УДК 625.1

Координатные модели траекторий пути

Александр МАТВЕЕВ

Alexander S.MATVEEV

Матвеев Александр Станиславович – *кандидат технических наук, доцент Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), Москва, Россия.*

Особенности теоретических оснований при решении задачи математической обработки результатов измерений параметров технического состояния железнодорожного пути. В расчет берутся отличные друг от друга варианты оценивания: в одном случае с учетом сопоставимых данных двух контрольных циклов, во втором – при совмещении в анализе с помощью мониторинговых средств показателей нескольких циклов измерений, имеющих определенные временные интервалы и свою динамику (подвижность) пунктов геодезической сети.

Ключевые слова: *железнодорожный путь, мониторинг технического состояния, способы оценки, координатно-временные параметры, теория оценивания повторных измерений, подвижность пунктов геодезической сети, математические методы обработки данных, теоремы и следствия.*

Мониторинг состояния плана и профиля железнодорожных путей основан, как известно, на сравнении повторного оценивания координатно-временных параметров, проводимого через определённый временной интервал. Задача математической обработки результатов измерений в этом случае распадается на две части: вначале за счет первичного анализа выделяются участки пути, не изменившие своего положения между двумя циклами оценивания, а затем полученные данные оценивают, принимая во внимание подвижность точек железнодорожного пути. Свои рассуждения мы будем основывать на работе [8], в которой построена теория оценивания повторных измерений с учётом подвижности пунктов геодезической сети.

1. ОЦЕНКА ИЗМЕРЕНИЙ ДВУХ ЦИКЛОВ

Пусть в условиях задачи заданы: вектор координат x^{i-1} координатной модели пути предыдущего цикла с ковариационной матрицей $K(x^{i-1})$, векторы измерений приращений координат l^{i-1}, l^{i} с весовыми матрицами P^{i-1}, P^{i} и оцененный вектор измерений предыдущего цикла $l_o^{i-1} = A^{i-1} x^{i-1}$.

Для вычисления вектора x^i естественно принять вектор x^{i-1} за приближённый вектор координат x^o, тогда оценку вектора поправок к вектору x^i найдём обычным образом:

$$dx^{oi} = (A^{iT} P^i A^i)^{-1} A^{iT} P^i dl^{oi}; x^i = x^{i-1} + dx^{oi} \quad (1)$$

Понятно, что

$$K(x^i) = K(dx^{oi}) = \mu_i^2 (A^{i^T} P^i A^i)^{-1}, \quad (2)$$

а $dl^{oi} = l^i - l_o^{i-1}$.

Легко показать, что вектор dx^{oi} несмещённо оценивает вектор сдвига точек пути $dx^i = x^i - x^{i-1}$. И ковариационная матрица оценки здесь определяется выражением

$$K(dx^{i)} = K(x^i) + K(x^{i-1}) \quad (3)$$

При одинаковой схеме измерений в циклах можно применять оценивание вектора разности измерений $dl^i = l^i - l^{i-1}$, для которого легко найти весовую матрицу: $P^i = (P^{i-1^{-1}} + P^{i^{-1}})^{-1}$.

Поскольку матрицы A^{i-1} *и* A^i в этом случае совпадают, то

$dx^i = (A^{iT} P^i A^i)^{-1} A^{iT} P^i dl^i$ (4)

Часто элементы матрицы P^{i-1} пропорциональны элементам P^i, то есть $P^{i-1} \subset P^i$. Нетрудно заметить, что тогда оценки dx^{oi} *и* dx^i совпадают. Действительно, матрица P в этой ситуации будет равна $P = cP^i/(c+1)$, поэтому

$$dx^i = \frac{c+1}{c} (A^{i^T} P^i A^i)^{-1} \frac{c}{c+1}$$

$$A^{i^T} P^i dl^i = (A^{i^T} P^i A^i)^{-1} A^T P^i dl^i, \quad (5)$$

но dl^i можно представить как

$$dl^i = dl^{oi} + v^{i-1}, \quad (6)$$

и с учётом того, что $P^i v^i \subset N(P^i A)$, имеем $dx^i = (A^{iT} P^i A^i)^{-1} A^{iT} P^i (dl^{oi} + v^{i-1}) = (A^{iT} P^i A^i)^{-1} A^{iT} P^i dl^{oi}$, что совпадает с (1).

