



Упругий удар по тонкостенному стержню



Аунг Зо ЛАТ

Aung Zaw LATT

Рассмотрена задача упругого удара массивного тела по тонкостенному стержню. Определение параметров контактной силы выполнено на основе теории Г. Герца. При этом нелинейное интегральное уравнение решается численным методом Эйлера. Колебания стержня после окончания удара оцениваются с учетом сформировавшихся к этому моменту времени начальных условий. При поперечном ударе по тонкостенным стержням открытого профиля учитываются деформации сдвига.

Ключевые слова: теория соударения упругих тел, теория упругости, ударное взаимодействие, тонкостенные стержни.

Аунг Зо Лат – аспирант кафедры «Теоретическая механика» Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ).

При создании и эксплуатации транспортных сооружений инженерные службы с подобными расчетами сталкиваются постоянно. Задача оценить прочностные свойства элементов конструкции заставляет их то и дело возвращаться к научно-теоретическим постулатам. Как и в нашем случае со стержнями, которые находятся под воздействием ударных нагрузок.

Основы теории соударения упругих тел, если идти за известными нам источниками, изложены в монографиях В. Гольдсмита [2], С. А. Зегжды [3], Я. Г. Пановко [6]. В статье [8] С. П. Тимошенко применил теорию Г. Герца [9] к задаче поперечного удара по шарнирно-опертой балке. Нелинейное интегральное уравнение для определения контактной силы при ударе решалось научкой пошаговым методом. На каждом шаге искомая сила сохраняла постоянное значение. Зависимость перемещения оси балки в точке удара от контактной силы представлена бесконечным рядом по формам собственных колебаний. Модель балки принята на основе гипотезы Эйлера-Бернулли.

Исследование работы стержня на ударное действие, о чем пойдет речь у нас, состоит из ряда математических операций,

и для каждой из них можно выбрать наиболее рациональный подход. В нашем варианте будем следовать концепции, изложенной в статье [10].

ПОРЯДОК РАСЧЕТА СТЕРЖНЯ НА УДАРНОЕ ДЕЙСТВИЕ

Первоочередной задачей в расчетах на удар является определение параметров контактной силы. При этом можно опираться на теорию Г. Герца [9]. Она была ориентирована на выявление контактной силы при статическом взаимодействии двух упругих тел. К динамическому взаимодействию ее применение основано на том, что в зоне контакта наблюдается смятие малых объемов тел, и можно пренебрегать силами инерции этих объемов.

Ввиду возникающего контакта двух тел они вынуждены начать двигаться *совместно*. Перемещение ударяющего тела u_1 должно быть воспринято ударяемым телом. Оба имеют в малой окрестности точки контакта упругие местные деформации, между перемещениями этих точек наблюдается небольшое различие – сближение тел u , зависящее от величины контактной силы $P(t)$. Опираясь на теорию Г. Герца [2, 9], можно записать такое уравнение:

$$P(t) = K_0 u^3/2 = K_0 (u_1 - u_2)^3/2. \quad (1)$$

Здесь K_0 – параметр контактной жесткости, идущий от свойств соударяющихся тел [2]. Если в это уравнение подставить выражения u_1 и u_2 , зависящие от силы $P(t)$, то оно будет служить математической моделью рассматриваемого процесса соударения.

Если ударяющее тело моделируется материальной точкой (массивное тело), то его перемещение фиксируется на основе второго закона Ньютона:

$$u_1(t) = V_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(\tau)(t - \tau) d\tau. \quad (2)$$

Здесь $V_0 = \sqrt{2gh}$ – начальная скорость соударения, h – высота, с которой падает ударяющее тело. Начало отсчета времени t и перемещения u_1 соответствуют моменту касания соударяющихся тел.

Динамическое поведение упругого стержня при центральном продольном воздействии может быть описано дифференциальным уравнением в частных производных:

$$EA \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - \rho A \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

Уравнение (3) будем решать, применяя интегральное преобразование Лапласа [4], переходя к уравнению в обыкновенных производных. При этом имеется возможность учета отраженных волн. В уравнении (3) введены обозначения: E – модуль упругости материала; ρ – плотность; A – площадь поперечного сечения; z – координата точек оси стержня.

