



# Оценка колебаний жидкого груза в котле цистерны



Вячеслав БОГАЧЕВ

Viacheslav I. BOGACHEV

**Предложенная в статье методика предназначена для проектирования цистерн. Она позволяет моделировать продольные колебания жидкости в резервуаре без применения натурных экспериментов. Автор описывает способы определения частот собственных колебаний жидкости, связанных с возможным появлением резонанса при движении вагона, что влечет резкое возрастание амплитуд перемещений, ускорений и усилий, действующих на элементы конструкций, а также демонстрирует подходы к моделированию колебаний жидкости с применением вариационного метода.**

*Ключевые слова:* вагоностроение, теория мелкой воды, вариационный метод, математическая модель.

*Богачев Вячеслав Иванович – аспирант кафедры «Вагоны и вагонное хозяйство» Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ).*

**З**начительный объем жидких грузов, в том числе ядовитых и огнеопасных, перевозится железнодорожным транспортом. Перемещение транспортируемого груза внутри резервуара делает вагоны-цистерны наиболее опасным объектом на сети железных дорог. Аварии с участием цистерн наносят значительный ущерб подвижному составу, окружающей среде и здоровью людей. Следует также признать, что в области вагоностроения проблемы динамики жидкости исследованы недостаточно.

**Расчетная схема и принятые допущения.** Рассмотрим процесс продольных колебаний жидкого груза в котле железнодорожной цистерны при маневровом соударении цистерны. Математическая модель колеблющейся жидкости основывается на теории мелкой воды [1]. Уравнения преобразуются к линейному виду. При интегрировании применяется вариационный метод.

В математической модели котел цистерны полагается неподвижным, а жидкость – движущейся с единым для всех точек ускорением, равным по величине ускорению массы котла и направленным в противоположную сторону.

Жидкость полагается несжимаемой, с постоянной плотностью, без внутреннего трения.

Поперечное сечение котла аппроксимируется прямоугольником.

Расчетная схема жидкого груза показана на рис. 1.

В декартовой системе координат  $Oxyz$  ось  $Ox$  параллельна продольной оси котла, ось  $Oy$  направлена вертикально вверх,  $Oz$  – поперечная горизонтальная ось. На рис. 1 также обозначено:  $h$  – уровень свободной поверхности жидкости;  $u$  – скорость продольного движения жидкости, одинаковая во всех точках одного поперечного сечения в соответствии с теорией мелкой воды;  $a$  – ускорение жидкости как внешнее воздействие от котла;  $dx$  – бесконечно малый участок жидкости.

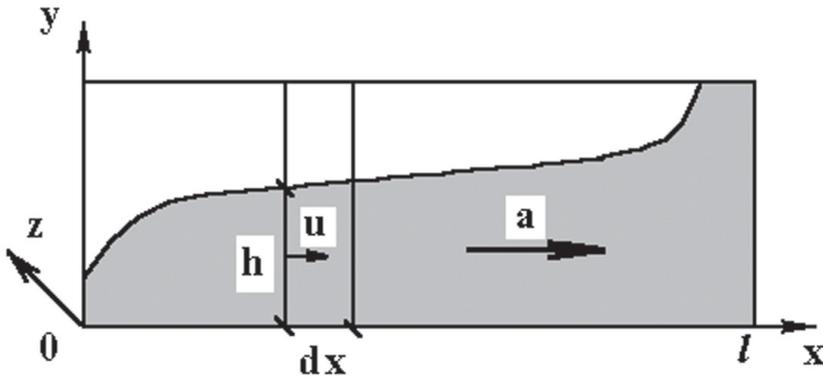


Рис. 1. Расчетная схема колеблющейся жидкости.

**Уравнения колебаний жидкости.** Запишем уравнение неразрывности для малого участка жидкости, выделенного поперечными сечениями, соответствующими  $x$  и  $(x+dx)$ .

$$\left( u \int_{\varepsilon}^h \Delta z \cdot dy \right) \Big|_x - \left( u \int_{\varepsilon}^h \Delta z \cdot dy \right) \Big|_{x+dx} - \left( \frac{\partial h}{\partial t} \Delta z \right) \Big|_h dx = 0, \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $\Delta z$  – ширина котла;  $\frac{\partial h}{\partial t}$  – скорость движения жидкости в вертикальном направлении;  $\varepsilon$  – уровень дна.

