



Математическое моделирование распространения света



Любовь ЖУРАВЛЕВА
Lubov M. ZHURAVLEVA

Александр КРУЧИНИН
Alexander S. KRUCHININ



Александр НОВОЖИЛОВ
Alexander V. NOVOZHILOV

Журавлева Любовь Михайловна – кандидат технических наук, доцент Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ).

Кручинин Александр Сергеевич – аспирант МИИТ.

Новожилов Александр Владимирович – аспирант МИИТ.

Совершенствование элементной базы оптоэлектроники. На основе теории волноводов с помощью математического моделирования волновых процессов в планарном многослойном волноводе выводятся соотношения параметров оптических устройств и качества их изготовления.

Определение постоянной распространения осуществляется путем решения системы уравнений и нахождения дисперсионного соотношения с помощью программы Mathcad. Исследования поля волновода в поперечном сечении дают возможность найти оптимальные параметры волновода для уменьшения потерь в оболочке. На основании полученных данных можно оценить перспективы разрешающей способности технологий изготовления многослойных структур, являющихся элементной базой полупроводниковой техники, особенно размером менее 100 нм (низкоразмерные или квантовые структуры).

Ключевые слова: оптоэлектроника, теория волноводов, математическое моделирование, система уравнений, оптимальные параметры планарного волновода.

Математическое моделирование волновых процессов распространения света в многослойном планарном волноводе имеет значение для совершенствования устройств в системах волоконно-оптической связи (разветвителей, полосовых фильтров, волновых мультиплексоров, оптических коммутаторов, фотонно-кристаллического волокна и т. д.). Полезность модели многослойного планарного волновода заключается в возможности исследовать эффект брэгговских отражений, а задачами моделирования являются изучение механизма распространения света в волноводе, нахождение оптимальных параметров волновода для уменьшения энергетических потерь.

ТЕОРИЯ ВОЛНОВОДОВ И СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Планарным называется волновод, у которого средняя (более плотная часть – сердцевина) ограничена с двух сторон плоскостями (менее плотными частями в виде оболочки), простирающимися в бесконечность. Соответственно планарный волновод имеет только один размер по оси x , представляющий из себя ширину сердцевины. Распространение электромагнит-

ной волны происходит в направлении z . В поперечном сечении (x, y) планарного волновода напряженность электрического поля характеризует стоячую волну, в координатах (y, z) – бегущую волну.

Многослойный планарный волновод (рис. 1) есть чередование слоев с разными коэффициентами преломления n_j . Центральная часть (аналог сердцевины) состоит из нескольких плотных слоев с коэффициентом n_2 , отделенных друг от друга менее плотными слоями (с коэффициентом n_1). Крайние области играют роль оболочки (с коэффициентом n_1) и имеют бесконечно большие размеры.

Ширина слоев ρ в сердцевине определяется из соотношения $n_j \rho \cos \alpha = \lambda/4$, где α – угол отражения света от поверхности слоя волновода. Математическая задача распространения световых волн в многослойном планарном диэлектрическом волноводе является одной из основных в теории волноводов. Решение этой задачи сводится к нахождению поперечной напряженности электрического поля $E_y(x)$ плоской поляризованной электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси Oz .

Если каждый j -й слой волновода задается неравенством $x_{j-1} < x < x_j$, в пределах которого коэффициент преломления n_j не меняется, то волновое уравнение для $E_y(x)$ каждого слоя можно записать в общем виде:

$$\frac{d^2 E_y(x)}{dx^2} + (k^2 n_j^2 - \beta^2) E_y(x) = 0, \quad (1)$$

где β – постоянная распространения, k – волновое число, λ – длина волны, ω – частота света, c – скорость света в вакууме.

