УДК 629.463.62

Модель пространственных колебаний платформы с длинномерным грузом

Петр АНИСИМОВ

Petr S.ANISIMOV

Анисимов Пётр Степанович *– доктор технических наук, профессор Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), Москва, Россия.*

Разработана математическая модель для исследования пространственных колебаний вагона-платформы с длинномерным грузом (концы груза выходят за пределы лобовых брусьев рамы вагона более чем на 400 мм), опирающимся на две упруго-диссипативные опоры, при движении по прямым и кривым железнодорожного пути со стыковыми и гармоническими неровностями в вертикальной и горизонтальной плоскостях. В ходе определения фундаментальной функции при изгибе длинномерного груза использовано дифференциальное уравнение свободных колебаний стержня постоянного поперечного сечения по его длине на упругом основании. Для составления дифференциальных уравнений, описывающих пространственные колебания механической системы, применялось уравнение Лагранжа второго рода. Получена система из 20 уравнений. Железнодорожный путь принят жёстким в вертикальной плоскости и упругим в горизонтальной плоскости.

Ключевые слова: железная дорога, вагон-платформа, упругий длинномерный груз, упруго-диссипативные опоры, фундаментальная функция, пространственные колебания, прямые и кривые железнодорожного пути с неровностями, математическая модель, дифференциальные уравнения.

К длинномерным относятся грузы, концы которых выходят за пределы торцовых брусьев рамы вагона-платформы более чем на 400 мм [1]. При этом используются, как правило, две упругие опоры, а свободные концы (консоли) нависают над полом двух вагонов-платформ прикрытия. Длинномерные грузы можно перевозить также, применяя специальные сложные устройства (турникеты), обеспечивающие свободное и безопасное движение сцепа вагонов-платформ по прямым и кривым участкам железнодорожного пути и через горб сортировочной горки. Однако подобный вариант крайне редок на практике, он касается только очень длинных грузов.

Поэтому математическую модель следует разработать прежде всего для груза разной массы и длины, размещаемого на две упругие опоры одного вагона-платформы.

I.

С целью моделирования составлена показанная на рис.1 расчётная схема, на которой обозначены: $m_р$ – масса упругой в вертикальной плоскости рамы вагона-платформы, $m_{гр.}$ – масса упругого длинномерного груза, $2l$ – база вагона-платформы,

$2l_1$ – база тележки, $L_р$ – длина рамы вагона-платформы, $L_{гр}$ – длина перевозимого длинномерного груза, 2b – расстояние между боковыми скользунами тележки, $2b_1$ – расстояние между центрами рессорных комплектов, $2b_2$ – расстояние между кругами катания колёс, h – высота центра массы рамы вагона-платформы от оси колёсной пары.

Механическая система «вагон-платформа-груз» состоит из 12 тел: упругий длинномерный груз, упругая рама вагона-платформы, две надрессорные балки, четыре боковые балки и четыре колёсные пары двух тележек. Особенностью расчётной схемы является учёт упругих свойств рамы вагона-платформы и длинномерного груза в вертикальной плоскости, который рассматривается как упругий стержень, лежащий на двух упруговязких опорах рамной конструкции.

При разработке математической модели приняты следующие допущения:

– зазоры в пятниковых узлах не учитываются, вследствие чего поступательные перемещения и галопирование рамы вагона-платформы и надрессорных балок тележек одинаковые;

– боковая качка боковых рам тележки отсутствует;

– виляние и поперечный относ боковых рам тележек и виляние надрессорных балок и колёсных пар тележек одинаковые вследствие пренебрежения продольными и поперечными горизонтальными перемещениями боковых рам и колёсных пар тележек;

– железнодорожный путь предполагается жёстким в вертикальной плоскости, в результате чего подпрыгивание и галопирование боковых рам тележки, а также подпрыгиваие и боковая качка колёсных пар определяются амплитудами вертикальных детерминированных неровностей пути;

– в горизонтальном поперечном направлении учитывается упругость железнодорожного пути, т. е. принимаются во внимание отжатия рельсовых нитей в точках контакта колёсных пар с рельсами;

– принимается во внимание геометрическая нелинейность поверхности катания колёс.

Изгибная жёсткость рамы вагона-платформы в вертикальной плоскости исходя

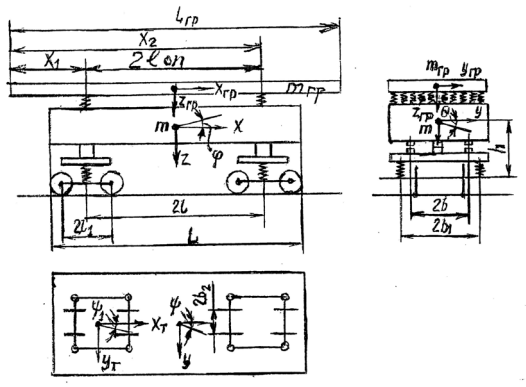

Рис. 1. Расчётная схема вагона-платформы с длинномерным грузом.

