



Выбор осей координат при оценке колебаний вагона с несимметрично расположенным грузом



Пётр АНИСИМОВ

Peter S. ANISIMOV

Selection of Coordinate Axes for Evaluating Vibrations of the Car with Staggered Cargo

(текст статьи на англ. яз. – English text of the article – p. 21)

Предлагается метод выбора осей координат с использованием методики академика Г. К. Сулова при исследовании пространственных колебаний грузового вагона с тяжеловесным или негабаритным грузом. Рассмотрена система уравнений для определения главных центральных моментов инерции грузов различной массы в зависимости от продольных и поперечных смещений от осей симметрии вагона.

Ключевые слова: железная дорога, грузовой вагон, тяжеловесный твёрдый груз, оси координат, оси инерции, центральные моменты инерции, метод определения осей координат, система уравнений.

Анисимов Петр Степанович – доктор технических наук, профессор Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), Москва, Россия.

При несимметричном расположении в грузовом вагоне перевозимого тяжеловесного или негабаритного груза, то есть при несовпадении центра массы груза с центром массы вагона, оси координат необходимо выбирать не совпадающими с осями симметрии груза, а совпадающими с главными центральными осями инерции груза и вагона с целью повышения точности расчётов и более правильной оценки качественных и количественных характеристик динамических процессов грузового вагона при движении его по железнодорожному пути со случайными или детерминированными неровностями в вертикальной продольной и поперечной горизонтальной плоскостях. Продольная $A\xi$, поперечная $A\eta$, вертикальная $A\theta$ – главные центральные оси инерции груза (рис. 1) повернуты относительно осей симметрии груза на углы соответственно γ , χ , α . Следовательно, положение главных центральных осей инерции определяется направляющими косинусами этих углов, которые могут быть определены, например, по методике академика Г.К. Сулова [1].

Общая задача нахождения главных центральных осей инерции твёрдого груза в дан-

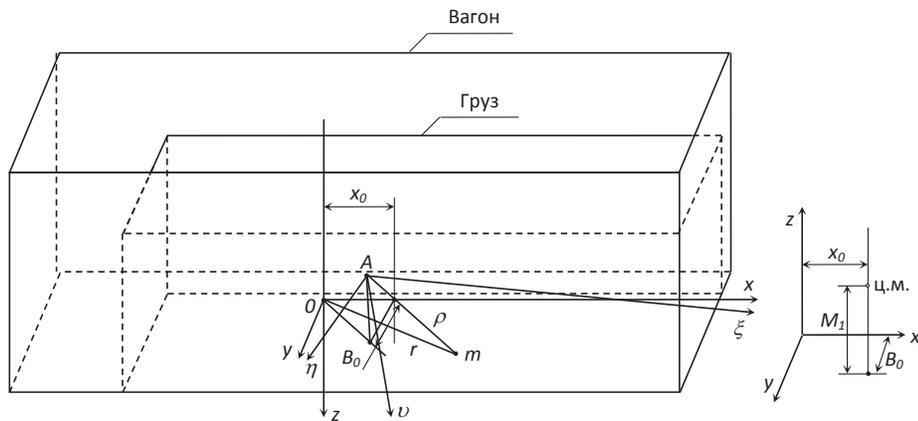


Рис. 1. Координатные оси при несимметричном размещении тяжеловесного груза: ξ, η – главные центральные оси инерции груза; x_0 – продольное смещение центра массы груза от поперечной оси симметрии вагона Oy ; B_0 – поперечное смещение центра массы груза от продольной оси симметрии вагона Ox .

ной его точке и определения главных центральных моментов инерции рассматривалась в общем виде в работе [2]. Направлениям главных центральных осей инерции соответствуют оси симметрии эллипсоида инерции, для которого:

$$\alpha^2 + \gamma^2 + \chi^2 = 1, \quad (1)$$

где α, γ, χ – косинусы углов между главными центральными осями инерции и исходными осями координат (оси симметрии груза).

Косинусы углов α, χ, γ сообщают экстремальное значение однородной квадратичной форме:

$$I = I_x \alpha^2 + I_y \gamma^2 + I_z \chi^2 - 2I_{xy} \alpha \chi - 2I_{yz} \chi \gamma - 2I_{zx} \gamma \alpha,$$

где I_x, I_y, I_z – осевые моменты инерции; I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} – центробежные моменты инерции.

В соответствии с методикой [2] для определения главных центральных моментов инерции твёрдого тела рассматривается система уравнений:

$$\begin{aligned} (I_x - I) \alpha - I_{xy} \chi - I_{zx} \gamma &= 0 \\ - I_{xy} \alpha + (I_y - I) \gamma - I_{yz} \chi &= 0 \\ - I_{zx} \alpha - I_{yz} \gamma + (I_z - I) \chi &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Эта система уравнений имеет отличное от нуля решение в том случае, если её определитель равен нулю. После раскрытия определителя

$$\begin{aligned} I_x - I - I_{xy} \chi - I_{zx} \gamma &= 0 \\ - I_{xy} \alpha + (I_y - I) \gamma - I_{yz} \chi &= 0 \\ - I_{zx} \alpha - I_{yz} \gamma + (I_z - I) \chi &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

получается алгебраическое уравнение третьей степени относительно I :

$$I^3 - \sigma_1 I^2 - \sigma_2 I - \sigma_3 = 0. \quad (4)$$

Корни этого уравнения являются главными центральными моментами

инерции тяжеловесного или негабаритного груза.