При центральном поперечном ударе по бисимметричному тонкостенному стержню его поведение будем описывать системой дифференциальных уравнений в частных производных с учетом деформаций сдвига при изгибе [5]:

$$EI_x \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} - \rho I_x \left(1 + \frac{E\rho}{Gf_{yy}} \right) \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho I_x \frac{\rho}{Gf_{yy}} \frac{\partial^4 \varphi_x}{\partial t^4} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \xi_y}{\partial z} = \varphi_x - \frac{EI_x}{GA} f_{xx} \left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \right). \quad (5)$$

Здесь обозначено: ξ_y – прогиб оси стержня при изгибе; φ_x – угол поворота сечения; G – модуль сдвига; I_x – момент инерции поперечного сечения; f_{xx} – коэффициент формы сечения при изгибе.

Решение системы уравнений (4–5) связано с вычислением корней биквадратного частотного уравнения:

$$(\lambda^2 - \lambda_x^2)(\lambda^2 - \lambda_0^2) + \frac{\lambda_x^2}{\mu_x^2 \Gamma_x^2} = 0. \quad (6)$$

Здесь обозначено:

$$\lambda_0 = s/c_0, \quad \lambda_x = s/c_x, \quad \mu_x = c_0/c_x,$$

s – параметр преобразования Лапласа;
 $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольной волны;

$c_x = \sqrt{Gf_{xx}/\rho}$ – скорость распространения волны сдвига при изгибе.

Корни уравнения (6) можно записать как:

$$\lambda = \pm \lambda_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(1 + \mu_x^2) \pm (1 - \mu_x^2) \sqrt{1 - \varepsilon}}, \quad (7)$$

со следующим обозначением малой величины ε при больших значениях S :



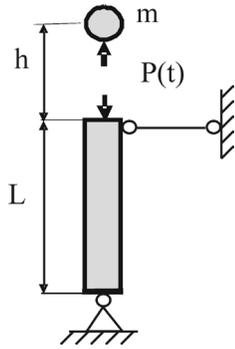


Рис. 1. Расчетная схема.

$$\varepsilon = \frac{4c_0^2}{r_x^2 s^2 (1 - \mu_x^2)^2}.$$

В области оригиналов большим значениям S соответствуют малые значения времени t , что характерно для процесса удара.

Чтобы получить приближенные значения корней, используем дважды разложение выражения (7) в степенной ряд по параметру ε с удержанием двух слагаемых при каждом разложении. Если ограничиться в оригиналах трехкратными интегралами, то получаем:

$$\lambda_1 = \pm \left(\frac{s}{c_0} + \frac{c_0}{2r_x^2 s (\mu_x^2 - 1)} \right),$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = \pm \left(\frac{c_0}{s} - \frac{c_0^3}{2r_x^2 s^3 (\mu_x^2 - 1)} \right), \quad (8)$$

$$\lambda_2 = \pm \left(\frac{s\mu_x}{c_0} - \frac{c_0}{2r_x^2 s \mu_x (\mu_x^2 - 1)} \right),$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = \pm \left(\frac{c_0}{s\mu_x} + \frac{c_0^3}{2r_x^2 s^3 \mu_x^3 (\mu_x^2 - 1)} \right). \quad (9)$$

При эксцентричном поперечном ударе по бисимметричному тонкостенному стержню необходимо дополнительно рассматривать систему дифференциальных уравнений в частных производных с учетом деформаций сдвига при кручении [5]:

$$EI_\omega \frac{\partial^4 \varphi_\omega}{\partial z^4} - GI_d \frac{\partial^3 \varphi_\omega}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho A r^2 \frac{\partial^2 \varphi_\omega}{\partial t^2} -$$

$$-\rho I_\omega \left(1 + \frac{Er\rho}{Gf_{\omega\omega}} \right) \frac{\partial^4 \varphi_\omega}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho I_\omega \frac{\rho}{Gf_{\omega\omega}} \frac{\partial^4 \varphi_\omega}{\partial t^4} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \xi_\omega}{\partial z} = \varphi_\omega - \frac{EI_\omega f_{\omega\omega}}{GA r^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_\omega}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \varphi_\omega}{\partial t^2} \right). \quad (11)$$

Здесь обозначено:

ξ_ω — угол закручивания стержня вокруг центра тяжести;

φ_ω — мера деформации сечения;

I_ω — секториальный момент инерции поперечного сечения;

I_d — момент чистого кручения;

$f_{\omega\omega}$ — коэффициент формы сечения при кручении;

$r = \sqrt{(I_x + I_y)/A}$ — полярный радиус инерции сечения.