из принятого статического прогиба рамы $f_{ст.} = 8$ мм [2] определяется по формуле:

$$EJ = \frac{ql^2(12L - 21^2 - 3L^2)}{48 f_{ст}},$$

где q – равномерно распространённая нагрузка от длинномерного груза на раму вагона-платформы, $q = \frac{m_p + m_{гр}}{L} g$, $L_{гр}$ – длина груза.

При известной величине изгибной жёсткости рамы вагона-платформы статический прогиб рамы в соответствии с расчётными схемами (рис. 2) определяется по формуле:

$$F_{ст} = \frac{ql^2}{48EJ}(12Ll - 2l^2 - 3L^2).$$

Составление дифференциальных уравнений колебаний упругого груза базируется на методике, описанной в работах [3.4].

Упругие свойства длинномерного груза в вертикальной плоскости описываются только одной ординатой, поскольку рассматривается лишь одна форма колебаний груза как упругого стержня, лежащего на двух упруго-диссипативных (вязких) опорах. Предполагается, что масса и момент инерции длинномерного груза распределены по его длине равномерно. Для определения фундаментальной функции при изгибе груза в вертикальной плоскости использовано дифференциальное уравнение свободных колебаний стержня постоянного поперечного сечения по длине на упругом основании

$$EJ_{гр}\frac{\partial^4 w_{гр}}{\partial x^4}+k(x)w_{гр}+\bar{m}_{гр}\frac{\partial^2 w_{гр}}{\partial t^2}=0, \qquad (1)$$

где $EJ_{гр}$ – жёсткость груза на изгиб,

$\bar{m}_{гр}=\frac{m_{гр}}{L_{гр}}$ – распределённая масса, $L_{гр}$ – длина груза,

$W_{гр}$ (x, t) – прогиб груза в направлении оси z,

k (x) – жёсткость основания груза, в которой имеются два сосредоточенных включения

$$k(x)=2k_z[\sigma_1(x-x_1)+\sigma_1(x-x_2)], \qquad (2)$$

где $\sigma_1(x)$ – импульсная функция первого порядка,

k_z – жёсткость одной упругой опоры груза в вертикальной плоскости,

$x_1=\frac{L_{гр}-2l_{оп}}{2}$ – расстояние от левого конца груза до первой опоры,

$x_2=\frac{L_{гр}+2l_{оп}}{2}$ – расстояние от левого конца груза до второй опоры.

Решение уравнения (1) имеет вид

$$w_{гр}(x,t)=\sum_{k=0}^{3}x_k(x)q_k(t), \qquad (3)$$

где $x_к$ (x) – фундаментальная функция задачи,

q_k (t) – обобщённая координата.

Составлены три формы колебаний, из которых первые две – колебания груза как твёрдого тела (подпрыгивание и галопирование), а третья – колебания груза как упругого тела, т. е. определяется одна интересующая форма колебаний $x_{гр}$ (x) и одна обобщённая координата $q_{гр}$. Подставляя выражение (3) в уравнение (1), с учётом уравнения (2) получаем дифференциальное уравнение для определения фундаментальной функции и собственных чисел задачи:

$$EJ_{гр}X^{1v}_{гр}-\bar{m}_{гр}\gamma^2X_{гр}+2k_z[\sigma_1(x-x_1)+\sigma_1(x-x_2)]X_{гр}=0, \qquad (4)$$

где γ – собственная частота колебаний.

Решением этого уравнения является:

$$X_{гр}(x)=\sum_{r=0}^{3}X^{(r)}_{гр}(0)Y_r(x)-n_1[X_{гр}(x_1)Y_3(x-x_1)+X_{гр}(x_2)Y_3(x-x_2)], \qquad (5)$$

где Y_r (x) – функции А. Н. Крылова, $n_1=\frac{2k_z}{EJ_{гр}}$.

После исключения промежуточных параметров $X_{гр}$ (x) и использования граничных условий на левом конце груза $X^{11}_{гр}$ (0) = $X^{111}_{гр}$ (0) =0 получается уравнение

$$X_{гр}(x)=X_{гр}(0)\Phi_0(x)+X^{1}_{гр}(0)\Phi_1(x), \qquad (6)$$

где Φ_0 и Φ_1 – обобщённые функции А.Н Крылова:

$\Phi_{0,1}(x)=Y_r(x)-n_1\{Y_r(x)Y_3(x)+[Y_r(x_2)-n_1Y_3(x_2-x_1)Y_r(x)]Y_3(x-x_2)\}$.

Использование граничных условий на правом конце груза: $X_{гр}(L_{гр})=X^{111}_{гр}(L_{гр})$ =0 приводит к получению характеристического уравнения задачи

$$\Phi^{11}_0(L_{гр})\Phi^{111}_1(L_{гр})-\Phi^{11}_1(L_{гр})\Phi^{111}_0(L_{гр})=0 \qquad (7)$$

и уравнения фундаментальной функции

$$X_{гр}(x)=\Phi_0(x)-\frac{\Phi^{11}_{0гр}(L)}{\Phi^{11}_{1гр}(L)}\Phi_1(x), \qquad (8)$$

После решения уравнения (7) получаются собственные частоты колебаний упругого груза на двух упруго-вязких опорах.

2.