В определителе (3) инварианты тензора инерции равны:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= I_x + I_y + I_z; \\ \sigma_2 &= I_x I_y + I_y I_z + I_z I_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2; \\ \sigma_3 &= I_{xy} I_{yz} I_{zx} - I_x I_{xy} I_{yz} - I_y I_{yz} I_{zx} - I_z I_{zx} I_{xy}. \end{aligned}$$

Для определения углов $\alpha_i, \chi_i, \gamma_i$ в соответствии с методикой [2] используются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (I_x - I_i) \alpha_i - I_{xy} \chi_i - I_{zx} \gamma_i &= 0; \\ - I_{xy} \alpha_i + (I_y - I_i) \chi_i - I_{yz} \gamma_i &= 0; \\ - I_{zx} \alpha_i - I_{yz} \chi_i + (I_z - I_i) \gamma_i &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Поиску трёх неизвестных направляющих косинусов помогают уравнение (1) и два из трёх уравнений (5).

Направляющие косинусы углов α, χ, γ определяются из уравнений (5), задаваясь последовательно значениями $I = 1, 2, 3$.

Проведенные расчёты показали, что направляющие косинусы $\text{Cos} \chi_1, \text{Cos} \gamma_1, \text{Cos} \alpha_2, \text{Cos} \gamma_3, \text{Cos} \alpha_3, \text{Cos} \chi_3$ настолько малы при продольном и поперечном смещениях центра массы тяжеловесного груза соответственно до 4,0 м от поперечной оси симметрии вагона и 0,8 м от продольной оси симметрии, что их можно принимать практически равными нулю, а направляющие косинусы $\text{Cos} \alpha_1, \text{Cos} \chi_2, \text{Cos} \gamma_3$ необходимо учитывать при составлении дифференциальных уравнений, описывающих колебания вагона, так как их значения значительно больше, чем $\text{Cos} \chi_1, \text{Cos} \gamma_1, \text{Cos} \alpha_2, \text{Cos} \gamma_3, \text{Cos} \alpha_3, \text{Cos} \chi_3$.



Углы $\alpha_1, \chi_2, \gamma_3$ между координатными осями и главными центральными моментами инерции I_1, I_2 и I_3

Смещение центра массы груза, м	Масса груза, т	α_1 для I_1	χ_2 для I_2	γ_3 для I_3
$x_0 = 0,5; B_0 = 0,1$	10	0°13'	0°30'	0°18'
$x_0 = 0,5; B_0 = 0,8$	10	0°14'	2°08'	1°02'
$x_0 = 1,0; B_0 = 0,1$	10	2°23'	0°39'	0°24'
$x_0 = 1,0; B_0 = 0,8$	10	2°26'	3°02'	2°58'
$x_0 = 2,0; B_0 = 0,1$	10	2°49'	0°52'	0°29'
$x_0 = 2,0; B_0 = 0,8$	10	2°50'	4°20'	3°53'
$x_0 = 3,0; B_0 = 0,1$	10	4°12'	1°09'	0°38'
$x_0 = 3,0; B_0 = 0,8$	10	4°20'	5°37'	4°48'
$x_0 = 4,0; B_0 = 0,1$	10	5°20'	1°12'	0°55'
$x_0 = 4,0; B_0 = 0,8$	10	5°41'	7°02'	5°38'
$x_0 = 0,5; B_0 = 0,1$	70	0°41'	1°08'	0°29'
$x_0 = 0,5; B_0 = 0,8$	70	0°39'	5°47'	2°24'
$x_0 = 1,0; B_0 = 0,1$	70	7°38'	1°30'	1°20'
$x_0 = 1,0; B_0 = 0,8$	70	7°48'	8°58'	7°50'
$x_0 = 2,0; B_0 = 0,1$	70	7°55'	1°56'	4°42'
$x_0 = 2,0; B_0 = 0,8$	70	7°53'	11°26'	9°38'
$x_0 = 3,0; B_0 = 0,1$	70	11°20'	1°50'	6°16'
$x_0 = 3,0; B_0 = 0,8$	70	11°36'	13°55'	11°17'
$x_0 = 4,0; B_0 = 0,1$	70	15°18'	9°31'	6°30'
$x_0 = 4,0; B_0 = 0,8$	70	15°28'	15°38'	11°28'

При рассмотрении колебаний подпрыгивания, галопирования и боковой качки кузова вагона с несимметрично расположенным тяжеловесным или негабаритным грузом надо учитывать только $\cos \alpha_1$ и $\cos \chi_2$, а $\cos \gamma_3$ — лишь при рассмотрении пространственных колебаний вагона, то есть с учетом колебаний влияния и поперечного отбоя кузова.