Конечным результатом решения этого уравнения становится определение постоянной распространения β . Эта операция осуществляется путем решения системы уравнений и нахождения дисперсионного соотношения с помощью программы Mathcad [2].

$$f_1(K_{i-1,1}; K_{i-1,2}; \beta) = \frac{e^{-q\rho}}{2} \left[K_{i-1,1} \left(\cos(h\rho) + \frac{h}{q} \sin(h\rho) \right) + K_{i-1,2} \left(\frac{h}{q} \cos(h\rho) - \sin(h\rho) \right) \right] + \frac{1}{2e^{-q\rho}} \left[K_{i-1,1} \left(\cos(h\rho) - \frac{h}{q} \sin(h\rho) \right) + K_{i-1,2} \left(-\frac{h}{q} \cos(h\rho) - \sin(h\rho) \right) \right].$$

В основе «прошивки» лежат три типа уравнений:

$$E(x) = C \cdot e^{-qx} \quad (\text{в оболочке}); \quad (2)$$

$$E(x) = A_1 \cdot e^{-qx} + A_2 \cdot e^{qx} \quad (\text{в «неплотном» слое сердцевины}); \quad (3)$$

$$E(x) = B_1 \cdot \cos(hx) + B_2 \cdot \sin(hx) \quad (\text{в «плотном» слое сердцевины}). \quad (4)$$

Количество исходных уравнений будет равно общему числу слоев N волновода. Нужные уравнения «прошивки волновода» получаются из условия непрерывности величин $E_y(x)$ и $\frac{dE_y(x)}{dx}$ (граничные условия) на стыках слоев на основании формул (2), (3), (4).

Так получается система уравнений, с помощью которой определяется дисперсионное соотношение и постоянная распространения β . Общее число уравнений в системе можно определить как $2 \times (N-1)$. Для решения системы уравнений требуется задание начальных условий, например $E_y(0) = 1$. Даже при минимальном числе слоев $N = 5$ (три в сердцевине и два крайних в виде оболочки) вывод дисперсионного соотношения выглядит очень громоздким. Для облегчения работы целесообразно создать алгоритм, с помощью которого можно составить уравнения для любого числа стыков между слоями волновода. В итоге система уравнений преобразуется в трансцендентное уравнение:

$$\operatorname{tg}(h\rho) = \frac{K_{N1} - \frac{h}{q} K_{N2}}{\frac{h}{q} K_{N1} + K_{N2}}.$$

Обе части дисперсионного соотношения являются функциями от β :

$$q = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_1^2} \quad q = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}.$$

В общем случае коэффициенты $K_{i,j}$ можно выразить так:

$$K_{i2} = f_2(K_{i-1,1}; K_{i-1,2}; \beta),$$

$$K_{i2} = f_2(K_{i-1,1}; K_{i-1,2}; \beta), \quad \text{где:}$$



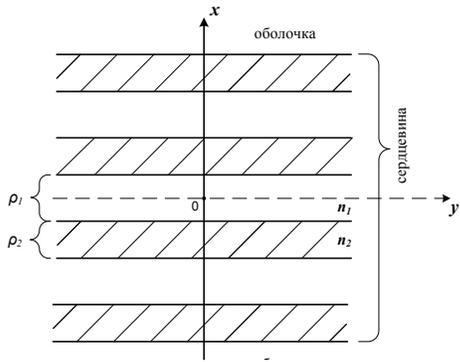


Рис. 1. Многослойный планарный волновод.

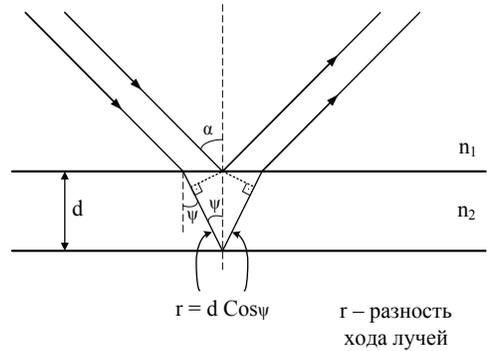
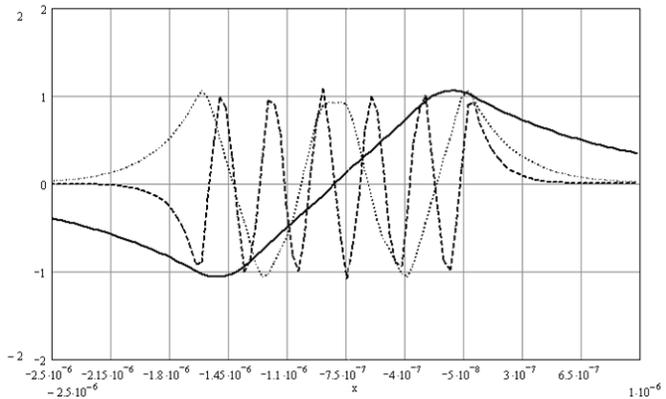