Для составления дифференциальных уравнений, описывающих колебания вагона-платформы с длинномерным грузом, использовано уравнение Лагранжа П рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{q_i}+\frac{\partial П}{q_i}=Q_i, \quad [3] \qquad (9)$$

где Т – кинетическая энергия системы «вагон-платформа-груз»,

П – потенциальная энергия системы «вагон-платформа-груз»,

q_i – обобщённая координата,

Q_i – обобщённая сила.

Кинетическая энергия колебаний вагона-платформы равна сумме кинетических энергий его тел:

$T_п=T_р+2T_н+4T_{бij}+4T_{кim}$, (i, j, m =1,2), где $T_р$ – кинетическая энергия рамы вагона-платформы,

$T_н$ – кинетическая энергия надрессорных балок тележек,

$T_б$ – кинетическая энергия боковых балок тележек,

$T_к$ – кинетическая энергия колёсных пар.

$$T_р = \frac{m_р}{2}(\dot{x}_р^2 + \dot{y}_р^2 + \dot{z}_р^2) + \frac{1}{2}(J_{xр}\dot{\theta}_р^2 + J_{yр}\dot{\phi}_р^2 + J_{zр}\dot{\psi}_р^2); \quad (10)$$

$$T_н = \frac{m_н}{2}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + \frac{1}{2}(J_{xн}\dot{\theta}_{ні}^2 + J_{yн}\dot{\phi}_{ні}^2 + J_{zн}\dot{\psi}_{ні}^2); \quad (11)$$

$$T_б = \frac{m_б}{2}(\dot{x}_б^2 + \dot{y}_б^2 + \dot{z}_б^2) + \frac{1}{2}(J_{xб}\dot{\theta}_б^2 + J_{yб}\dot{\phi}_б^2 + J_{zб}\dot{\psi}_б^2); \quad (12)$$

$$T_к = \frac{m_к}{2}(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2) + \frac{1}{2}(J_{xk}\dot{\theta}_k^2 + J_{yk}\dot{\phi}_k^2 + J_{zk}\dot{\psi}_k^2), \quad (13)$$

где $m_р$, $m_н$, $m_б$, $m_к$ – масса соответственно рамы вагона-платформы, надрессорной балки и боковой рамы тележки, колёсной пары,

J_{ix}, J_{iy}, J_{iz} – моменты инерции соответственно относительно осей x, y, z рамы вагона-платформы, надрессорной балки и боковой рамы тележки, колёсной пары.

$x, y, z, \theta, \phi, \psi$ – соответственно подёргивание, поперечный относ, подпрыгивание, боковая качка, галопирование, виляние.

Упругие свойства рамы вагона-платформы учитываются в кинетической энергии так же, как и упругие свойства длинномерного груза.

Кинетическая энергия упругого в вертикальной плоскости длинномерного груза определяется по формуле:

$$T_{гр} = \frac{m_{гр}}{2}(\dot{x}_{гр}^2 + \dot{y}_{гр}^2 + \dot{z}_{гр}^2) + \frac{1}{2}(J_{xгр}\dot{\theta}_{гр}^2 + J_{yгр}\dot{\phi}_{гр}^2 + J_{zгр}\dot{\psi}_{гр}^2) + \frac{1}{2}\bar{m}_{гр}\int_0^L (\frac{\partial w_{гр}}{dt})^2 dx, \quad (14)$$

где $m_{гр}$ – масса груза, $\bar{m}_{гр}$ – распределённая масса груза, $J_{xгр}$, $J_{yгр}$, $J_{zгр}$ – момент инерции груза относительно его осей соответственно x, y, z.

$$J_{xгр} = m_{гр}\frac{B_{гр}^2 + H_{гр}^2}{12}, \; J_{yгр} = m_{гр}\frac{H_{гр}^2 + L_{гр}^2}{12},$$

$$J_{zгр} = m_{гр}\frac{B_{гр}^2 + {}^{2}_{гр}}{12},$$

где $B_{гр}$, $H_{гр}$, $L_{гр}$ – соответственно ширина, высота и длина груза.

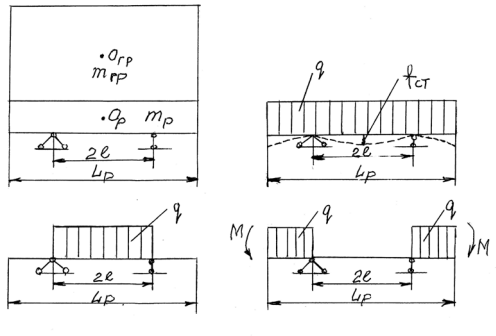

Рис. 2. Расчётные схемы рамы вагона-платформы для определения статического прогиба его рамы; $m_р$, $m_{гр}$ – масса соответственно рамы и длинномерного груза; q – равномерно распределённая вертикальная нагрузка; $f_{ст}$ – статический прогиб рамы; M – момент.

Результатом решения уравнения (1) является $W_{гр}(x, t) = \sum_{к=0}^{z} X_к(x) q_k(t)$,

$q_k(t)$ – обобщённые координаты: $q_{15} = z_{гр}$, $q_{16} = \phi_{гр}$, $q_{17} = \theta_{гр}$, $q_{18} = y_{гр}$, $q_{19} = \psi_{гр}$, $q_{20} = q_{гр}$.

