



Основы расчета напряженного состояния земляного полотна



Юрий ЩЕВЬЕВ
Yuri L. SCHEVIEV

Андрей СИДРАКОВ
Andrey A. SIDRAKOV



По мнению специалистов, оценка полей напряжения в земляном подрельсовом полотне совершается с помощью расчетных формул, носящих преимущественно эмпирический характер. Это ограничивает возможности раскрыть в должной мере суть процессов распространения волн давления и их взаимодействия с грунтами при движении по рельсам грузового состава. Статья дает теоретическое описание исследуемых зависимостей и предлагает уравнения для численного решения задач, связанных с процессами в полях напряжений железнодорожной насыпи.

Ключевые слова: железная дорога, насыпь, подвижной состав, грунтовый массив, подрельсовое сечение, напряженное состояние земляного полотна, теоретические основы расчета.

Щевьев Юрий Леонидович — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Гидравлика и водоснабжение» Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), Москва, Россия.

Сидраков Андрей Александрович — кандидат технических наук, доцент, первый заместитель директора Института пути, строительства и сооружений Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), Москва, Россия.

Существующие сейчас формулы для определения поля напряжений, возникающих в земляном полотне под воздействием подвижной нагрузки, носят эмпирический характер. Экспериментальные напряжения в любой точке грунтового массива δ_z можно приблизительно оценить по формуле:

$$\delta_z = A_z \times B_z \times \delta_{z_0}, \quad (1)$$

где δ_{z_0} — вертикальное нормальное напряжение на основной площадке в подрельсовом сечении; A_z и B_z — функции, учитывающие изменение напряжений на глубине и в горизонтальном направлении.

Решение плоской задачи в теории линейно деформируемых тел [4] использует свою формулу определения сжимающих напряжений при моделировании нагрузки прямоугольником:

$$\delta = P / \pi (\beta_1 + 1/2 \sin 2\beta_1 - \beta_2 - 1/2 \sin 2\beta_2), \quad (2)$$

в которой — углы между линиями, проведенными из концов основной площадки к точке, где определяется напряжение, и вертикальными линиями из концов той же площадки.

Совершенно очевидно, что формулы (1,2), а также аналогичные зависимости,

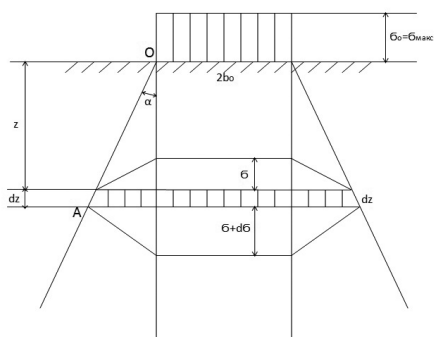


Рис. 1. Схема взаимодействия подвижного состава с земляным полотном.

предложенные в [1–3], не позволяют раскрыть сложные процессы распространения волн давления и их взаимодействия с грунтами полотна, знание которых помогает решать проектные задачи. Кроме того, значения вертикальных напряжений на откосах земляного полотна, вычисленные по формуле (2), будут на любой глубине отличны от нуля, что противоречит здравому смыслу.

Выберем модель взаимодействия подвижного состава с земляным полотном. В соответствии с [2, 4] примем, что эпюра давления от подвижного состава на основную площадку имеет форму прямоугольника (рис. 1).

Далее будем решать задачу для ниспадающей ветви напряжений, создаваемых прохождением подвижного состава (рис. 2), предполагая, что решение для восходящей линии $\delta(t)$ будет аналогичным.

Примем, что для любого горизонтального сечения, удаленного от основной площадки на расстояние Z , давление изменяется по времени в виде:

$$P(t) = P_{\max} \times (1 - t/\tau) \times e^{U/\tau}, \quad (3)$$

где t — время, прошедшее от достижения значения $\delta_{\max}$, до рассматриваемого момента, с;

τ — общая продолжительность воздействия колес от достижения $\delta_{\max}$ до окончания воздействия, с;

$P(t)$ и $P_{\max}$ — текущее значение давления и его максимальная величина, т/м².