Опуская подробности, для корней характеристического уравнения получаем приближенные выражения:

$$\lambda_3 = \pm \left(\frac{s}{c_0} + \frac{c_0}{2sr_\omega^2 (\mu_\omega^2 - 1)} \right),$$

$$\frac{1}{\lambda_3} = \pm \left(\frac{c_0}{s} - \frac{c_0^3}{2r_\omega^2 s^3 (\mu_\omega^2 - 1)} \right), \quad (12)$$

$$\lambda_4 = \pm \left(\frac{s\mu_\omega}{c_0} - \frac{c_0}{2sr_\omega^2 \mu_\omega (\mu_\omega^2 - 1)} \right),$$

$$\frac{1}{\lambda_4} = \pm \left(\frac{c_0}{s\mu_\omega} + \frac{c_0^3}{2r_\omega^2 s^3 \mu_\omega^3 (\mu_\omega^2 - 1)} \right). \quad (13)$$

Здесь введены обозначения:

$$\mu_\omega = \frac{c_0}{C_\omega}, \quad r_\omega^2 = \frac{I_\omega}{Ar^2}, \quad \lambda_\omega = s/c_\omega,$$

$C_\omega = \sqrt{Gf_{\omega\omega}/\rho}$ — скорость распространения волны сдвига при кручении.

Нелинейное интегральное уравнение (1) с внесенными в него аналитическими выражениями $u_1(P, t)$ и $u_2(P, t)$ можно решать численно — например, пользуясь методом Эйлера. Шаг по времени следует согласовать с периодом свободных колебаний, возникающих после удара. В аналитических выражениях учитывается внутреннее трение в материале стержня [7].

По окончании ударного взаимодействия ударяющее тело может получить отрицательную скорость, т. е. «отскочить». В этом случае нужно рассмотреть повторные соударения. Если ударяющее тело остается в контакте с ударяемым, то его массу следует учесть при вычислении частоты и периода свободных колебаний ударяемого тела, которые возникают после удара. Учет массы ударника может быть

выполнен с использованием понятия «приведенной массы» ударяемого тела.

Начальными условиями для свободных колебаний после удара служат перемещение и скорость точки контакта ударяемого тела, зафиксированные в момент окончания удара ($P(t) = 0$). При колебаниях учитывается внутреннее трение в материале стержня.

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР ПО КОЛОННЕ

Рассмотрим удар массивного тела, падающего с некоторой высоты на колонну (рис. 1). Исходные данные приведены в таблице 1.

Расчеты проведены в соответствии с изложенной концепцией. Аналитическое выражение для перемещения ударяемого тела в точке удара:

$$u_2(0,t) = \frac{1}{\rho A c_0} \exp\left(-\frac{\gamma \pi}{2L} c_0 t\right) \times \left[\int_0^t P(\tau) d\tau + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{nt_*}^t P(\tau) d\tau \right],$$

где $t_* = 2L/c_0$ – время пробега волны растяжения-сжатия от точки соударения до конца стержня и обратно; γ – коэффициент внутреннего трения в материале.

Нелинейное интегральное уравнение для определения контактной силы:

$$\left[\frac{P(t)}{K_0} \right]^{2/3} = V_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) d\tau - \frac{1}{\rho A c_0} \exp\left(-\frac{\gamma \pi}{2L} c_0 t\right) \left[\int_0^t P(\tau) d\tau + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{nt_*}^t P(\tau) d\tau \right]$$

Шаг счета по времени был принят равным 30 мкс. Период колебаний после удара – 772 мкс. В таблице 2 приведены максимальные значения параметров, на рис. 2 и 3 показаны графики силовых и кинематических параметров.

Как видно по приведенным результатам, процесс удара продолжался 3730 мкс, за это время успели прийти четыре отраженные волны. Ударяющее тело отскочило, повторный удар произойдет через 132 мс со скоростью 1,3 м/с.