Аналогично колебаниям упругого груза рассматриваются колебания рамы вагона-платформы как упругого тела Для этого необходимо решить характеристическое уравнение типа (7), заменив соответствующие параметры упругого груза на параметры рамы вагона-платформы и определив фундаментальную функцию X (x) – см. уравнение (8). После этого в формулы (9, 10) добавить слагаемое $T_{упр} = m_{гр}\int_0^L X^2(x)dx\dot{q}_{14}^2$, где q_{14} – обобщённая координата, L – длина рамы вагона-платформы.

В опорах для груза возникают упруговязкие силы:

$S_{zi} = k_z\Delta z_i + \beta_z\Delta\dot{z}_i$;

$S_{yi} = k_y\Delta y_i + \beta_y\Delta\dot{y}_i$

и момент $M_\theta = \frac{1}{6}k_z B_{оп}^2\Delta\theta$,

где k_z и k_y – жёсткость опор соответственно в вертикальной и поперечной горизонтальной плоскостях; β_z, β_y – коэффициенты вязкого трения в опорах в вертикальной и поперечной горизонтальной плоскостях; $B_{оп}$ – длина опоры в поперечном направлении; Δz, Δy – перемещение длинномерного груза относительно рамы вагона-платформы соответственно в вертикальном и поперечном горизонтальном направлениях.

Потенциальная энергия колеблющейся механической системы «вагон-платформа-длинномерный груз» с учётом упругих свойств рамы вагона-платформы и длинномерного груза находится по формуле:

$$\frac{EJ}{2}\int_0^{L} [X^{11}(x)]^2 dx q_{14}^2 + \frac{EJ_{гр}}{2}\int_0^{L_{гр}} [X^{11}(x)]^2 dx q^2,$$

где q_{14} и q_{20-} – обобщённые координаты:

$$q_{14} = \bar{m}_р \int_0^{L_{ср}} X^2(x)dx \; ; \; q_{20} = \bar{m}_{гр} \int_o^{L_{гр}} X_{гр}^2(x)dx \; .$$

Обобщённые силы Q_i определяются через действующие на надрессорные балки тележек силы S_{cij} в скользунах при боковой качке, силы $S_{цyij}$, $S_{цzij}$, $S_{цψiy}$, вызванные относительными перемещениями надрессорных балок и боковых рам тележек соответственно в поперечном горизонтальном и вертикальном направлениях, при вилянии; через моменты сил сухого трения $M_{ψ1}$ при вилянии рамы вагона-платформы относительно надрессорных балок тележек; момент $M_{θi}$ при боковой качке рамы вагона-платформы и через момент M_i при кромочном опирании пятника на подпятник тележки. Кроме того, учитываются силы взаимодействия между колёсами X_{imj} в вертикальном направлении и $У_{imj}$ в поперечном горизонтальном направлении, которые связаны с упругими перемещениями колёс по рельсам, а также действующие на колёсные пары силы $У^{1}_{imj}$ и на рельсы – силы $У^{11}_{imj}$, вызванные конусностью поверхности катания колёс.

Силы $S_{cij} = k_0 [(-1)^{j}Δc_{ij} - Δ_0] σ_0 [(-1)^{j}Δc_{ij} - Δ_0]$, (i, j=1,2), где $к_0$ – контактная жёсткость между скользунами вагона-платформы при их замыкании, $Δ_{cij}$ – расстояние между скользунами тележки, $Δ_0$ – первоначальный зазор между скользунами, $σ_0$ – единичная функция.

Силы, действующие при относительных перемещениях надрессорных балок и боковых рам тележек, равны: $S_{ц}y_{ij} = k_{цy}Δ_{ц}y_{ij} + F_{ц}y_{ij}$ Sign $Δ_{ц}\dot{y}_{ij}$,

$S_{цzij}=k_{цz}Δ_{ц}z_{ij} + F_{цzij}$ Sign $\dot{Δ}_{ц\ zij}$, $S_{ц}ψ_{ij} = k_{ц}ψΔ_{ц}ψ_{ij} + F_{ц}ψ_{ij}$Sign $\dot{Δ}_{ц}\dot{ψ}_{ij}$, (i, j =1.2)

где $k_{цs}$ (s=y, z, ψ) – жёсткость рессорного комплекта соответственно при изгибе, сжатии и скручивании,

$F_{цs}$ – амплитудные значения сил и момента сил сухого трения фрикционных клиновых гасителей колебаний,

$Δ_{цs}$ – перемещение надрессорных балок относительно боковых рам тележек соответственно в поперечном горизонтальном и вертикальном направлениях и при вилянии: $Δ_{ц}y_{ij} = y - (-1)^{i} lψ_i - hθ_i - y_{бi}$; $Δ_{ц}z_{ij} = z + (-1)^{i} lφ_i + (-1)^{j} b_1 θ_i - z_{бij} + w_{i;}$ $Δ_{ц}ψ_{ij} = ψ_i - ψ_{бi}$, (i, j =1,2).