В более простом виде выражение (3) можно записать как [6]:

$$P(t) = P_{\max} \times (1 - t/\tau) \times e^n, \quad (4)$$

где $n=2$.

Выведем уравнение распространения волны давления, выделив элемент dz и рас-

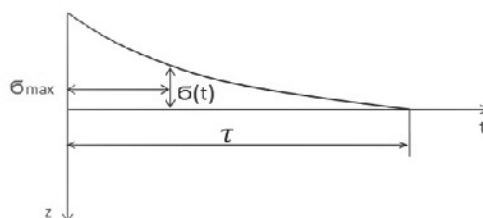


Рис. 2. График изменения $\delta(t)$ по времени.

смотрев условия его равновесия. На конической поверхности OA напряжения отсутствуют, т. е. $V=0$ и $\delta=0$.

Эпюры давлений на глубине z и $z+dz$ представляют собой сложные объемы, однако их можно схематизировать в виде усеченных призм высотой δ и $\delta+dz$ (см. рис. 1).

С учетом изложенного уравнение динамического равновесия для выделенного на рис. 1 элемента dz имеет вид:

$$dp = dY, \quad (5)$$

где dp — приращение давления на высоте dz ;

dY — приращение силы инерции массы на этом же участке.

Объем усеченного параллелепипеда эпюры напряжений:

$$p = \pi/3(b^2 + b_0^2 + bb_0) = F\delta. \quad (6)$$

Сила, действующая на элемент dz :

$$p = \delta * F, \quad (7)$$

а ее приращение составляет:

$$dp = \delta dF + Fd\delta. \quad (8)$$

Выражая напряжения через модуль упругости E и скорость переноса волны давления, имеем:

$$\delta = E du/dz dz$$

или

$$d\delta = E (d^2u)/(dz^2) dz,$$

$$F = F_0 z^2/(z_0^2), \quad dF = 2F_0 z/(z_0^2) dz. \quad (9)$$

Подставляя (8) в (6), получаем:

$$dp = F \cdot E (2/z \cdot du/dz + (d^2u)/(dz^2)) dz. \quad (10)$$

Это приращение давления уравновешивается приращением силы инерции массы выделенного элемента dz :

$$dY = F \cdot \rho \cdot dz (d^2u)/(dt^2). \quad (11)$$

Подставляем (10), (9) в (5) и имеем:





$$F \cdot E(2/z \cdot du/dz + (d^2u)/(dz^2))dz = \\ = F \cdot \rho \cdot dz (d^2u)/(dt^2). \quad (12)$$

После элементарных преобразований получим:

$$1/a^2 \cdot (d^2u)/(dt^2) = (d^2u)/(dz^2) + 2/z \cdot du/dz, \quad (13)$$

где $a = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения звука в грунте, м/с.

Уравнение (13) решается способом разделения переменных. Для этого представим общий интеграл в виде

$$u = M(z) \cdot N(t). \quad (14)$$

Дифференцируем по переменным z и t : $\partial u/\partial z = N \cdot (\partial M/\partial z)$,

$$(\partial^2 u)/(\partial z^2) = N (\partial^2 M)/(\partial z^2), \quad (15)$$

$$(\partial^2 u)/(\partial t^2) = M (\partial^2 N)/(\partial t^2).$$

Подставляем (15) в (14) и получаем:

$$M/a^2 (\partial^2 N)/(\partial t^2) = \\ = N (\partial^2 M)/(\partial z^2) + N \cdot (\partial M/\partial z).$$

После преобразований этого уравнения находим:

$$1/(a^2 N) (\partial^2 u)/(\partial t^2) = \\ = 1/(M) ((\partial^2 M)/(\partial z^2) + 2/z \partial M/\partial z).$$

С учетом равенства

$$1/(a^2 N) (\partial^2 u)/(\partial t^2) = \\ = 1/(M) ((\partial^2 M)/(\partial z^2) + 2/z \partial M/\partial z).$$

получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$(d^2 N)/(dt^2) + a^2 L^2 N = 0, \\ (d^2 M)/(dz^2) + 2/z \partial M/\partial z + L^2 M = 0 \quad (16)$$