Полученные расчётные значения углов $\alpha_1, \chi_2, \gamma_3$ приведены в таблице 1, из которой видно, что эти значения обязательно следует учитывать при продольных смещениях центра массы груза свыше 2,0 м от поперечной оси симметрии вагона и поперечных смещениях центра массы таких грузов свыше 0,4 м от продольной оси симметрии, а также при весе грузов свыше 30–40 т. При меньших величинах смещения центра массы тяжеловесных или негабаритных грузов от соответствующих осей симметрии вагона и меньшем их весе оси координат можно выбирать совпадающими с осями симметрии грузов без ущерба для точности расчётов и оценки качественных и количественных характеристик динамических процессов.

Для грузов массой 20, 30, 40, 50, 60 т значения углов $\alpha_1, \chi_2, \gamma_3$ находятся в диапазоне значений, приведенных в таблице 1, и изменяются примерно пропорционально величинам осевых и центробежных моментов инерции тяжеловесных грузов, с уменьшением которых значения углов уменьшаются. С увеличением поперечного смещения центра массы груза от продольной оси симметрии вагона увеличиваются углы χ_2 и γ_3 , а с увеличением продольного смещения центра массы от поперечной оси в основном увеличивается угол α_1 . На увеличение углов α_1, χ_2 и γ_3 особенно оказывают влияние продольное смещение центра массы груза свыше 3,0 м от поперечной оси симметрии вагона и поперечное смещение свыше 0,4 м от продольной оси.

Главные центральные моменты инерции I_η в тм² относительно главной центральной оси инерции η при продольном смещении x_0 центра массы тяжеловесного или негабаритного груза от поперечной оси симметрии вагона приведены в таблице 2.

Главные центральные моменты инерции I_ξ в тм² относительно главной цент-

Таблица 2

Главные центральные моменты инерции тяжеловесного или негабаритного груза при продольном смещении его центра массы

Масса груза, т	$x_0 = 0,5$ м	$x_0 = 1,0$ м	$x_0 = 2,0$ м	$x_0 = 2,5$ м	$x_0 = 3,0$ м	$x_0 = 4,0$ м
10	40,14	39,97	39,26	38,77	37,96	36,4
20	55,29	55,29	53,04	51,01	48,97	43,3
30	70,86	70,86	66,25	62,79	58,57	47,75
40	85,61	85,61	79,24	72,9	66,96	52,37
50	102,1	102,1	92,83	84,76	77,44	55,33
60	117,1	117,1	104,73	94,78	85,78	55,82
70	131,86	131,86	115,83	105,47	93,03	56,96

Таблица 3

Главные центральные моменты инерции тяжеловесного или негабаритного груза при поперечном смещении его центра массы

Масса груза, т	$B_0 = 0,1$ м	$B_0 = 0,3$ м	$B_0 = 0,5$ м	$B_0 = 0,6$ м	$B_0 = 0,7$ м	$B_0 = 0,8$ м
10	2,6	2,577	2,54	2,519	2,48	2,45
20	3,79	3,71	3,56	3,48	3,36	3,22
30	5,01	4,87	4,58	4,38	4,15	3,93
40	6,17	5,95	5,52	5,21	4,9	4,46
50	7,46	7,14	6,58	6,18	5,62	5,06
60	8,65	8,28	7,31	6,93	6,52	5,57
70	9,84	9,38	8,4	7,82	7,03	6,1

Таблица 4

Направляющие косинусов углов между осями координат

Оси координат	ξ	η	ϑ
x	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z	a_{31}	a_{32}	a_{33}

ральной оси инерции ξ при поперечном смещении B_0 центра массы тяжеловесного или негабаритного груза от продольной оси симметрии вагона иллюстрирует таблица 3.

Зависимость между координатами ξ , η , ϑ и x , y , z одной и той же точки по отношению к двум различным системам координатных осей определяется по методике академика Г. К. Сулова [1]. На рис. 1 указаны различные координатные оси и точка m , радиус вектора которой относительно осей Ox , Oy и Oz равен сумме радиусов точки m относительно осей $A\xi$, $A\eta$ и $A\vartheta$ и вектора r_A точки A . Вводя единичные векторы осей, получаем выражение:

$$x \cdot x_0 + y \cdot y_0 + z \cdot z_0 = z_A \cdot z_0 + y_A \cdot y_0 + x_A \cdot x_0 + \xi \cdot \xi_0 + \eta \cdot \eta_0 + \vartheta \cdot \vartheta_0.$$

Для облегчения математической записи согласно методике [1] используется таблица (в нашем случае под номером 4) направляющих косинусов углов между осями координат x , y , z и ξ , η , ϑ :

На основании таблицы получается следующая зависимость между координатными осями:

$$x = x_A + a_{11} \xi + a_{12} \eta + a_{13} \vartheta;$$

$$y = y_A + a_{21} \xi + a_{22} \eta + a_{23} \vartheta;$$

$$z = z_A + a_{31} \xi + a_{32} \eta + a_{33} \vartheta.$$

Эти зависимости дают возможность определить расстояние до точек опирания рамы вагона на рессорные комплекты.