Амплитудные значения $F_{ц}z_{ij}$ и $F_{ц}y_{ij}$ определяются с помощью коэффициентов относительного трения $φ_{oz}$ $φ_{oy}$ фрикционных клиновых гасителей колебаний соответственно в вертикальном и поперечном горизонтальном направлениях:

$$F_{uzij} = φ_{oz}\frac{m_p g}{4} + ΔP_{ij},\ F_{ц}y_{ij} = φ_{oy}\frac{m_p g}{4} + ΔP_{ij}.$$

$$M_{ψi} = M_{ψ}\,\text{Sign}\,Δ\dot{ψ}_i,\ M_{θi} = -\frac{m_p g}{2}h\,θ;$$

$$M_i = \frac{m_p g}{2}d_i,$$

где $ΔP_{ij}$ – усилие, вызванное грузом в случае смещения его центра массы относительно центра массы вагона-платформы вдоль и поперёк:

$$ΔP_{ij} = m_{гр}g\,\frac{[l-(-1)^{i}a_{гр}]}{2l}\frac{[в+(-1)^{j}в_{гр}]}{2в},$$

где $m_{гр}$ – масса груза; l – половина базы вагона-платформы; в-половина расстояния между рессорными комплектами одной тележки; $а_{гр}$ и $в_{гр}$ – смещение центра массы груза соответственно вдоль и поперёк от центра массы вагона-платформы; $M_{ψ}$ – амплитудное значение момента; $Δψ_i$ – перемещение рамы вагона-платформы относительно надрессорных балок тележек при вилянии; d_i – расстояние от кромки опирания пятника на подпятник до его центра при боковой качке рамы вагона-платформы, изменяющееся по линейному закону по мере увеличения боковой качки от нуля до максимального значения d/2 (d – диаметр подпятника). Между d_i и боковой качкой вагона-платформы $Δθ_i$ существует зависимость:

$$d_i = \frac{d}{2}\{\frac{|ΔΘ_i|}{Δ_1} + [1-\frac{|ΔΘ_i|}{Δ_1}]σ_0[|ΔΘ_i| - Δ_1]Sign\dot{Δ}\dot{Θ}_i\},$$

где $σ_0$ [$|Δθ_i|$-$Δ_1$] – единичная функция; $Δ_1$ – наклон пятника над подпятником при кромочном опирании вследствие боковой

качки рамы вагона-платформы.

Силы взаимодействия между колёсами и рельсами равны:

$X_{imj} = -F_{imj}\varepsilon_{ximj}$; $У_{imj} = -F_{imj}\varepsilon_{yimj}$.

Здесь F_{imj} – коэффициент крипа,

$$F_{imj} = \frac{f_{imj}}{\sqrt{1-h_{imj}^2\varepsilon_{imj}^2}}, \text{ при } h_{imj} = \frac{f_{imj}}{P_{imj}f_{тр}},$$

где f_{imj} – коэффициент, определяемый от вертикального статического давления $P_{ст}$ колеса на рельс, $P_{imj} = f_{imj} = 235P_{ст} - 2{,}4P^2_{ст} + 0{,}01P^3_{ст}$, $f_{тр}$ – коэффициент трения между колесом и рельсом, ε_{ximj} и ε_{yimj} – проскальзывание колёс по рельсам соответственно в продольном и поперечном горизонтальном направлениях:

$$\varepsilon_{ximj} = -[(-1)^j b\frac{\dot{\Psi}_{kim}}{V} + \frac{\Delta r_{imj}}{r}],\ \varepsilon_{yimj} = \frac{\dot{y}_{kim}}{V} - \psi_{kim}\ (i, m, j = 1,2). \qquad (15)$$

где Δr_{imj} – величина изменения радиуса круга катания колеса при его поперечном горизонтальном перемещении по рельсу:

$$\Delta r_{imj} = (-1)^j\mu_0 y_{imj} + \mu_1[(-1)^j y_{imj} - \Delta], \qquad (16)$$

где μ_0 – конусность поверхности катания колеса; $\mu_1 = 6 \cdot 10^4$ – коэффициент аппроксимации нелинейной части поверхности катания колеса; Δ – поперечный зазор в рельсовой колее между гребнем колеса и внутренней гранью головки рельса; y_{imj} – поперечное перемещение колеса по рельсу.

3.

После включения аналитических выражений кинетической и потенциальной энергий и обобщённых сил в уравнение (9) получается система из 20 дифференциальных уравнений, описывающих колебания механической системы «вагон-платформа-длинномерный груз» при движении по прямым участкам железнодорожного пути:

$$a_1\ddot{z} = -S_{uz11} - S_{uz12} - S_{uz21} - S_{uz22} + S_{z1} + S_{z2};$$

$$a_2\ddot{\phi} = -l(S_{uz21} + S_{uz22} - S_{uz11} - S_{uz12}) + l_{оп}(S_{z2} - S_{z1});$$

$$a_3\ddot{\Theta} + a_{34}\ddot{y} = h(S_{цy11} + S_{цy12} + S_{цy21} + S_{цy22}) - M_1 - M_2 - M_{\theta 1} - M_{\theta 2} + M_\theta - b(S_{c12} - S_{c11} + + S_{c22} - S_{c21});$$

$$a_4\ddot{y} + a_{34}\ddot{\Theta} = -S_{цy11} - S_{цy12} - S_{цy21} - S_{цy22} + S_{y1} + S_{y2};$$