После преобразований уравнения (1) получим:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Составим уравнение движения жидкости для малого элемента  $dx$ .

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( u \int_{\varepsilon}^h \Delta z \cdot dy \right) dx = \rho \left( u \cdot u \int_{\varepsilon}^h \Delta z \cdot dy \right) \Big|_x - \rho \left( u \cdot u \int_{\varepsilon}^h \Delta z \cdot dy \right) \Big|_{x+dx} + \left( \int_{\varepsilon}^h P \Delta z \cdot dy \right) \Big|_x - \left( \int_{\varepsilon}^h P \Delta z \cdot dy \right) \Big|_{x+dx} + P_o \frac{\partial h}{\partial x} dx \Delta z \Big|_h - P_{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx \Delta z \Big|_{\varepsilon} + a \rho \left( \int_{\varepsilon}^h \Delta z \cdot dy \right) dx = 0, \quad (3)$$

где  $P = P_o + \rho g (h-y)$  – давление жидкости;  $P_o$  – давление газа над поверхностью жидкости;  $P_{\varepsilon}$  – давление жидкости на уровне дна.

По физическому смыслу члены уравнения (3) представляют собой следующее:

- масса элемента, умноженная на ускорение (левая часть);
- разница сил давления, вызванных скоростным напором в левом и правом сечениях (II и III члены);
- разница сил давления в левом и правом сечениях (члены IV, V);
- продольная сила, вызванная перепадом высоты на длине участка  $dx$  и давлением газа  $P_o$  (VI);
- сила, вызванная перепадом уровня





дна на длине  $dx$  и давлением жидкости  $P_e$  на уровне дна (VII);

– внешнее воздействие на жидкость в виде ускорения  $a$  (VIII).

После преобразований уравнения (3) получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = a. \quad (4)$$

Получена система уравнений в частных производных (2) и (4), описывающих колебания жидкости на основе теории мелкой воды.

Проведем линеаризацию уравнений (2) и (4), полагая в нелинейных членах значения коэффициентов постоянными и равными их начальным значениям:

$$t = 0; u = 0; h = h_0$$

Тогда система уравнений примет следующий вид [2]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= a. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Преобразуем систему уравнений (5) так, чтобы каждое уравнение содержало лишь одну неизвестную. Для этого возьмем частную производную первого уравнения по  $\partial x$ , а второго уравнения – по  $\partial t$  и исключим члены, содержащие  $\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x}$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - gh_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial a}{\partial t}. \quad (6)$$

Аналогично возьмем частную производную первого уравнения системы (5) по  $\partial t$ , а второго уравнения – по  $\partial x$  и исключим члены, содержащие  $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$ :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - gh_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = h_0 \frac{\partial a}{\partial x}. \quad (7)$$

В уравнении (7) учитывается возможная переменность ускорения  $a$  котла по длине.

**Определение частот собственных колебаний жидкости.** Задача определения частот собственных колебаний актуальна потому, что прямо связана с возможным появлением резонанса при движении вагона, что влечет резкое возрастание амплитуд перемещений, ускорений и усилий, действующих на элементы вагона. Наличие жидкого груза существенно влияет на процесс колебаний вагона-цистерны, причем с точки зрения возможности появления резонанса крайне неблагоприятно.

Уравнения (6) и (7), описывающие колебания жидкого груза в котле цистерны, имеют одинаковые коэффициенты, и поэтому каждое из них может быть использовано при определении собственных частот.

Введем аппроксимацию для уровня свободной поверхности в виде ряда Фурье:

$$h = h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} h_m \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \omega t. \quad (8)$$

Вид тригонометрических функций в выражении (8) соответствует начальным и граничным условиям для жидкости.