Расположение главных центральных осей инерции можно рассмотреть на примере расчётной схемы четырёхосного грузового вагона с несимметрично расположенным центром массы тяжеловесного или негабаритного груза, движущегося по случайным вертикальным непрерывным неровностям железнодорожного пути, с учётом подпрыгивания, галопирования и боковой качки обрессоренной массы гружёного вагона (рис. 2). Учёт направляющих косинусов углов α и χ , например, в уравнениях для определения перемещений верхних опорных поверхностей упругих элементов рессорных комплектов $Z_1, Z_2,$



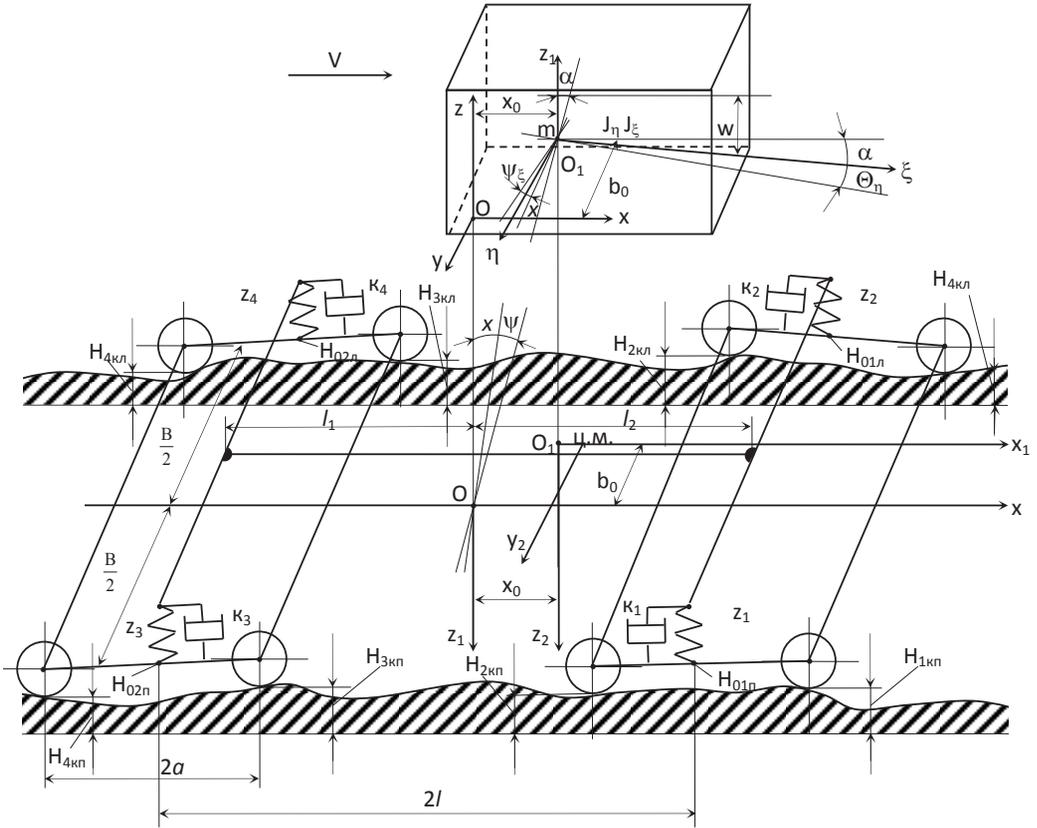


Рис. 2. Расчётная схема четырёхосного грузового вагона с несимметрично расположенным центром массы груза, движущегося по случайным неровностям железнодорожного пути; ξ и η – главные центральные оси инерции груза; α_r и α_η – направляющие косинусы между главными центральными осями инерции и осями симметрии груза; l_1 и l_2 – главные центральные моменты инерции груза; x_0 и B_0 – соответственно продольное и поперечное смещения центра массы груза от поперечной и продольной осей симметрии вагона; w – подпрыгивание груза с вагоном относительно главной центральной оси инерции; ξ , θ_1 – галопирование груза с вагоном относительно главной центральной оси инерции; η , ψ_ξ – боковая качка груза с вагоном относительно главной центральной оси инерции; ξ , H_{ij} – случайные перемещения i -х колёс j -й стороны вагона под воздействием случайных неровностей правой (η) и левой (ξ) рельсовых нитей; $H_{\alpha_{ij}}$ – перемещения нижних опорных поверхностей упругих элементов i -го рессорного комплекта тележки с j -й стороны вагона; j_i – жёсткость i -го рессорного комплекта вагона; k_i – относительный коэффициент сухого трения фрикционного гасителя колебаний рессорного комплекта; z_i – вертикальные перемещения верхних опорных поверхностей упругих элементов i -го рессорного комплекта вагона.