$$a_5\ddot{\Psi} = l(S_{цy21} - S_{цy11} + S_{цy22} - S_{ц12}) - M_{\psi 1} - M_{\psi 2} - l_{оп}(S_{y2} - S_{y1});$$

$$a_6\ddot{y}_{бi} = S_{цy11} + S_{цy12} + \ddot{y}^1_{111} + \ddot{y}^1_{112} + \ddot{y}^1_{121} + \ddot{y}^1_{122};$$

$$a_7\ddot{y}_{б2} = S_{цy21} + S_{цy22} + \ddot{У}^1_{211} + \ddot{У}^1_{212} + \ddot{У}^1_{221} + \ddot{У}^1_{222};$$

$$a_8\ddot{\Psi}_1 = M_{\psi 1} + M_{ц\psi 1} + b_2(X_{111} - X_{112} + X_{121} - X_{122});$$

$$a_9\ddot{\Psi}_2 = M_{\psi 2} + M_{ц\psi 2} + b_2(X_{211} - X_{212} + X_{222});$$

$$a_{10}\ddot{\Psi}_{б1} = -M_{ц\psi 1} + l_1(\ddot{У}^1_{111} + \ddot{У}^1_{112} + \ddot{У}^1_{121} + \ddot{У}^1_{122});$$

$$a_{11}\ddot{\Psi}_{б2} = -M_{ц\psi 2} + l_1(\ddot{У}^1_{211} + \ddot{У}^1_{212} + \ddot{У}^1_{221} + \ddot{У}^1_{222});$$

$$a_{12}\ddot{\Theta}_1 = M_1 + b_1(S_{uz11} - S_{uz12}) + b(S_{c12} - S_{c11});$$

$$a_{13}\ddot{\Theta}_2 = M_2 + b_1(S_{uz21} - S_{uz22}) + b(S_{c22} - S_{c21});$$

$$a_{14}\ddot{q}_z = -EJ\int_0^L (X^{11})^2\,dx\,q_z + S_{z1}X(\frac{L}{2} + l_{оп}) + S_{z2}X(\frac{L}{2} - l_{оп}) - (S_{uz11} + S_{uz12})X(\frac{L}{2} + l) - (S_{uz21} + S_{uz22})X(\frac{L}{2} - l);$$

$$a_{15}\ddot{z}_{гр} = -S_{z1} - S_{z2};$$

$$a_{16}\ddot{\phi}_{гр} = -(l_{оп} + a_{гр})S_{z2} + (l_{оп} - a_{гр})S_{z1};$$

$$a_{17}\ddot{\Theta}_{гр} = h_{гр}(S_{y1} + S_{y2}) - M_\theta;$$

$$a_{18}\ddot{y}_{гр} = -S_{y1} - S_{y2;}$$

$$a_{19}\ddot{\Psi}_{гр} = (l_{оп} + a_{гр})S_{y2} - (l - a_{гр})S_{y1};$$

$$a_{20}\ddot{q}_{гр} = -EJ_{гр}\int_0^{L_{гр}} (X^{11}_{гр})^2 dx\,q_{гр} - S_{z1}X_{гр}(\frac{L_{гр}}{2} + l_{оп} - a_{гр}) - S_{z2}X_{гр}(\frac{L_{гр}}{2} - l_{оп} - a_{гр}).$$

Значения инерционных коэффициентов a_n, входящих в эту систему дифференциальных уравнений, определяются следующим образом:

$a_1 = m_р + 2m_{гр}$; $a_2 = J_y + 2m_{гр}h^2 + 2m_{гр}l^2 + 2J_{y1} + 4m_б h^2 + 4m_k h^2 + \frac{4J_{yk}}{r^2}h^2$;

$a_3 = J_x + 2m_{гр}h^2$; $a_4 = m_р + m_{гр}$; $a_5 = J_z + 2m_{гр}l^2$; $a_6 = a_7 = 2m_б + 2m_k$; $a_8 = a_9 = J_{z1} + 2J_{zk} + 2m_б b_1^2$; $a_{10} = a_{11} = 2J_{zб} + 2m_k l_1^2$; $a_{12} = a_{13} = J_{x1}$; $a_{34} = -2m_{гр}h$; $a_{14} = \bar{m}\int_0^L X^2(x)\,dx$; $a_{15} = a_{18} = m_{гр}$; $a_{16} = J_{угр}$; $a_{17} = J_{хгр}$; $a_{19} = J_{zгр}$; $a_{20} = \bar{m}_{гр}\int_0^{L_{гр}} X_{гр}^2(x)\,dx$.

После исключения динамической связи между третьей и четвёртой координатами системы дифференциальных уравнений (17) её можно записать в нормальной форме Коши: $A\ddot{q} = Q$, где A – диагональная матрица инерционных коэффициентов, $\ddot{q}$ – вектор обобщённых ускорений, Q – вектор обобщённых сил.