Решение первого уравнения задается в виде

$$N(t) = C_1 \sin Lat + C_2 \cos Lat. \quad (17)$$

Для решения второго уравнения преобразуем его к виду

$$z (d^2 M)/(dz^2) + \partial M/\partial z + L^2 z M = 0.$$

Предположим, что

$$N(z) = z M(z), \quad (18)$$

тогда предыдущее уравнение можно представить так:

$$(d^2 N)/(dz^2) + L^2 N = 0. \quad (19)$$

Общий интеграл (19) известен:

$$Q(z) = C_3 \sin Lz + C_4 \cos Lz. \quad (20)$$

Общий интеграл уравнения движения (13) имеет вид:

$$u(z, t) = Q(z)/z N(t), \quad (21)$$

$$\text{где } N(t) = C_1 \sin Lat + C_2 \cos Lat, \quad (22)$$

$$Q(z) = C_3 \sin Lz + C_4 \cos Lz.$$

Подставляя (22) в (21), получаем:

$$u(z, t) = 1/z (C_3 \sin Lz + C_4 \cos Lz) \cdot \\ \cdot (C_1 \sin Lat + C_2 \cos Lat). \quad (23)$$

Выражая постоянные C_i через L $C_i = \bar{S}_i(L)$ и подставляя эти функции в (23), находим:

$$u(z, t) = \int_0^\infty 1/z (\bar{S}_3(L) \sin Lz + \bar{S}_4(L) \cos Lz) \cdot \\ \cdot (\bar{S}_1(L) \sin Lat + \bar{S}_2(L) \cos Lat) dz. \quad (24)$$

Заменим

$$L = \alpha/at, \quad \alpha = Lat, \quad (25)$$

и в этих обозначениях имеем:

$$\bar{S}_i(L) = 1/at \bar{S}_i(\alpha) = \bar{S}_i(\alpha).$$

Тогда:

$$dL = 1/at d\alpha. \quad (26)$$

Подставим (26) и (25) в выражение (24) и окончательно получим:

$$u(z, t) = \int_0^\infty 1/at z \bar{S}_3(\alpha) \sin az/at + \\ + \bar{S}_4(\alpha) \cos az/at \cdot \\ \cdot (\bar{S}_1(\alpha) \sin \alpha + \bar{S}_2(\alpha) \cos \alpha) dz. \quad (27)$$

Таким образом, распространение возмущения осуществляется и представляется сложным выражением, решить которое аналитическими методами невозможно. Поэтому обратимся к методам численного интегрирования.

Из уравнения динамического равновесия (4), соотношения (11) и выражения для полного дифференциала (8) получаем уравнение движения в виде:

$$(1/F\rho) \times (\partial p/\partial y) = (\partial^2 u)/(\partial t^2), \quad (28)$$

где $p = \delta F$; $\rho = (\gamma_{ep})/g$; γ_{ep} – объёмный вес грунта, принимаемый в расчетах постоянных с изменением глубины.

Второе уравнение движения найдем, используя соотношения:

$$\varepsilon = \partial u/\partial y, \quad V = \partial u/\partial t. \quad (29)$$

Далее следует:

$$\partial \varepsilon/\partial t = \partial V/\partial y. \quad (30)$$

Проведем следующие замены:

$$\varepsilon = \delta/E = \rho/FE, \quad \partial \varepsilon/\partial t = 1/FE \partial \rho/\partial t.$$

Уравнение (30) примет вид:

$$1/FE \partial \rho/\partial y = \partial V/\partial y.$$

Введем обозначение:
 $a = \sqrt{E/\rho}$.

Найдем второе уравнение движения:
 $\partial V/\partial y = 1/\rho a F \partial \rho/\partial t$. (31)

С учетом $\partial V/\partial t = (\partial^2 u)/(\partial t^2)$ получим систему уравнений распространения волны возмущения:

$$\partial V/\partial t = 1/\rho F \partial \rho/\partial y,$$
$$\partial V/\partial y = 1/(\rho F a^2) \partial \rho/\partial t, \quad (32)$$

которые решаются методом характеристик [5].