Подставим принятую аппроксимацию (8) в дифференциальное уравнение (7). Получим выражение собственной частоты, соответствующей каждой гармонике с номером  $m$ :

$$\omega = \frac{m\pi}{l} \sqrt{gh_0}. \quad (9)$$

Таким образом, имеем бесконечный спектр собственных частот, пропорциональных номеру гармоники  $m$ . Очевидно, что для оценки возможности резонанса наиболее важно значение низшей частоты:

$$\omega = \frac{\pi}{l} \sqrt{gh_0}. \quad (10)$$

**Моделирование колебаний жидкости с применением вариационного метода.** Рассмотрим систему уравнений в частных производных (6), (7), описывающую колебания жидкости в котле цистерны. Введем замену переменных:

$$\left. \begin{aligned} w &= h - h_0; \\ v &= \int_0^t u dt, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $w$  – отклонение данной точки свободной поверхности от начального уровня;  $u$  – перемещение данного поперечного сечения вдоль оси котла.

Тогда система уравнений примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - gh_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= h_0 \frac{\partial a}{\partial x}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - gh_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= a. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Начальные условия примут следующий вид:

$$t = 0; v = 0; w = 0.$$

Вследствие разделения переменных уравнения системы (12) можно интегрировать независимо друг от друга. Кроме того, достаточно найти решение для одного неизвестного ( $v$ ), а другое неизвестное получить через дифференциальную зависимость:

$$w = -h_0 \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Поэтому ниже будем рассматривать второе уравнение системы (12).

Введем функционал, соответствующий данному уравнению:

$$J = \int_0^l \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 - \frac{gh_0}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + av \right] dx. \quad (13)$$

Функционал (13) составлен по аналогии с членами, входящими в уравнение Лагранжа второго рода, которое описывает колебания твердого деформируемого тела.

Соответствие принятого функционала системе уравнений (12) устанавливается через уравнение Остроградского как условие его стационарности:

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)} \right] - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)} \right] = 0, \quad (14)$$

где  $F$  – подынтегральная функция в функционале (13).

Введем аппроксимацию функции  $v$  от продольной координаты, соответствующую граничным условиям колебаний жидкости в котле цистерны:

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} v_m \sin \frac{m\pi x}{l} = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m v_m, \quad (15)$$

где  $\Phi_m$  – функция формы, соответствующая члену ряда с номером  $m$ .

Или в матричной форме:

$$v = \vec{\Phi}^T \cdot \vec{v},$$

где  $\vec{\Phi} = \{\Phi_1; \Phi_2; \dots; \Phi_m; \dots\}$  – вектор функций формы;

$\vec{v} = \{v_1; v_2; \dots; v_m; \dots\}$  – вектор неизвестных коэффициентов ряда.

Подставим аппроксимацию (15) в выражение (13) для функционала:

$$J = \int_0^l \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}^T}{\partial t} \vec{\Phi}^T \vec{\Phi} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \frac{gh_0}{2} \vec{v}^T \frac{\partial \vec{\Phi}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x} \vec{v} + a \vec{\Phi}^T \vec{v} \right] dx.$$

Введем обозначения:

$$J = \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}^T}{\partial t} [M] \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \frac{1}{2} \vec{v}^T [R] \vec{v} + \vec{P}^T \vec{v}, \quad (16)$$

где

$$[M] = \int_0^l \vec{\Phi}^T \vec{\Phi} dx;$$

$$[R] = gh_0 \int_0^l \frac{\partial \vec{\Phi}^T}{\partial x} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x} dx;$$

$$\vec{P} = \int_0^l a \vec{\Phi} dx \quad \text{– матрицы коэффициентов}$$

и вектор правой части.

Условие стационарности функционала (16) представляет собой уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial J}{\partial \vec{v}} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial J}{\partial \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)} \right] = 0, \quad (17)$$

которое с учетом принятых обозначений запишется в виде матричного уравнения:





$$[M] \frac{d\vec{v}}{dt} + [R] \vec{v} = \vec{P}. \quad (18)$$

После интегрирования получим матрицы коэффициентов диагонального вида:

$$[M] = \frac{l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix};$$

$$[R] = \frac{gh_0\pi^2}{2l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 4 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 9 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

В результате система уравнений распадается на отдельные уравнения, соответствующие членам ряда с номерами  $m$ :

$$\frac{d^2 v_m}{dt^2} + \omega_m^2 v_m = \frac{2}{l} \int_0^l a \sin \frac{m\pi x}{l} dx, \quad (19)$$

где  $\omega_m = \frac{m\pi}{l} \sqrt{gh_0}$  – собственная частота.