z_3 и z_4 при одновременном продольном и поперечном смещениях центра массы груза от поперечной оси симметрии вагона производится следующим образом:

$$z_3 = w - [(1 + x_0)\cos\alpha + (B/2 + B_0)\cos\chi]\theta_\eta + [(1 + x_0)\cos\alpha + (B/2 + B_0)\cos\chi]\psi_\xi;$$

$$z_4 = w - [(1 + x_0)\cos\alpha + (B/2 - B_0)\cos\chi]\theta_\xi - [(1 + x_0)\cos\alpha + (B/2 - B_0)\cos\chi]\psi_\xi.$$

$$z_1 = w + [(1 - x_0)\cos\alpha + (B/2 + B_0)\cos\chi]\theta_\eta + [(1 - x_0)\cos\alpha + (B/2 + B_0)\cos\chi]\psi_\xi;$$

$$z_2 = w + [(1 - x_0)\cos\alpha + (B/2 - B_0)\cos\chi]\theta_\eta - [(1 - x_0)\cos\alpha + (B/2 - B_0)\cos\chi]\psi_\xi;$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Суслов Г. К. Теоретическая механика. – М. – Л.: Гостехиздат, 1946. – 655 с.
2. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 824 с. ●

Координаты автора: **Анисимов П. С.** – +7(495) 6842210.
Статья поступила в редакцию 13.11.2014, принята к публикации 24.04.2015.

SELECTION OF COORDINATE AXES FOR EVALUATING VIBRATIONS OF THE CAR WITH STAGGERED CARGO

Anisimov, Peter S., Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russia.

ABSTRACT

A method of selecting coordinate axes is proposed for the study of spatial vibrations of a freight car with heavy or oversized cargo. The suggested method uses the technique of academician

Keywords: railway, freight car, heavy solid cargo, coordinate axes, inertia axes, central moments of inertia, method of coordinate axes determination, system of equations.

Background. In case of asymmetric arrangement of transported heavy or oversized cargo in the freight car, i.e. the center of mass of the cargo does not match with the center of mass of the car, it is necessary to choose coordinate axes, that coincide not with the axes of symmetry of the cargo, but with main central axes of inertia of the cargo and the car in order to increase the accuracy of calculations and to evaluate qualitative and quantitative characteristics of dynamic processes of the freight car while it is moving along a railway track with random or deterministic irregularities in the vertical longitudinal and transverse horizontal planes.

Objective. The objective of the author is to investigate a method of selecting the coordinate axes, based on the technique of academician G. K. Suslov in the study of spatial vibrations of a freight car with heavy or oversized cargo.

Methods. The author uses general scientific and engineering methods, mathematical calculation.

Results.

Longitudinal $A\xi$, transverse $A\eta$, vertical $A\vartheta$ are principal central axes of inertia of the cargo (Pic. 1), which are rotated relative to axes of symmetry of the cargo at angles, respectively γ , χ , α . Therefore, the position of main central axes of inertia is determined by directional cosines of these angles, which can be determined, for example, by the method of academician G. K. Suslov [1].

The overall objective of finding main central axes of inertia of the solid cargo in this point and of determining of main central moments of inertia was generally considered in [2]. Directions of main central axes of inertia correspond to the symmetry axes of the ellipsoid of inertia for which:

$$\alpha^2 + \gamma^2 + \chi^2 = 1, \quad (1)$$

where α , γ , χ are cosines of angles between main central axes of inertia and original coordinate axes (axes of symmetry of the cargo).

Cosines of angles α , χ , γ set an extreme value to a homogeneous quadratic form:

G. K. Suslov. The system of equations is considered for determining main central moments of inertia of cargo of different weight depending on longitudinal and transverse displacements from axes of car's symmetry.

$I = I_x \alpha^2 + I_y \chi^2 + I_z \gamma^2 - 2I_{xy} \alpha \chi - 2I_{yz} \chi \gamma - 2I_{zx} \gamma \alpha$, where I_x, I_y, I_z are axial moments of inertia; I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} are centrifugal moments of inertia.

In accordance with the procedure [2] to determine main central moments of inertia of a solid body a system of equations is considered:

$$\begin{aligned} (I_x - I) \alpha - I_{xy} \chi - I_{zx} \gamma &= 0 \\ - I_{xy} \alpha + (I_y - I) \chi - I_{yz} \gamma &= 0 \\ - I_{yz} \alpha - I_{yz} \chi + (I_z - I) \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

This system of equations has a nonzero solution if the determinant is zero. After the disclosure of the determinant

$$\begin{aligned} I_x - I - I_{xy} - I_{zx} \\ - I_{xy} I_y - I_{yz} = 0 \\ - I_{zx} - I_{yz} I_z - I \end{aligned} \quad (3)$$

we obtain an algebraic equation of the third degree in relation to I :

$$I^3 - \sigma_1 I^2 - \sigma_2 I - \sigma_3 = 0. \quad (4)$$

The roots of this equation are main central moments of inertia of heavy or oversized cargo.