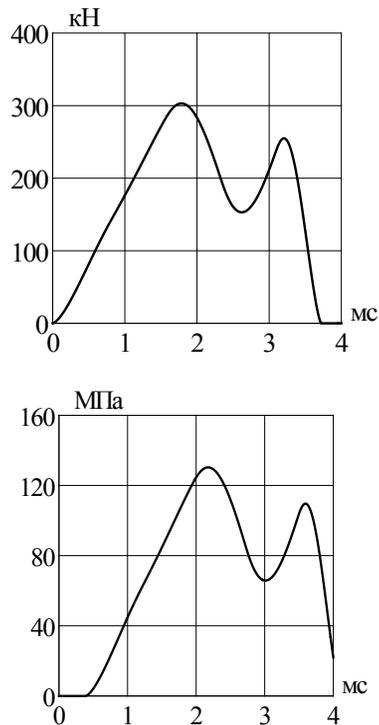


Рис. 2. Контактная сила и напряжение сжатия колонны.

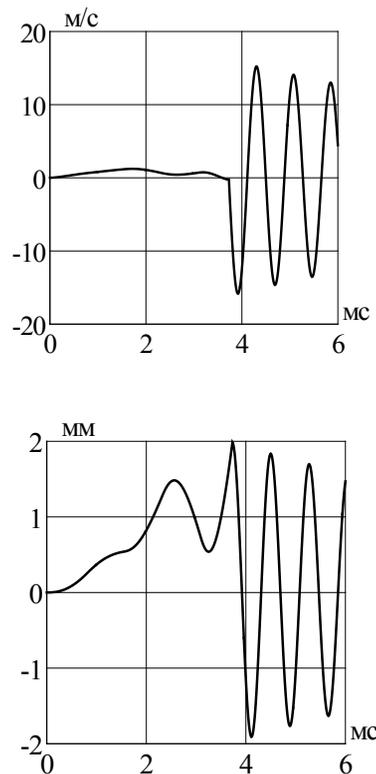


Рис. 3. Перемещение и скорость торцевого сечения колонны.





30

Таблица 1

Исходные данные

Наименование параметров	Числовое значение
Масса ударяющего тела m , кг	200
Начальная скорость удара, V_0 , м/с	2
Площадь поперечного сечения колонны (двутавр № 30) A , м ²	0,00465
Высота колонны L , м	2
Контактная жесткость, K_0 , Нм ^{-3/2}	$3 \cdot 10^9$
Коэффициент внутреннего трения, γ	0,025

Таблица 2

Максимальные значения параметров при ударе и временные характеристики процесса

Наименование	Числовое значение	Моменты времени, мкс
Контактная сила P , кН	303	1790
Количество отраженных волн	4	772, 1545, 2317, 3090
Реакция в опорном сечении, кН	606	2180
Перемещение y , мм	1,96	3730
Скорость V , м/с	15,8	3920
Нормальное напряжение, МПа	130,3	2180
Период свободных колебаний, мкс	772	После 3730 мкс

ЭКСЦЕНТРИЧНЫЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ УДАР МАССИВНОГО ТЕЛА ПО ДВУТАВРУ

Рассмотрим поперечный удар массивного тела по шарнирно закрепленному двутавру № 40 с учетом эксцентриситета (рис. 4). Исходные данные приведены в таблице 3.

Аналитические выражения кинематических и силовых параметров ударяемого тела в среднем сечении:

Здесь введены следующие времена пробега волн от точки удара до опоры и обратно (L – половина длины стержня):

$$t_* = 2L/c_0 - \text{волны поворота сечений};$$

$t_{**} = t_* \mu_x$ – волны сдвига; p_1 – первая частота изгибных колебаний; $p_{1\omega}$ – первая частота крутильных колебаний.