Рис. 2. Отражение света от периодической среды.

Рис. 3. График напряженности электрического поля. $\lambda = 1,31$ мкм; $n_2/n_1 = 1,1$; $\rho = 1,31/4$ мкм.

$E(x)$ при $N=3$
 $E(x)$ при $N=10$
 $E(x)$ при $N=25$



$$f_2(K_{i-1,1}; K_{i-1,2}; \beta) = \frac{e^{-q\rho}}{2} \left[K_{i-1,1} \left(\frac{h}{q} \cos(h\rho) + \sin(h\rho) \right) + K_{i-1,2} \left(\cos(h\rho) - \frac{h}{q} \sin(h\rho) \right) \right] + \frac{1}{2e^{-q\rho}} \left[K_{i-1,1} \left(\frac{h}{q} \cos(h\rho) - \sin(h\rho) \right) + K_{i-1,2} \left(-\cos(h\rho) - \frac{h}{q} \sin(h\rho) \right) \right]$$

Составление системы уравнений на основе аналитических выражений (2), (3), (4), описывающих математическую модель процесса распространения света в волноводе в виде волнового уравнения (1), дает возможность определить напряженность электрического поля $E_y(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШИРИНЫ СЛОЕВ ВОЛНОВОДА

Для реализации эффекта брэгговских отражений необходимо правильно рассчитать ширину слоев двухслойной периодической среды, от которой происходит отражение света. При нормальном его падении с длиной волны λ на границу раздела максимально эффективное отражение будет иметь место, если оптический период

структуры равен $\lambda/2$, а оптическая толщина каждого слоя составит $\lambda/4$. В этом случае разность набегов фаз, отраженных от соседних слоев, равна нулю либо 2π .

Математическая запись условия максимального отражения имеет вид:

$$\beta_i \cdot d_i = \pi / 2,$$

где β_i — проекция волнового вектора в i -й среде на ось, перпендикулярную плоскости раздела слоев; d_i — толщина соответствующего слоя.

В условиях нормального падения

$$\beta_i = k_i = 2\pi / \lambda_i \quad [3].$$

В нашем примере направление распространения света (вдоль оси z) выбрано таким образом, что свет падает на поверхность раздела слоев под углом, который отличается от $\pi/2$. Допустим, угол падения на поверхность

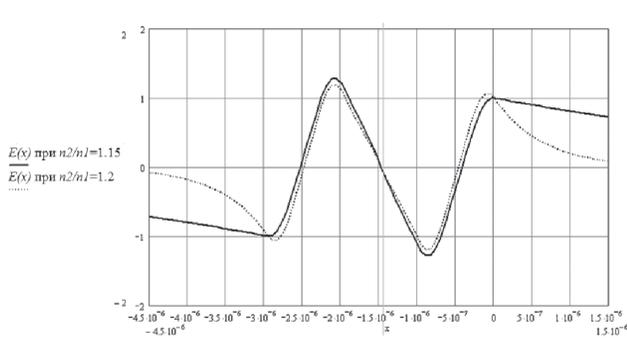


Рис. 4. График зависимости напряженности электрического поля
 $\lambda=1,31$ мкм, $N=5$;
 $n_1=1,44$ мкм; $\rho=1,31/4$ мкм.