В полученные дифференциальные уравнения входят силы взаимодействия между

колёсами и рельсами, зависящие от перемещений колёс относительно рельсов в поперечном горизонтальном направлении y_{imj} и от поперечного отжатия рельсов y_{pimj}; $y_{imj} = y_{kim} - y_{pimj} - \eta_{rimj}$, (i, m, j = 1,2), где y_{kim} – боковой относ колёсных пар;

$y_{pimj} = -\frac{У^{11}_{imj}}{k_p}$, где $У^{11}_{imj}$ – силы, действующие на рельсы вследствие конусности поверхности катания колёс:

$У^{11}_{imj} = У_{imj} - (-1)^j P_{ст} (tg\alpha_{imj} - \mu_p)$, (i, m, j = 1,2).

Здесь $У_{imj}$ –сила взаимодействия, вызванная упругими перемещениями колёс относительно рельсов в поперечном горизонтальном направлении; $\mu_p = 0{,}05$ – подуклонка рельса; $к_p$ – жёсткость рельсовой нити в точке контакта колеса с рельсом; $tg\alpha_{imj}$ – тангенс угла наклона поверхности катания колеса к горизонтальной плоскости:

$tg\alpha_{imj} = (-1)^j + 3\ M_i\ [(-1)^j y_{imj} - \Delta]^2\ \sigma_o\ [(-1)^j y_{imj} - \Delta]$, (i, m, j = 1,2).

Для составления системы дифференциальных уравнений колебаний механической системы «вагон-платформа-длинномерный груз» при движении по кривым (круговым) железнодорожного пути в систему дифференциальных уравнений (17) необходимо ввести ряд дополнений. В правые части (17), описывающие боковой относ тел колеблющейся системы, следует добавитьобобщённыесилы $Q^k_y, Q^k_{гр}, Q^k_{убij}, Q^k_{ykim}$, соответствующие непогашенному поперечному ускорению $a^н_п = \ddot{y}_п - g Q^e_п$, где $y_п = \frac{\kappa}{2} (S - S_п)^2$ – координата бокового относа n-го тела механической системы в переносном движении, $\ddot{y}_п = kV^2$; $Q^e_п = \frac{1}{2b_2}$ $(h_{p1} - h_{p2})$ – координата боковой качки n-го тела системы в переносном движении; $к = \frac{1}{R}$ – кривизна пути радиусом R, h_{p1}; h_{p2} – возвышение правого или левого рельса в зависимости от направления кривой; $S = Vt$ – путь, пройденный по круговой кривой n-ым телом системы со скоростью V; S_n – запаздывание центров тяжести n-ых тел системы по отношению к первой колёсной паре: $S_{11} = 0$, $S_{12} = 2l_1$, $S_{21} = 2l$, $S_{22} = 2l + 2l_1$ – для колёсных пар, $S_1 = l_1$, $S_2 = 2l + l_1$ – для боковых рам и надрессорных балок тележек, $S_0 = l + l_1$ – для рамы вагона-платформы, $S_{гр} = l + l_1 - a_{гр}$ – для груза.

Указанные добавки к обобщённым силам будут: $Q^k_y = -m_р a^н_щ$; $Q^k_{гр} = -m_{гр} * * a^н_{гр}$; $Q^k_{убij} = -m_б a^н_i$; $Q^k_{ykim} = -m_k a^н_{im}$, (i, j =1,2), (i, m = 2).

Виляние n-ых тел системы в переносном движении определяется как $\Psi^e_n = к (S - S_n)$.

В формулах для взаимных перемещений тел колеблющейся системы при движении по прямым участкам пути вместо относительных координат необходимо подставить абсолютные координаты, равные сумме координат в относительном и переносном движениях: $q^a_п = q^e_п + q_{п..}$ В формуле (16) для определения изменения радиусов кругов катания колёс вместо Δ следует подставить $\Delta^к$ – имея в виду половину зазора в рельсовой колее на кривом участке пути.

При выявлении относительных проскальзываний колёс по формуле (16) нужно учесть выражение $\psi^e_n = k (S - S_n)$, вследствие чего получается:

$$\varepsilon^k_{ximj} = \varepsilon_{ximj} - (-1)^j b_2 \frac{\dot{\Psi}^2_{kim}}{V} = \varepsilon_{ximj} - (-1)^j b_2 k \varepsilon^k_{yimj} = \varepsilon_{yimj}.$$

В математической модели пространственных колебаний вагона-платформы с длинномерным грузом на прямых и кривых участках железнодорожного пути приняты следующие неровности железнодорожного пути:

а) стыковые: $\eta^{ст}_{bim1} = \eta^{ст}_{bim2} = \eta_{ob} \sin^4 [\frac{2\pi(x - S_{im})}{\lambda}]$;

б) вертикальные гармонические:

$$\eta_{bimj} = \eta_{oj} \sin [\frac{2\pi(x - S_{im})}{L_{ij}}];$$

в) горизонтальные гармонические:

$$\eta_{rim1} = \eta_{rim2} = \eta_{or} \sin [\frac{2\pi(x - S_{im})}{L_2}],$$

где η_{ob}, η_{oj}, η_{or} – амплитуды соответственно стыковой, вертикальной на каждой рельсовой нити и горизонтальной на каждой рель-

совой нити неровностей; λ – длина стыковой неровности пути; L_{lj}, L_2 – длина волн соответственно вертикальной на правой и левой рельсовых нитях и горизонтальной неровностей железнодорожного пути; S_{im} – транспортное запаздывание колёсных пар.