Очевидно, что коэффициент пропорциональности c определяется соотношением средних квадратических ошибок единиц веса $\mu_i è \mu_{ø-1}$. С учётом этого для $K(dl^i)$ можно принять

$$K(dl^i) = \mu_i^2 P_i^{i-1} + \mu_{i-1}^2 P_i^{-1} =$$

$$= (\mu_i^2 + \mu_{i-1}^2) P - 1_i$$

Отсюда в соответствии с (5) ковариационная матрица $K(dx^i)$ примет вид.

$$K(dx^i) = B^{i^{-1}} A^{i^T} P^i (\mu_i^2 + \mu_{i-1}^2) B^{i^{-1}}. \quad (7)$$

Таким образом, в рассмотренной ситуации и оценивание измерений в координатной форме (1) – (3), и оценивание разностей измерений по формулам (4) – (7) приводят к одним и тем же результатам. Оценивание разностей измерений менее известно, поэтому представим этот вариант уравнивания повторных измерений более подробно.

Представим вектор истинных сдвигов dx его ортогональным разложением (индекс i для упрощения записей пока опустим).

$$dx = P_{R(A^T)} dx + P_{N(A)} dx = dx_i + dx_o \quad (8)$$

Как предусматривает методология, оценки вектора dx по результатам измерений осуществляют при дополнительных однородных ограничениях на параметры вида $Ddx+0$, с рангом матрицы D, равным $m-r$ [8]. В частности, принимая гельмертово условие, получают несмещённую оценку $dx_н$ вектора внутренних деформаций точек пути относительно неизменных координат центра тяжести, среднего дирекционного угла и среднего масштаба сети, а также несмещённую оценку его ковариационной матрицы $K(dx_i) = \mu^2 B^+$, где средняя квадратическая ошибка единицы веса $\mu = v^T Pv/(n-r)$.

Что же касается составляющей dx_o, вызванной общим перемещением пути, то её следует оценивать, используя информацию о стабильных участках пути. Рассмотрим некоторые теоретические аспекты такого оценивания.

<u>*Теорема 1.*</u> Пусть имеются устойчивые участки пути, а вектор истинных сдвигов случаен и удовлетворяет условию $M(P_{R(D^T)} dx) = 0$. Тогда несмещённая оценка вектора сдвигов и соответствующая ему ковариационная матрица могут быть найдены по результатам оценивания повторных измерений с помощью формул

$$Dx_D = P_{N(D)} dx; \quad (9)$$

$$K(dx_D) = P_{N(D)} K(dx_i) P^T_{N(D)} + P_{R(D)} K(dx) P^T_{R(D)} \quad (10)$$

Здесь dx_i – любое псевдорешение, полученное при уравнивании высокоточной цифровой модели пути (ВЦМП) как свободной; $K(dx)$ – ковариационная матрица вектора истинных сдвигов пути; матрица D образована из матрицы $A^\perp$ заменой столбцов, соответствующих сдвинутым точкам пути, нулевыми.

Справедливость (9–10) покажем, представив вектор dx разложением

$Dx = P_{N(D)}\,dx + P_{R(D)}\,dx,$ (11)

где $P_{N(D)}$ и $P_{R(D)}$ – проекторы на $N(D)$ и $R(D^T)$, проектирующие параллельно $R(A)$ b $N(A^T)$ соответственно. С учётом ортогонального разложения (8) перепишем (11) в виде

$Dx = P_{N(D)}\,dx_н + P_{N(D)}\,P_{N(A)}\,dx + P_{R(D^T)}\,dx_н + P_{N(A)}\,dx,$

Но $N(D) \perp N(A)$, поэтому $P_{N(D)}P_{N(A)}dx = 0$, и поскольку $R(D^T) \subset N(A)$, то $P_{R(D^T)} = 0$, а $P_{R(D^T)}P_{N(A)} = P_{R(D^T)}$. С учётом изложенного будем иметь