In the determinant (3) the inertia tensor invariants are:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= I_x + I_y + I_z; \\ \sigma_2 &= I_x I_y + I_y I_z + I_z I_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2; \\ \sigma_3 &= I_x I_y I_z - I_{xy} I_{yz} - I_{yz} I_{zx} - I_{zx} I_{xy}. \end{aligned}$$

To determine the angles α, χ, γ in accordance with the method [2] the following equations are used:

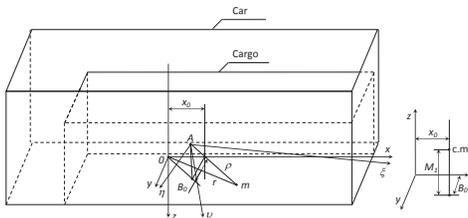
$$\begin{aligned} (I_x - I) \alpha - I_{xy} \chi - I_{zx} \gamma &= 0; \\ - I_{xy} \alpha + (I_y - I) \chi - I_{yz} \gamma &= 0; \\ - I_{yz} \alpha - I_{yz} \chi + (I_z - I) \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

To determine three unknown directional cosines the equation (1) is used, as well as two of three equations (5).

Directions of cosines of angles α , χ and γ are determined from the equations (5), they are set sequentially by values $l = 1, 2, 3$.

Performed calculations have shown that directions of cosines $\text{Cos } \chi_{11}, \text{Cos } \gamma_{11}, \text{Cos } \alpha_{22}, \text{Cos } \gamma_{33}, \text{Cos } \alpha_{33}, \text{Cos } \chi_{33}$ are so small at longitudinal and transverse displacements of the center of mass of heavy cargo, respectively, to 4,0 m from the transverse axis of symmetry of the car and to 0,8 m from the longitudinal axis of symmetry, that they can be assumed to be equal to almost zero, and directions of cosines $\text{Cos } \alpha_{11}, \text{Cos } \chi_{22}, \text{Cos } \gamma_{33}$ should be taken into account in building differential equations describing oscillations of the car, as their value are much more than $\text{Cos } \chi_{11}, \text{Cos } \gamma_{11}, \text{Cos } \alpha_{22}, \text{Cos } \gamma_{33}, \text{Cos } \alpha_{33}, \text{Cos } \chi_{33}$.

When considering vibrations of bouncing, pitching and rolling of the car body with staggered heavy or oversized cargo, it is necessary to take into account only $\text{Cos } \alpha_{11}$ and $\text{Cos } \chi_{22}$, while $\text{Cos } \gamma_{33}$ should be considered only when considering spatial oscillations of the car, that is, taking into account fluctuations of wobbling and transverse drift of the body.



Pic. 1. Coordinate axes at asymmetric placement of heavy cargo: ξ, η – main central axes of cargo inertia; x_0 – longitudinal displacement of the center of mass of the cargo from transverse axis of symmetry of the car Oy ; B_0 – transverse displacement of the center of mass of the cargo from the longitudinal axis of symmetry of the car Ox .



Table 1

The angles $\alpha_1, \chi_2, \gamma_3$ between coordinate axes and main central moments of inertia I_1, I_2 and I_3

Displacement of cargo's center of mass, m	Cargo weight, t	α_1 for I_1	χ_2 for I_2	γ_3 for I_3
$x_0 = 0,5; B_0 = 0,1$	10	0°13'	0°30'	0°18'
$x_0 = 0,5; B_0 = 0,8$	10	0°14'	2°08'	1°02'
$x_0 = 1,0; B_0 = 0,1$	10	2°23'	0°39'	0°24'
$x_0 = 1,0; B_0 = 0,8$	10	2°26'	3°02'	2°58'
$x_0 = 2,0; B_0 = 0,1$	10	2°49'	0°52'	0°29'
$x_0 = 2,0; B_0 = 0,8$	10	2°50'	4°20'	3°53'
$x_0 = 3,0; B_0 = 0,1$	10	4°12'	1°09'	0°38'
$x_0 = 3,0; B_0 = 0,8$	10	4°20'	5°37'	4°48'
$x_0 = 4,0; B_0 = 0,1$	10	5°20'	1°12'	0°55'
$x_0 = 4,0; B_0 = 0,8$	10	5°41'	7°02'	5°38'
$x_0 = 0,5; B_0 = 0,1$	70	0°41'	1°08'	0°29'
$x_0 = 0,5; B_0 = 0,8$	70	0°39'	5°47'	2°24'
$x_0 = 1,0; B_0 = 0,1$	70	7°38'	1°30'	1°20'
$x_0 = 1,0; B_0 = 0,8$	70	7°48'	8°58'	7°50'
$x_0 = 2,0; B_0 = 0,1$	70	7°55'	1°56'	4°42'
$x_0 = 2,0; B_0 = 0,8$	70	7°53'	11°26'	9°38'
$x_0 = 3,0; B_0 = 0,1$	70	11°20'	1°50'	6°16'
$x_0 = 3,0; B_0 = 0,8$	70	11°36'	13°55'	11°17'
$x_0 = 4,0; B_0 = 0,1$	70	15°18'	9°31'	6°30'
$x_0 = 4,0; B_0 = 0,8$	70	15°28'	15°38'	11°28'