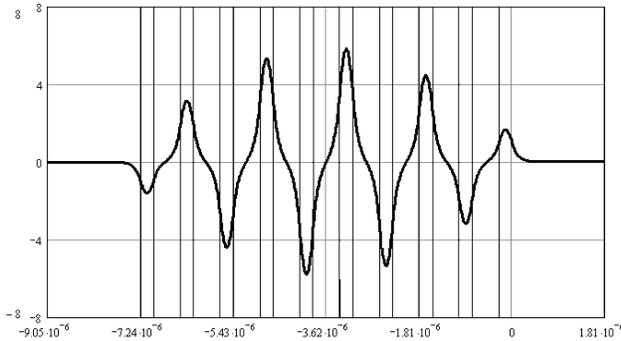


Рис. 5. График зависимости напряженности электрического поля
 $\lambda=1,31$ мкм, $N=10$,
 $\rho_1=5,17 \cdot 10^{-7}$, $\rho_2=2,58 \cdot 10^{-7}$,
 $n_1=1,44$ мкм, $n_2/n_1=2$, $K_2=0,44$.

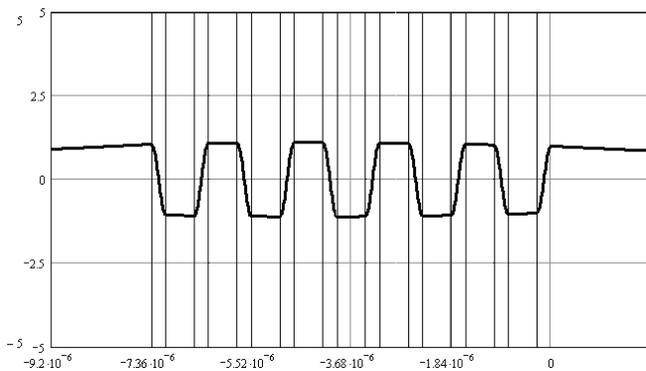


Рис. 6. График зависимости напряженности электрического поля
 $\lambda=1,31$ мкм, $N=10$,
 $\rho_1=5,26 \cdot 10^{-7}$, $\rho_2=2,63 \cdot 10^{-7}$,
 $n_1=1,44$ мкм, $n_2/n_1=2$, $k_2=0,43281$.

более плотного слоя — α , тогда угол отражения ψ будет углом падения на менее плотный слой периодической среды (рис. 2). Отсюда ширина слоев этой среды должна отвечать следующим условиям:

$$\rho_1 n_1 \cos \psi = \lambda / 4,$$

$$\rho_2 n_2 \cos \alpha = \lambda / 4,$$

где $\rho_1 n_1$ и $\rho_2 n_2$ — соответственно толщина и коэффициент преломления менее плотного и более плотного слоев.

Это соотношение позволяет найти углы падения, при которых заданная длина волны будет интенсивно отражаться от поверхности. Интенсивность отражения

других длин волн не будет максимальной. Следует отметить, что на основании теории геометрической оптики [4] угол падения α из менее плотной среды с n_1 на более плотную с n_2 является также углом отражения от поверхности раздела этих сред. То же относится к углу падения ψ из среды более плотной с n_2 на менее плотную с n_1 . Он же служит углом отражения от поверхности этих сред. Используя известное соотношение между углами падения и отражения $\sin \psi = \sin \alpha / \Delta n$ [4], где $\Delta n = n_2 / n_1$, можно найти зависимость между косинусами этих углов ($\cos \psi = k_1, \cos \alpha = k_2$):

$$\sqrt{1 - k_1^2} = \sqrt{1 - k_2^2} / \Delta n;$$



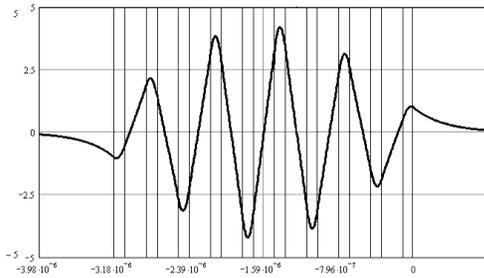


Рис. 7. График зависимости напряженности электрического поля $\lambda=1,31$ мкм, $N=10$, $\rho_1=2,27 \cdot 10^{-7}$, $\rho_2=1,14 \cdot 10^{-7}$, $n_1=1,44$ мкм, $n_2/n_1=2$, $k_2=1$.