$$\xi_y(P, t) = \frac{c_0}{2\rho I_x} \left[\exp\left(-\frac{\gamma}{2} p_1 t\right) \left(\int_0^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} P(\tau) d\tau + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{nt_*}^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} P(\tau) d\tau \right) + \frac{1}{\mu_x} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} p_1 t\right) \left(\int_0^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} P(\tau) d\tau + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{nt_{**}}^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} P(\tau) d\tau \right) \right],$$

$$M_x(0, t) = -\frac{c_0}{2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} p_1 t\right) \left[\int_0^t P(\tau) d\tau + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{nt_*}^t P(\tau) d\tau \right],$$

$$B_\omega(0, t) = -\left[\frac{c_0 e_x}{2} \int_0^t P(\tau) d\tau \right] \exp\left(-\frac{\gamma}{2} p_{1\omega} t\right),$$

$$\xi_\omega(P, t) = \frac{c_0 (\mu_\omega + 1) e_x}{2\rho I_\omega \mu_\omega} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} p_{1\omega} t\right) \int_0^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} P(\tau) d\tau,$$

$$M_\omega(0, t) = \frac{e_x}{2} P(t), \quad M_d(0, t) = -\frac{\alpha e_x c_0^2}{2\mu_\omega^2 r_\omega^2} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} P(\tau) d\tau.$$

Исходные данные

Наименование параметров	Числовое значение
Масса ударяющего тела m , кг	300
Начальная скорость удара, V_0 , м/с	3
Площадь поперечного сечения двутавра № 40 А, м ²	0,00726
Длина двутавра $2L$, м	4
Момент инерции I_x , м ⁴	0,00019062
Эксцентриситет, м	0, 02
Секториальный момент инерции I_ω , м ⁶	$2,2766 \cdot 10^{-7}$

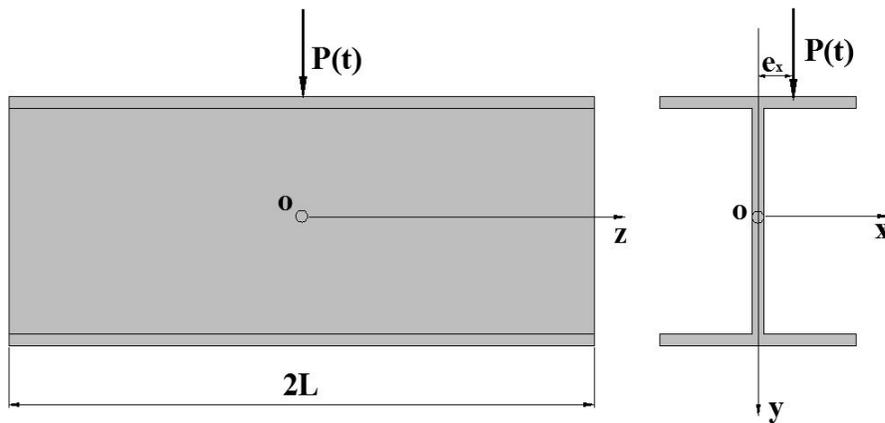


Рис. 4. Двутавровый стержень, испытывающий поперечный удар в среднем сечении (опорные устройства не показаны).

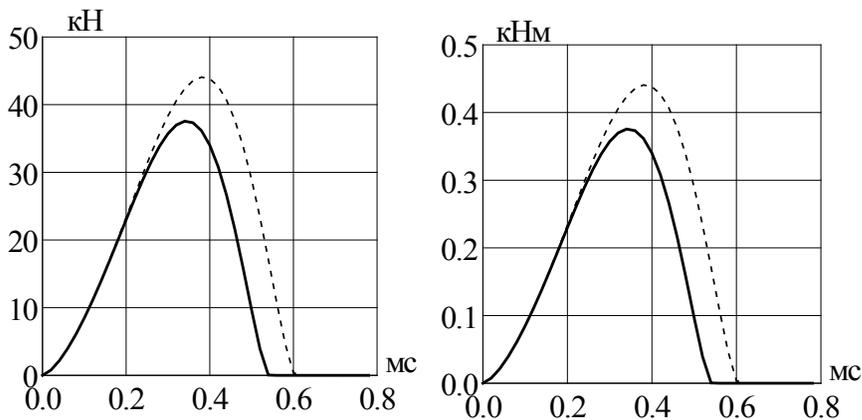


Рис. 5. Контактная сила и изгибно-крутящий момент в среднем сечении стержня.

Возникающая при соударении контактная сила $P(t)$ может быть определена из нелинейного интегрального уравнения:

$$[P(t)/K_0]^{2/3} = V_0 t - \frac{1}{m_0} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) d\tau - \xi_{y\omega}(P, t),$$

где

$$\xi_{y\omega}(P, t) = \xi_y(P, t) + e_x \xi_\omega(P, t)$$

в точке удара.