Table 2

Main central moments of inertia of heavy or oversized cargo at the longitudinal displacement of the center of mass

Cargo weight, t	$x_0 = 0,5$ m	$x_0 = 1,0$ m	$x_0 = 2,0$ m	$x_0 = 2,5$ m	$x_0 = 3,0$ m	$x_0 = 4,0$ m
10	40,14	39,97	39,26	38,77	37,96	36,4
20	55,29	55,29	53,04	51,01	48,97	43,3
30	70,86	70,86	66,25	62,79	58,57	47,75
40	85,61	85,61	79,24	72,9	66,96	52,37
50	102,1	102,1	92,83	84,76	77,44	55,33
60	117,1	117,1	104,73	94,78	85,78	55,82
70	131,86	131,86	115,83	105,47	93,03	56,96

Table 3

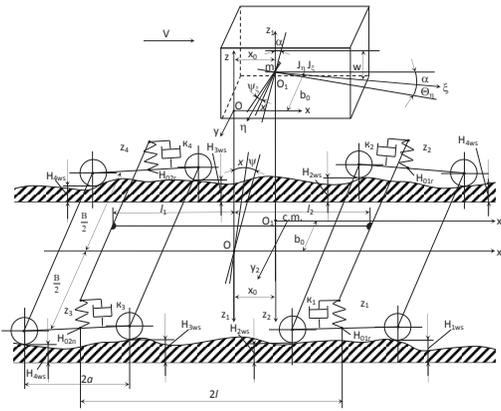
The main central moments of inertia of heavy or oversized cargo at the transverse displacement of its center of mass

Cargo weight, t	$B_0 = 0,1$ m	$B_0 = 0,3$ m	$B_0 = 0,5$ m	$B_0 = 0,6$ m	$B_0 = 0,7$ m	$B_0 = 0,8$ m
10	2,6	2,577	2,54	2,519	2,48	2,45
20	3,79	3,71	3,56	3,48	3,36	3,22
30	5,01	4,87	4,58	4,38	4,15	3,93
40	6,17	5,95	5,52	5,21	4,9	4,46
50	7,46	7,14	6,58	6,18	5,62	5,06
60	8,65	8,28	7,31	6,93	6,52	5,57
70	9,84	9,38	8,4	7,82	7,03	6,1

These calculated values of the angles $\alpha_1, \chi_2, \gamma_3$ are given in Table 1, which shows that these values are required to be taken into account at longitudinal displacement of the center of mass of cargo by more than 2,0 m from the transverse axis of symmetry of the car and at transverse displacement of the center of mass of such goods by more than 0,4 m from the longitudinal axis of symmetry, and with cargo weight of over 30-40 tons. At lower values of dis-

placement of the center of mass of heavy or oversized loads from respective axes of symmetry of the car and less weight coordinate axes can be selected as coinciding with the axes of symmetry of cargo without sacrificing accuracy of calculation and evaluation of qualitative and quantitative characteristics of dynamic processes.

For loads with weight of 20, 30, 40, 50, 60 t the values of angles $\alpha_1, \chi_2, \gamma_3$ are in the range of values



Pic. 2. The analytical model for a four-axle freight cars with asymmetrical cargo's center of mass moving along random irregularities of the railway track: ξ_m and η_m are main central axes of inertia of the cargo; α_m and γ_m are directional cosines between main central axes of inertia and axes of symmetry of the cargo; I_x and I_y are main central moments of inertia of the load; x_0 and B_x are respectively longitudinal and transverse displacement of the center of mass of the load from transverse and longitudinal axes of symmetry of the car; w – bouncing of cargo with the car relative to the main central axis of inertia of the load; ξ_j, θ_j – pitching of cargo with the car relative to the main central axis of inertia; ξ_j, θ_j – rolling of cargo with the car relative to the main central axis of inertia; H_i – random movement of the i -th wheels of j -th side of the car under the influence of random irregularities of right (r) and left (l) rails; $H_{o,i,j}$ – displacement of the lower bearing surfaces of the elastic elements of i -th spring group of the bogie of the j -th side of the car; s_i – stiffness of the the i -th spring group of the car; κ_i – the relative dry friction coefficient of friction damper of the spring group; z_i – vertical movement of the upper bearing surfaces of the elastic elements of i -th spring group of the car.