ЛИТЕРАТУРА

1.Технические условия погрузки и крепления грузов. – М.: Транспорт, 1990. – 408 с.

2. Нормы для расчёта и проектирования новых и модернизированных вагонов железных дорог МПС колеи 1520 мм (несамоходных) / ВНИИВ-ВНИИЖТ. – М. 1996. – 319 с.

3. Коротенко М. Л., Данович В. Д. Дифференциальные уравнения пространственных колебаний четырёхосного вагона с учётом конечной жёсткости кузова и инерционных свойств основания // Межвуз. сб. науч. трудов. – Днепропетровск: ДИИТ. 1973. – Вып. 199/25. – С. 3–13.

4. Лазарян В. А., Конашенко С. И. Обобщённые функции в задачах механики. – Киев: Наукова думка, 1974. – 194 с.

MODEL OF SPATIAL OSCILLATIONS OF A FLAT CAR WITH LONG GOODS

Anisimov, Petr S. *– D. Sc. (Tech), professor of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russia.*

The author has developed a mathematical model to study spatial oscillations of a tetra axial flat car with long goods (the ends of goods exceed limits of frontal bars of carriage underframe for more than 400 mm) leaned on two elastic dissipative supports of a flat car. At the same time the free ends (consoles) of a cargo overhang the floor of two cars. Thus the mechanical system «flat car – long goods' consists of 12 solids: long goods which are elastic in vertical plain, frame of a car which is also elastic in vertical plain, two over spring beams, four lateral beams and four wheel pairs of model 18–100 bogies.

There are some allowances that help to elaborate a mathematical model: gaps in pivot plate assemblies are not taken into consideration; lateral rolling motion of side frames of bogies is absent; wobbling, transversal drift of side frames of bogies, as well as wobbling of over spring beams and wheel pairs are equal; rail track is rigid in vertical plain and elastic in horizontal plain.

In order to define fundamental function of bending of long goods in vertical plain, the author used differential equation of free motion of a rod with constant cross-section along its length when it is placed on elastic foundation. Three forms of oscillation are composed. The first and the second forms refer to oscillations of long goods as of solids (bouncing and rocking), the third one refers to oscillations of load as of elastic body.

In order to compose differential equations, describing spatial oscillations of a flat car with long goods, moving along straight and curve track, the author used Lagrange equation. The elastic features of the bogie of a flat car as well as elastic features of long goods are provided for in kinetic energy. Describing the supports for long goods the author takes into consideration elastic and viscous forces and the moment. Generalized forces are defined through the forces in lateral bearers during side drifting that influence over spring beams of bogies and through the forces that result from relative travel of over spring beams and side frames of bogies, as well as through the moments of dry friction during wobbling of the frame of a flat car, through the moment of lateral rocking of the frame and through the moment of edge bearing of center plate on thrust bearing of a bogie. The author also has taken into consideration the forces of interaction between the wheels and the rails, caused by elastic motion of wheels along the rails, as well as the forces caused by conicity of the surface of wheel rolling.

The study resulted in a system of 20 equations which describe spatial oscillations of the mechanical system «flat car – long goods' at the moment when it moves along straight track and track curves (circular curves). While motion in curves is analyzed, the absolute coordinates are assumed, which are equal to the sum of coordinates in relative and translational motion, the uncompensated lateral accelerations been also considered. Mathematical model assumes clinch, vertical and horizontal harmonic irregularities accounting also for transportation lag of whhel pairs.

Key words: railway, flat car, elastic long goods, elastic dissipative supports, fundamental function, spatial oscillations, straight and curve track with irregularities, mathematical model, differential equations.

REFERENCES

1. Technical specifications of cargo loading and fastening [*Tehnicheskie usloviya pogruzki i krepleniya gruzov*]. Moscow, Transport publ., 1990, 408 p.

2. Standards for calculation and engineering of new and modernized non-self-propelled cars for 1520 mm gauge railways [*Normy dlya rascheta i proektirovaniya novyh i modernizirovannyh vagonov zheleznyh dorog MPS kolei 1520 mm (nesamohodnyh)*]. Moscow, VNIIV–VNIIZhT, 1996, 319 p.

3. Korotenko M. L., Danovich V. D. Differential equations of spatial oscillations of tetraaxial car with consideration of limit rigidity of the body and inertial features of basis [*Differentsial'nye uravneniya prostranstvennyh kolebaniy chetyrehosnogo vagona s uchetom konechnoy zhestkosti kuzova i inertsionnyh svoystv osnovaniya*]. In: Interuniversity collection of scientific works [Mezhvuz. sb. nauch. trudov]. Dnepropetrovsk, DIIT publ., 1973. Iss. 199/25, pp. 3–13.

4. Lazaryan V. A., Konashenko S. I. General functions in mechanical problems [*Obobschennye funktsii v zadachah mehaniki*]. Kiev, Naukova dumka, 1974, 194 p.

Координаты автора (contact information): Анисимов П. С. (Anisimov P. S.) – +7 (495) 684–2210.

Статья поступила в редакцию / article received 07.05.2013
Принята к публикации / article accepted 25.05.2013