ВЫВОДЫ

Получено теоретическое описание распространения волны возмущения в железнодорожной насыпи от движения состава и предложены уравнения для численного решения уравнения движения этой волны. Однако в рамках данной

статьи невозможно представить расчеты и алгоритм численного решения поля напряжений, создаваемого в железнодорожной насыпи подвижным составом. Это своя отдельная тема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яковлев В. Ф. Исследование сил взаимодействия, деформаций и напряжений в зоне контакта железнодорожных колес и рельсов/ Автореф. дис... док. техн. наук. — М., 1964. — 377 с.
2. Вериго М. Ф. Вертикальные силы, действующие на путь при прохождении подвижного состава// Труды ЦНИИ МПС. Вып. 97. — М.: Трансжелдориздат, 1955. — С. 25–28.
3. Коган А. Я. Продольные силы в железнодорожном пути// Труды ЦНИИ МПС. Вып. 332. — М.: Транспорт, 1967. — 166 с.
4. Шахунянц Г. М. Железнодорожный путь. — Изд. 2-е. — М.: Транспорт, 1969. — 536 с.
5. Александров П. Б. Дифференциальные уравнения. — Изд. 4-е. — М.: Наука. 2011. — 345 с.
6. Давыдов С. С. Колебания разнородного грунта в упруго-пластической стадии оси кратковременной нагрузки//Динамика грунтов. Вып. 32. — М., 1958. — С 342–348.

FUNDAMENTALS OF CALCULATION OF STRESS STATE OF A SUBGRADE

Scheviev, Yuri L. — D. Sc. (Tech), professor, head of the department of hydraulics and water supply of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russia.

Sidrakov, Andrey A. — Ph.D. (Tech), associate professor, first deputy director of the Institute of track, construction and installations of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russia.

In some experts' opinion evaluation of stress fields within under rail subgrade is accomplished with the help of formulae of mostly empiric character. This approach limits possibilities of exploring the processes of pressure wave propagation and of their interaction with soils at

the moment of freight train motion along the rails. The article suggests a theoretical description of the studied dependencies and equations for numerical solution of the problems related to the processes within the stress fields of rail subgrade.

Key words: railway, embankment, rolling stock, ground body, under rail section, profile, stress state of subgrade, theoretical fundamentals of calculation.

REFERENCES

1. Yakovlev V. F. Study on the forces of interaction, deformation and stresses in the zone of contact of rail wheels and rails [*Issledovanie sil vzaimodeystviya, deformatsiy i napryazheniy v zone kontakta zheleznodorozhnykh koles i rel'sov*]. Abstracts of D. Sc. (Tech) thesis. Moscow, 1964, 377 p.
2. Verigo M. F. Vertical forces affecting the track at the moment of rolling stock passing [*Vertikal'nye sily, deystvuyuschie na put' pri prohozhdenii podvizhnogo sostava*]. Trudy TsNII MPS [*Proceedings of central institute of the Ministry of railways*], Iss. 97, Moscow, Transzheldorizdat, 1955, pp. 25–28.
3. Kogan A. Ya. Longitudinal forces in rail track [*Prodol'nye sily v zheleznodorozhnom puti*]. Trudy

- TsNII MPS [*Proceedings of central institute of the Ministry of railways*], Iss. 332, Moscow, Transport publ., 1967, 166 p.
4. Shahunyants G. M. Rail track [*Zheleznodorozhnyj put'*]. 2d ed. Moscow, transport publ., 1969, 536 p.
5. Aleksandrov P. B. Differential equations [*Differentsial'nye uravneniya*]. 4th ed. Moscow, Nauka publ., 2011, 345 p.
6. Davydov S. S. Heterogeneous ground motion at plasto-elastic stage of the axle of short-time load [*Kolebaniya raznorodnogo grunta v uprugoplasticheskoy stadii osi kratkovremennoy nagruzki*]. Dinamika gruntov [*Ground dynamics*], Iss. 32, Moscow, 1958, pp. 342–348.

Координаты авторов (contact information): Щевьев Ю. Л. (Scheviev Yu. L.) — Sheviev173@mail.ru; Сидраков А. А. (Sidrakov A. A.) — PTSOOO@mail.ru.

Статья поступила в редакцию / article received 13.12.2012
Принята к публикации / article accepted 07.02.2013