given in Table 1, and the values vary approximately in proportion to centrifugal and axial moments of inertia of heavy loads, with a decrease of which the values of angles decrease. With increasing transverse displacement of the cargo's center of mass from the longitudinal axis of symmetry of the car increase angles χ_2 and γ_3 , and with increasing longitudinal displacement of the center of mass from the lateral axis substantially increases the angle α_1 . The increase in the angles α_1, χ_2 and γ_3 is particularly affected by longitudinal displacement of the cargo's center of mass by over 3,0 m from the transverse axis of symmetry of the car and the transverse displacement by more than 0,4 meters from the longitudinal axis.

Main central moments of inertia I_{η} in tms^2 relative to the main central axis of inertia η at the longitudinal displacement of x_0 center of mass of heavy or oversized cargo from the transverse axis of symmetry of the car are shown in Table 2.

The main central moments of inertia I_{ξ} in tms^2 relative to the main central axis of inertia ξ at the transverse displacement of B_0 the center of mass of heavy or oversized cargo from the longitudinal axis of symmetry of the car are illustrated in Table 3.

The relationship between the coordinates ξ, η, ϑ and x, y, z of the same point with respect to two different systems of coordinate axes is determined by the method of academician G. K. Suslov [1]. Pic. 1 shows different coordinate axes and the point m , the radius vector of which with respect to the axes Ox, Oy and Oz is the sum of radii of the point m with respect to the axes $A\xi, A\eta$ and $A\vartheta$ and the vector r_A of the point A . Introducing the unit vectors of the axes, we obtain the expression: $x \cdot x_0 + y \cdot y_0 + z \cdot z_0 = z_A \cdot z_0 + y_A \cdot y_0 + x_A \cdot x_0 + \xi \cdot \xi_0 + \eta \cdot \eta_0 + \vartheta \cdot \vartheta_0$.

To facilitate the mathematical notation according to [1], a table is used (in this case number 4) with the directions of cosines of the angles between coordinate axes x, y, z and ξ, η, ϑ :

On the basis of the table we obtain the following dependence between the coordinate axes:

$$\begin{aligned} x &= x_A + a_{11} \xi + a_{12} \eta + a_{13} \vartheta; \\ y &= y_A + a_{21} \xi + a_{22} \eta + a_{23} \vartheta; \\ z &= z_A + a_{31} \xi + a_{32} \eta + a_{33} \vartheta. \end{aligned}$$

Table 4

The directional lines of cosines of the angles between the axes of coordinates

Coordinate axes	ξ	η	ϑ
x	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Conclusions. Obtained dependencies enable us to determine the distance to the points where the car frame rest on spring groups.

The location of main central axes of inertia can be considered with an example design scheme for a four axes freight car with asymmetrical center of mass of heavy or oversized cargo moving along random vertical continuous irregularities of the railway track, taking into account bouncing, pitching and rolling of spring-suspended weight of a laden car (Pic. 2). The accounting of directional lines of cosines of angles α and χ , for example, in the equations to determine the movement of the upper bearing surfaces of the elastic elements of spring groups z_1, z_2, z_3 and z_4 while longitudinal and transverse displacements of the cargo's center of mass from the transverse axis of symmetry of the car is conducted as follows:

$$\begin{aligned} z_1 &= w + [(1 - x_0) \cos \alpha + (B/2 + B_0) \cos \chi] \theta_{\eta_1} + [(1 - x_0) \cos \alpha + (B/2 + B_0) \cos \chi] \psi_{\xi}; \\ z_2 &= w + [(1 - x_0) \cos \alpha + (B/2 - B_0) \cos \chi] \theta_{\eta_1} - [(1 - x_0) \cos \alpha + (B/2 - B_0) \cos \chi] \psi_{\xi}; \\ z_3 &= w - [(1 + x_0) \cos \alpha + (B/2 + B_0) \cos \chi] \theta_{\eta_1} + [(1 + x_0) \cos \alpha + (B/2 + B_0) \cos \chi] \psi_{\xi}; \\ z_4 &= w - [(1 + x_0) \cos \alpha + (B/2 - B_0) \cos \chi] \theta_{\eta_1} - [(1 + x_0) \cos \alpha + (B/2 - B_0) \cos \chi] \psi_{\xi}. \end{aligned}$$

REFERENCES

- Suslov, G. K. Theoretical Mechanics [Teoreticheskaja mehanika]. Moscow-Leningrad, Gostekhizdat publ., 1946, 655 p.
- Lurie, A. I. Analytical Mechanics [Analiticheskaja mehanika]. Moscow, GIFML publ., 1961, 824 p.

Information about the author:

Anisimov, Peter S. – D.Sc. (Eng.), professor of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russia, +7(495) 6842210.

Article received 13.11.2014, accepted 24.04.2015.