Правая часть дифференциального уравнения (19) зависит от функции  $a(x, t)$  ускорения как задаваемого внешнего воздействия. В частном случае при  $a(x) = const$  после интегрирования получим:

$$\begin{aligned} &\text{при } m = 1, 3, 5, \\ &\frac{d^2 v_m}{dt^2} + \omega_m^2 v_m = \frac{4}{m\pi} a; \end{aligned} \quad (20)$$

при  $m = 2, 4, 6,$

$$\frac{d^2 v_m}{dt^2} + \omega_m^2 v_m = 0. \quad (21)$$

Начальные условия имеют вид:

$$t = 0; v_m = 0; \frac{dv_m}{dt} = 0. \quad (22)$$

Исходя из вида (22) начальных условий, очевидно, что в случае четных членов ряда ( $m = 2, 4, 6, \dots$ ) уравнение (21) будет иметь решение, тождественно равное нулю. Поэтому в дальнейшем следует находить только решение уравнения (20), соответствующего нечетным членам ряда.

В общем случае для интегрирования системы уравнений (20) можно применить численный метод, например, метод Эйлера или метод Рунге–Кутты.

**Выводы.** Предложена методика моделирования продольных колебаний жидкости в котле цистерны. Методика предназначена для применения при проектировании цистерн и позволяет моделировать процесс продольных колебаний без проведения натуральных экспериментов.

Применение методики позволяет оценивать нагруженность элементов вагона при продольных колебаниях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пирумов Ч. Г., Росляков Г. С. Численные методы решения задач газовой динамики. – М.: Высшая школа, 1987.
2. Беспалько С. В. К вопросу о моделировании продольных колебаний цистерны, частично заполненной жидкостью // Вестник ВНИИЖТ. – 1999. – № 4. ●

## SIMULATION OF VIBRATIONS OF LIQUID GOODS IN A TANK CAR

**Bogachev, Viacheslav I.** – Ph.D. student at the department of railway car and wagon facilities of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT).

The method proposed by the author is intended to design the tank cars, allowing modeling of longitudinal oscillations of liquids in a tank car without natural experiments. The author describes solution of a problem of defining of the frequencies of natural vibrations of the liquid, which relates to a probable resonance effect during car movement, that causes a risk of sharp increase of an amplitude of relocations, accelerations and efforts, effecting the car elements. He also uses a variational method to model liquid's vibrations.

**Key words:** carriage engineering, swallow-water theory, variational method, mathematical model.

Координаты автора (contact information): Богачев В. И. – vy-bogachev@yandex.ru.

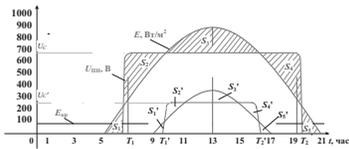


## ИННОВАЦИИ 38

*Сотрудничество в сфере геоинформатики.*

## СОЛНЕЧНАЯ ЭНЕРГИЯ 42

*Гелиоустановки обеспечат тягу.*



## ТРАНСФОРМАТОР 52

*Суточное распределение КПД.*

## ПАРОМ 58

*Эксперимент на линии Холмск – Сахалин.*

## ЭЛЕКТРОВОЗ 66

*Потери и возврат энергии.*

## СКОРОСТИ 72

*Пассажирский поезд: баланс времени.*

## INNOVATIONS 38

*Cooperation in the sphere of geoinformatics.*

## SOLAR POWER 42

*Solar power plants will supply energy for traction.*

## TRANSFORMER 52

*Diurnal distribution of efficiency.*

## FERRY 58

*Experiment at Kholmsk – Sakhalin line.*



## ELECTRIC LOCOMOTIVE 66

*Power losses and power recuperation.*

## SPEEDS 72

*Passenger train: time balance.*

