6	7.5	23.1	33.75	29.65	261.9474
110	7	8	25.08	37.37	32.55	266.2159
120	7	8.5	27.39	41.41	35.7	269.7706
130	8	9	29.36	45	38.64	272.6951
140	8	10	31.35	49	41.65	275.0958
150	8	10.5	33.66	53	44.84	276.9905

Таблица 2

Оптимальное распределение между программами с дискретными функциями безопасности

Величина вклада	Оптимальное распределение между программами					Максимальна прибыль	остаток
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5		
500	116 (4)	54 (6)	80 (5)	168 (8)	78 (3)	1011.199	4
550	116 (4)	54 (6)	112 (7)	189 (9)	78 (3)	1022.331	1
600	116 (4)	54 (6)	112 (7)	210 (10)	104 (4)	1030.793	4
650	145 (5)	54 (6)	112 (7)	231 (11)	104 (4)	1037.454	4
700	145 (5)	63 (7)	128 (8)	252 (12)	104 (4)	1040.027	8
750	174 (6)	63 (7)	128 (8)	252 (12)	130 (5)	1041.408	3
768	174 (6)	63 (7)	128 (8)	273 (13)	130 (5)	1041.625	0

1. $x_i^{on} = 0, i = 1,2,...,n.$

2. Вычисляем $P_i'(x_i^{on}), i = 1,2,...,n.$

3. Находим $M = \max_{i=1}^{n} P_i'(x_i^{on})$,
 и пусть $P_k'(x_k^{on}) = M$,
 тогда $x_k^{on} = x_j^k$, при некотором j.

4. Если $x < x_{j+1}^k - x_j^k$, тогда $x_k^{on} = x_k^{on} + x$,
 выдаем результат счета $x_i^{on}, i = 1,2,...,n$, конец счета.
 Если $x \ge x_{j+1}^k - x_j^k$, тогда $x_k^{on} = x_{j+1}^k$.

5. $x = x - x_{j+1}^k + x_j^k$ идем к 2.

Из нахождения оптимального распределения видно, что x_i^{on} совпадают с узлами x_k^i функций безопасности – кроме, возможно, одного.

Для иллюстрации рассмотрим пример оптимального распределения между программами с кусочно-линейными функциями безопасности.

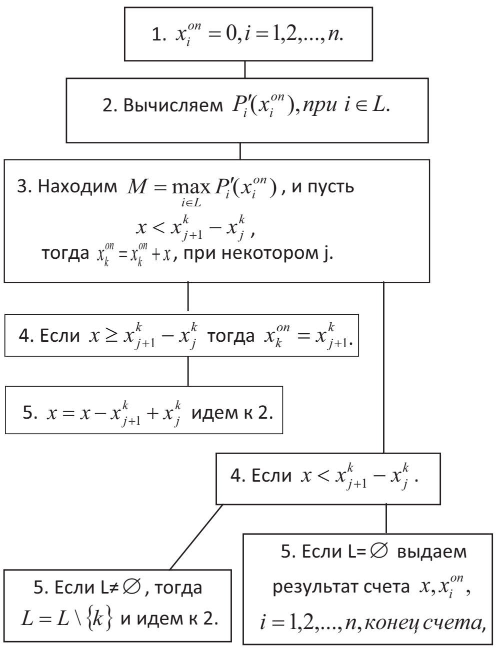
Пример. Берем пять программ с кусочно-линейными функциями безопасности, проходящими через соответствующие точки: $(x_k^i, Б_k^i)$, где x_k^1=k, $Б_k^1 = 32(x_k^1)^{0.2}$; $(x_k^2, Б_k^2)$, где x_k^2=k/2, $Б_k^2 = 20(x_k^2)^{0.3}$; $(x_k^3, Б_k^3)$, где x_k^3=0.33k, $Б_k^3 = 24(x_k^1)^{0.4}$; $(x_k^4, Б_k^4)$, где x_k^4=0.25k, $Б_k^4 = 17(x_k^1)^{0.5}$; $(x_k^5, Б_k^5)$, где x_k^5=0.21k, $Б_k^5 = 21(x_k^5)^{0.45}$. При данных параметрах ограничение $x < \sum_{i=1}^{5} x_{on}^i$ принимает вид x<197,91 млн руб. Результаты оптимального распределения и величина прибыли при разных значениях вкладов даны в таблице 1.

ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

При производстве машин для безопасности движения мы имеем дело с дискретными вложениями, т.е. если одна машина стоит x_1 руб., две – x_2 руб. и т. д. Соответственно $Б_1$, $Б_2$ – величины безопасности от одной, двух и т. д. машин. Тем самым мы имеем дискретную функцию безопасности, представляющую собой последовательность двухмерного вектора $(x_k, Б_k)$, где x_k – возможные вклады, а $Б_k$ – величина повышения безопасности при вложении x_k средств. Будем предполагать, что если соединить соседние точки $(x_k, Б_k)$, $(x_{k+1}, Б_{k+1})$, то для этой кусочно-линейной функции безопасности выполнены все предположения предыдущей главы. Функция прибыли представляется последовательностью двухмерного вектора (x_k, P_k), где $P_k = Б_k - x_k$. Аналогично разделу II определяется x_{on}. Пусть, мы имеем финансовый ресурс x и его надо оптимально распределить между n программами с дискретными функциями безопасности. Обозначим через $(x_k^i, Б_k^i)$ двухмерный вектор, представляющий i-ую функцию безопасности, а через (x_k^i, P_k^i) – двухмерный вектор, представляющий i-ую функцию прибыли. Надо распределить ресурс так, чтобы общая прибыль была максимальна. Тем самым мы получаем дискретную задачу на условный экстремум:

$$P= \sum_{i=1}^{n} P_{k_i}^i; \ \sum_{i=1}^{n} x_{k_i}^i \le x; \ x < \sum_{i=1}^{n} x_{on}^i.$$

Надо найти оптимальное распределение финансового ресурса $x^i_{k_i} = x^{on}_i$, i=1,2,.., n, при котором достигается максимум функции прибыли P. Решение этой задачи проведем аналогично предыдущей главе. Для этого из дискретных функций дохода сделаем кусочно-линейные функции дохода и приведем блок-схему для нахождения оптимального распределения. Обозначим через L множество, состоящее из 1,2,3,.., n.



В результате получаем оптимальное распределение x_i^{on} и неиспользуемый остаток. Для иллюстрации рассмотрим пример оптимального распределения между программами с дискретными функциями безопасности.

Пример. С целью усиления безопасности движения (возможно, что есть и другие цели выпуска) планируется выпустить пять видов машин. Стоимости машин соответственно равны 29 млн руб., 9 млн руб., 16 млн руб., 21 млн руб., 26 млн руб. Повышение величины безопасности от покупки k машин соответственно равно: $170k^{0.45}$ млн руб., $120k^{0.3}$ млн руб., $140k^{0.4}$ млн руб., $150k^{0.5}$ млн руб., $200k^{0.35}$ млн руб. В зависимости от выделяемой суммы на покупку требуется найти оптимальное число выпуска каждого вида машин. Итак, мы имеем дискретные функции безопасности, заданные соответствующими точками: $(x^1_k, Б^1_k)$, где x^1_k =29k, $Б^1_k = 170k^{0.2}$; $(x^2_k, Б^2_k)$, где x^2_k =9k, $Б^2_k = 120k^{0.3}$; $(x^3_k, Б^3_k)$, где x^3_k =16k, $Б^3_k = 140k^{0.4}$; $(x^4_k, Б^4_k)$, где x^4_k =21k, $Б^4_k = 150k^{0.5}$; $(x^5_k, Б^5_k)$, где x^5_k =26k, $Б^5_k$ $Б^5_k =$ $200k^{0.35}$. При данных параметрах ограничение $x < \sum_{i=1}^{5} x^i_{on}$ принимает вид x<768 млн руб. Результаты оптимального распределения и соответствующие величины прибыли при разных значениях вкладов даны в таблице 2.

Пояснение к таблице. Во второй строке планируется выделить средства в размере не более 500 млн руб. Из результатов счета следует, что оптимальная сумма выделения в этом случае =496 млн руб. (вычитается остаток 4, который не использовался). При этом вкладе оптимальное распределение задано в соответствующих столбцах, например, 116 (4) означает, что оптимальное значение денежных средств для выпуска машин 1-го вида – 116 млн руб., а количество выпускаемых машин задано в скобках – 4. В предпоследнем столбце –1011,199 млн руб. – максимально возможная прибыль, которая достигается при оптимальном распределении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Функциональная стратегия обеспечения гарантированной безопасности перевозочного процесса. – М., 2006.
2. Терешина Н. П., Соколов Ю. И. Экономика безопасности перевозок и приоритеты корпоративного управления ОАО "РЖД"//Евразия-вести. – 2008. – № 12.
3. Гусев С. А. Теоремы распределения ресурсов//Мир транспорта. – 2010. – № 3.
4. Гусев С. А. Функции дохода и профилактика рисков//Мир транспорта. – 2011. – № 3.

LINEAR AND DISCRETE FUNCTIONS OF THE SAFETY

Gusev, Sergey A. *– Ph. D. candidate of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT).*

The author examines a possible economic and mathematical model of the safety management within the railways. Safety function means increasing safety of rolling stock and installations, financial resources and their distribution.

Key words: safety, risks, linear function, discrete functions.

Координаты автора (contact information): Гусев С. А. – Gusev2012@rambler.ru