Шаг счета по времени был принят равным 20 мкс. На рис. 5–8 показаны графики



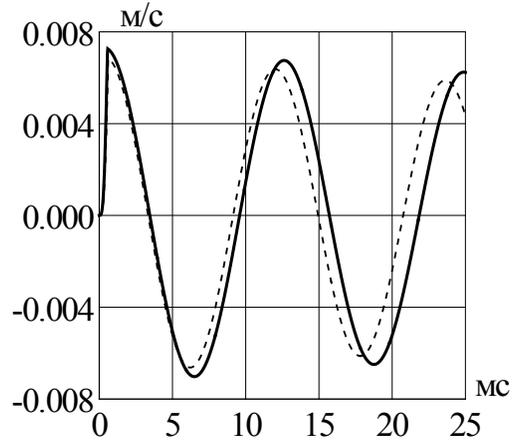
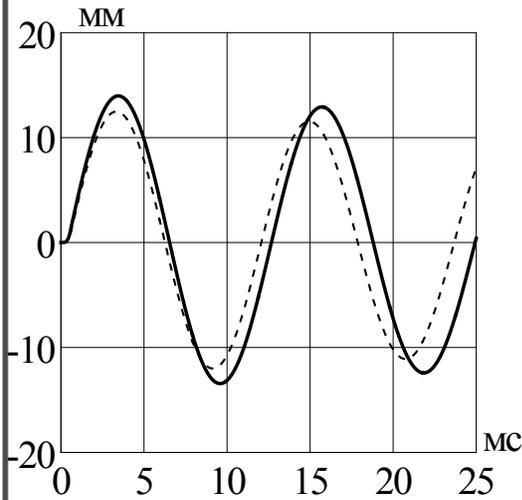


Рис. 6. Перемещение и скорость центра тяжести среднего сечения стержня.

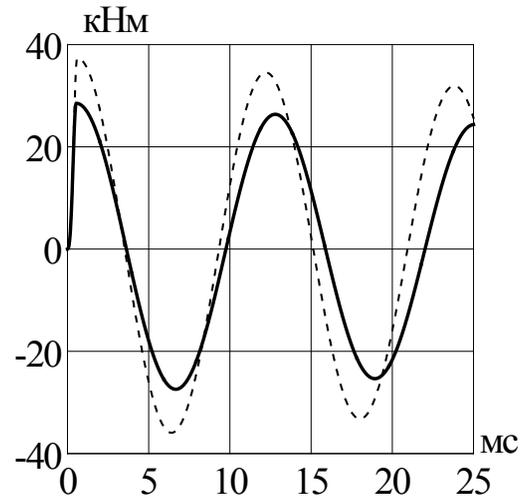
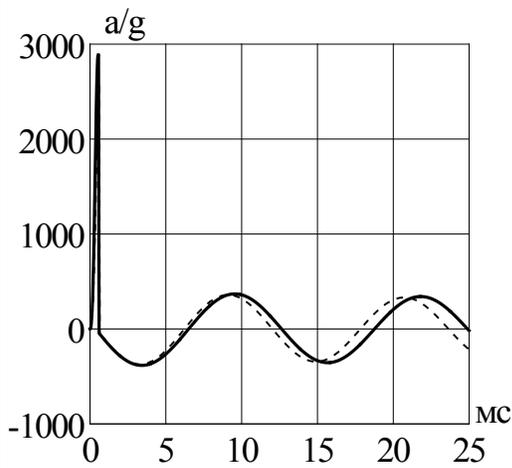


Рис. 7. Ускорение центра тяжести среднего сечения двутавра и изгибающий момент.