$$k_1^2 = 1 - 1/\Delta n^2 + k_2^2 / \Delta n^2.$$

При $\Delta n \gg 1$ формула упрощается и $k_1 \approx \sqrt{1 - 1/\Delta n^2}$.

Таким образом, изменяя угол падения α и соответственно толщину слоев, можно влиять на напряженность электрического поля стоячей волны в сердцевине и оболочке многослойного планарного волновода.

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Конечным результатом решения рассмотренных вариантов является определение постоянной распространения β . Эта операция осуществляется путем решения системы уравнений и нахождения дисперсионного соотношения с помощью программы Mathcad.

На рис. 3 представлены результаты моделирования напряженности электрического поля в зависимости от разного числа плотных слоев в сердцевине волновода. Как следует из представленного графика, чем больше слоев, тем меньше энергии света уходит в оболочку волновода.

На рис. 4 изображены результаты моделирования напряженности электриче-

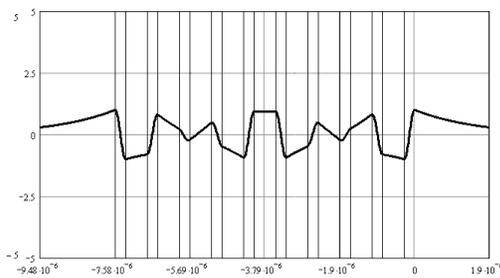


Рис. 8. График зависимости напряженности электрического поля $\lambda=1,31$ мкм, $N=10$, $\rho_1=5,42 \cdot 10^{-7}$, $\rho_2=2,71 \cdot 10^{-7}$, $n_1=1,44$ мкм, $n_2/n_1=2$, $k_2=0,42$.

ского поля в зависимости от относительной разности коэффициентов преломления слоев волновода. Как следует из представленного графика, чем больше разница коэффициентов преломления, тем резче граница между сердцевинной и оболочкой волновода.

С помощью соответствующего выбора угла падения α можно обеспечить как наилучшие условия распространения заданной длины волны через волновод с наибольшим затуханием в оболочке (рис. 5), так и максимальное отражение света от периодической среды волновода с наибольшей напряженностью поля в оболочке (рис. 6). Вид напряженности электрического поля также зависит от угла α и может быть в виде синусоидальной формы (рис. 7) или иметь более сложную форму, состоящую из нескольких синусоид (рис. 8). При выполнении условия полного внутреннего отражения в пределах каждого плотного слоя можно наблюдать распространение света, аналогичного для оптического волокна, состоящего из сердцевины и оболочки (рис. 9).

Наиболее важным результатом моделирования можно считать зависимость коэффициента отражения волновода, равного отношению энергии электрического поля в оболочке к энергии в сердцевине, от длины волны (рис. 10).

Как видно из рис. 10, при правильном выборе толщины слоев (с учетом углов отражения от их поверхности) наилучшие условия распространения имеют длины волн, кратные оптическим длинам распространения света в многослойном волноводе. С помощью названного коэффициента можно определить полосу света, имеющую максимальное отражение.

В целом же исследования поля волновода в поперечном сечении дают возможность найти оптимальные параметры (N, n_j) волновода для уменьшения потерь в оболочке.