$Dx = P_{N(D)} + P_{R(D^T)}\,dx$ (12)

Подставляя в (12) несмещённую оценку нормального псевдорешения $dx_н$ и учитывая, что по принятому в теореме условию математическое ожидание линейной формы $P_{R(D^T)}dx$ равно нулю, приходим к выводу, что $dx_D = P_{N(D)}dx_н$ является несмещённой оценкой вектора сдвигов пути dx. Из справедливости (9) для нормального псевдорешения следует, что задача уравнивания повторных измерений с учётом подвижности точек ВЦМП не выходит за рамки общего подхода к уравниванию свободных геодезических сетей, поэтому по теореме 2 из [8] тот же результат можно получить из любого псевдорешения dx_i. Справедливость же формулы (10) непосредственно следует из теоремы сложения ковариаций с учётом независимости составляющих (12) и первого следствия из [8].

Замечание I.1. Условие $M(P_{R(D^T)}dx) = 0$ менее обременительно, чем применяемое обычно точное равенство $P_{R(D^T)}dx = 0$. Оно означает, что координаты центра тяжести стабильных участков пути, их средний масштаб и дирекционный угол являются случайными величинами с нулевым математическим ожиданием.

Замечание I.2. Необходимый для вычисления вектора dx_D проектор $P_{N(D)}$ может быть получен по следующей из теоремы 2 из [8] общей формуле:

$P_{N(D)} = I - P_{N(A)}D^T(D\,P_{N(A)}D^T)^{-}D.$ (13)

Однако известная структура пространства $R(D^T)$ позволяет вычислить проектор $P_{N(D)}$ более просто.

<u>*Теорема II.*</u> Если известны любое псевдорешение dx_i задачи уравнивания свободного варианта ВЦМП и некоторая матрица ограничений D, то параметры конформного преобразования dx_i в dx_D и соответствующий проектор $P_{N(D)}$, проектирующий параллельно $N(A)$ определяются формулами

$P = (DD^T)^{-1}D\,dx$ (14)

$P_{N(D)} = I - A^{\perp T}(DD^T)^{-1}D$ (15)

Действительно, для параметров конформного преобразования вектора dx к новой системе координат, соответствующей ограничениям D, можно использовать уравнение $Dp = dx$, откуда с учётом строчной невырожденности D следует (14). Вектор же нового псевдорешения dx_D, соответствующий этой системе, в соответствии с [8] определится как

$dx_D = dx - A^{\perp T}p = (I - A^{\perp T}(DD^T)^{-1}D)\,dx.$ (16)

Поскольку $R(D^T) \subset R(A^\perp)$, то $A^{\perp T}(DD^T)^{-1}D = A^{\perp T}D^{T+} = P_{R(DT)}$, и следовательно, $I - A^{\perp T}D^{T+} = P_{N(D)}$ и справедливость (15) доказаны.

Следствие II.1. Если в сети выявлена группа устойчивых участков пути и перестановкой столбцов матрицы D и $A^\perp$ приведены к виду $D = (A^\perp_c 0)$; $A^\perp = (A^\perp A^\perp_н)$, где столбцы $A^\perp_c$ и $A^\perp_н$ соответствуют стабильным и нестабильным точкам пути, то проекторы $P_{N(D)}$ и $P_{R(DT)}$ имеют вид

$$P_{R(D^T)} = \begin{bmatrix} P_{R(A_c^\perp)} & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix};$$

$$P_{N(D)} = \begin{bmatrix} P_{N(A_c^\perp)} & 0 \\ -q & I \end{bmatrix}. \qquad (17)$$

Здесь $P_{R(A_c^\perp)} = A_c^{\perp +}A_c^\perp$ – ортопроектор на $R(A^\perp_c)$, а $q = A^{\perp T}_н(A^{\perp +}_c)^T$.

Справедливость (17) проверяется простой подстановкой D и $A\perp$ в (16).