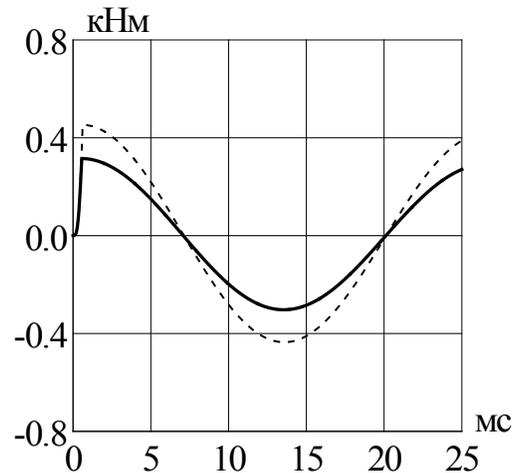
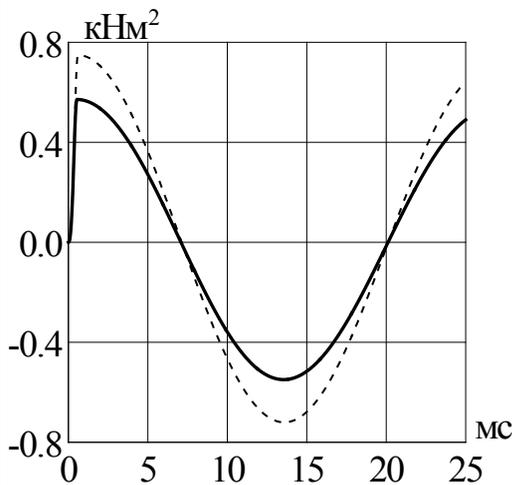


Рис. 8. Бимомент и момент чистого кручения в среднем сечении двутавра.

Максимальные значения параметров

Наименование параметров	Числовое значение	
	С учетом сдвигов	Без учета сдвигов
Контактная сила P , кН	37,56	44,07
Изгибающий момент	28,52	37,37
Бимомент	0,571	0,748
Изгибно-крутящий момент	0,376	0,441
Момент чистого кручения	0,315	0,453
Перемещение u , мм	13,98	12,49
Скорость V , м/с	7,26	6,86
Момент окончания удара, мкс	540	620
Период свободных изгибных колебаний, мс	12,26	11,61
Период свободных крутильных колебаний, мс	26,1	26,0

силовых и кинематических параметров. Пунктирные линии на графиках построены без учета деформаций сдвига, по теории В. З. Власова [1].

Как видно по приведенным результатам, процесс удара продолжался менее одной мс, за это время отраженные волны прийти не успели. Ударяющее тело осталось на ударяемом теле. Его масса была учтена при определении частоты и периода изгибных колебаний после удара.

Учетные в расчетах деформации сдвига при изгибе и кручении повлияли таким образом: силовые параметры уменьшились на 17–31%, кинематические – увеличились на 2–9%.

Получаемые на основании расчета данные позволяют оценивать прочность и жесткость стержней при действии ударных нагрузок. В таблице 4 приведены максимальные значения параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. – М., Физматгиз, 1959.
2. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяющихся тел. – М., Стройиздат, 1965.
3. Зегжда С. А. Соударение упругих тел. – СПб., 1997.
4. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973.
5. Мешеряков В. Б., Чефанова Е. В. Динамика тонкостенных стержней открытого профиля//Вестник МИИТ.– 2000.– Вып. 3.
6. Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара. – М.: Наука, 1977.
7. Сорокин Е. С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. – М., Госстройиздат, 1960.
8. Тимошенко С. П. К вопросу о действии удара на балку//Известия Санкт-Петербургского политех. ин-та. Т. 17. Вып. 2. 1912. – С. 407–425.
9. Hertz Н. Über die Berührung fester elastischer Körper (On the contact of the elastic solids)//J. Reine und Angewandte Mathematik, 1882, В.92, s. 156–171.
10. Аунг Зо Лат, Мешеряков В. Б. Концепция исследования упругого удара по стержню//Вестник МИИТ, – 2011.– Вып. 24

ELASTIC IMPACT ON A THIN-WALLED ROD

Aung Zaw Latt – Ph. D. student at the department of theoretical mechanics of Moscow State University of Railway Engineering.

The author considers a problem of elastic impact of a solid object on a thin-walled rod. The contact force's characteristics are defined on the basis of Hertzian theory and the nonlinear integral equation is solved by numerical Euler method. The rod's after-impact oscillations are estimated considering initial conditions that have been set before the given moment. Considering transverse impact on thin-walled and open profile rods the author takes into account the shear strains.

Key words: theory of collision of elastic solids, theory of elasticity, impact interaction, thin-walled rods.

Координаты автора (contact information): Аунг Зо Лат – saisyant@gmail.com.