В дальнейшем предполагается исследовать влияние на коэффициент отражения флуктуаций значений показателей преломления и размеров толщины слоев пе-

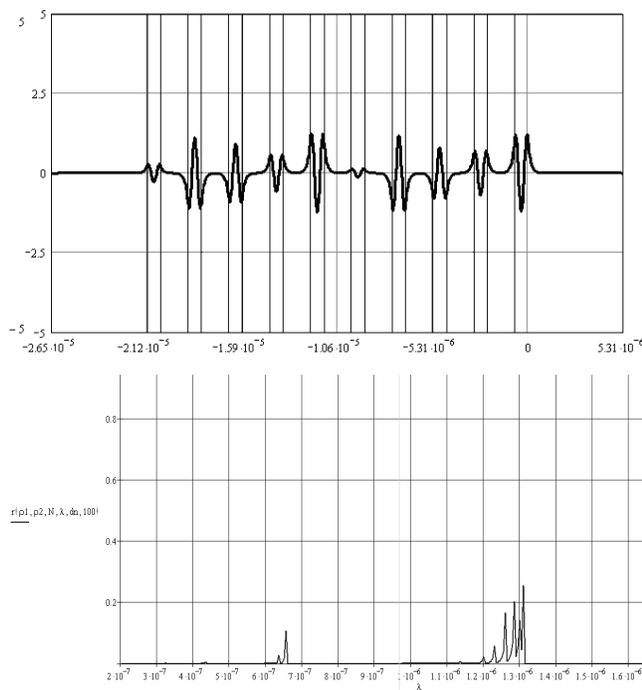


Рис. 9. График зависимости напряженности электрического поля $\lambda=1,31$ мкм, $N=10$, $\rho_1=1,57 \cdot 10^{-6}$, $\rho_2=7,58 \cdot 10^{-7}$, $n_1=1,44$ мкм, $n_2/n_1=2$, $k_2=0,15$.

Рис. 10. График зависимости коэффициента отражения $\lambda=1,31$ мкм, $N=10$, $n_1=1,44$ мкм, $n_2/n_1=2$, $k_2=0,4328$.

риодической структуры. На основании полученных данных можно оценить перспективы разрешающей способности технологий изготовления многослойных структур, являющихся элементной базой полупроводниковой техники. Это особенно важно, когда размеры структур менее 100 нм (низкоразмерные или квантовые структуры). Точность изготовления таких устройств значительно влияет на качество

работы электронных и оптоэлектронных приборов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. – М.: Радио и связь, 1987.
2. Дьяконов В. П. Mathcad в математике: Справочник М.: Горячая линия–Телеком, 2007.
3. Наний О. Е., Павлова Е. Г. Фотонно-кристаллические волокна//Lightwave Russian edition, 2004, № 3.
4. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Физматлит, 2006. ●

MATHEMATICAL SIMULATION OF PROPAGATION OF LIGHT

Zhuravleva, Lubov M. – Ph. D. (Tech), associate professor of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT).

Kruchinin, Alexander S. – Ph. D. student of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT).

Novozhilov, Alexander V. – Ph. D. student of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT).

The article refers to the upgrading of elementary components of optoelectronics. The authors use the theory of waveguides and mathematical simulation of wave processes in planar multilayer wave conductor to calculate the correlation between parameters of optical devices and the quality of their fabrication.

The propagation constant β is defined by solving of a set of equations and by finding a dispersion relation with the help of MathCad. The simulation proves that the reflection factor of wave conductor, which is equal to relation between the energy of electric field in the cladding and the energy in the core, depends on the wave length. The study on the field of a waveguide in a cross section permits to find optimum parameters (N , n_j) of a waveguide to reduce losses in the cladding. The results give the opportunity to assess the outlooks for resolving capacity of manufacturing technology for multilayer structures which are elementary components for semiconductor devices, especially for the structures less than 100 nm (low-dimensional and quantum structures).

Key words: optoelectronics, theory of waveguides, mathematical simulation, set of equations, optimum parameters, planar wave conductor.

Координаты авторов (contact information): Журавлева Л. М. – zhuravleva@mail.ru, Кручинин А. С. – amori07@mail.ru, Новожилов А. В. – sanyaaleks88@mail.ru.