Замечание II.1. Конечно, матрица ковариации

$$K(dx) = \begin{bmatrix} K(dx_c) & z \\ z^T & K(dx_i) \end{bmatrix},$$

определяющая статистическую картину сдвигов системы точек пути, как правило, неизвестна. Однако в условиях рассматриваемой *теоремы* значение имеет лишь структура матрицы ковариации $K(dx_c)$ сдвигов устойчивых точек пути dx_c, поскольку, как нетрудно убедиться, проектор $P_{R(D^T)}$, определяемый по (17), при двойном проектировании $P_{R(D^T)}K(dx)P_{R(D^T)}$ аннулирует все блоки $K(dx)$, за исключением $K(dx_c)$. На практике, если нет другой информации, естественно принять приближённую оценку:

$K(dx_c) = m^2_{dx\,(c)} I,$ (18)

где $m_{dx\,(c)}$ – средний квадратический сдвиг устойчивых точек пути.

Следствие II.2. Если $M(P_{R(D^T)}dx = 0$, а матрица $K(dx_c)$ определена по (18), то матрица ковариации $K(dx_D)$, полученная по результатам уравнивания повторных измерений, может быть вычислена по формуле

$$K(dx_D) = \frac{v^T P v}{n-r} P_{N(D)} B^- P^T_{N(D)} + \\ + \frac{dx^T_{Dc} dx_{Dc}}{2k-d} P_{R(D^T)} P^T_{R(D^T)} \qquad (19)$$

где k – число устойчивых точек пути;

B^- – обобщённо-обратная к B, соответствующая известному псевдорешению dx_i.

Справедливость (19) доказывается подстановкой оценок $K(dx_i)$ *и* $K(dx)$ в (10). Первое слагаемое в (19) очевидно, второе получается с учётом того, что дисперсия $m^2_{dx\,(Dc)}$ является суммой дисперсии смещения пунктов и дисперсии измерений $m^2_и$ и условия (18), естественным образом вытекающего из условия $dx^T_c\, dx_c = min$.

Конечно, если были бы известны матрица $K(dx)$ или её невырожденная оценка, то можно было применить более общее условие оптимизации:

$Dx^T_c K(dx_c)^{-1} dx_c = min,$ (20)

дающее взвешенное псевдорешение

$d\hat{x} = K(dx_c)\, A^T (A^T PAK(dx_c)\, A^T)^+ A^T Pdl.$ (21)

Можно, разумеется, попытаться заменить $K(dx_c)$ на некоторый аналог весовой матрицы, тогда решение (21) будет соответствовать случаю, когда неизменными при уравнивании остаются взвешенные центральные элементы сети. Однако более громоздкое решение (21) с практической точки зрения вряд ли оправдано, поскольку матрица $K(dx_c)$, как правило, неизвестна.

Замечание II.2. Разработанная теория пригодна и для координатной формы решения задачи уравнивания повторных измерений. В этом случае формулы (9) и (10) следует записать в виде

$dx^{oi}_D = P_{N\,(Di)} dx^{oi};$ (22)

$$K(dx^{oi}_D) = P_{N(Di)} K(dx^{oi}) P^T_{N(Di)} + \\ + P_{R(D^{Ti})} K(dx^{oi}) P^T_{R(D^{Ti})}, \qquad (23)$$

а формулы (11, 19) в виде

$$K(dx^{oi}_D) = \frac{v^{iT} P^i v^i}{n-r} P_{N(Di)} B^{i-} P^T_{N(Di)} + \\ + \frac{dx^{oiT}_{Dc}\, dx^{o\,i}_{Dc}}{2k-1} P_{R(Di)} P^T_{R(Di)}. \qquad (24)$$

2. СОВМЕСТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НЕСКОЛЬКИХ ЦИКЛОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Считается, что наиболее строгой и точной является совместная оценка всех циклов повторных измерений. Такое оценивание, как и раздельное, требует предварительного анализа устойчивости точек пути в каждом цикле измерений, ибо наличие или отсутствие в сети подобных точек коренным образом меняет решение задачи.

В результате анализа состояния точек пути возможны три ситуации:

- все точки исследуемого пути устойчивы;
- одни и те же точки пути устойчивы во всех циклах;
- в разных циклах устойчивыми оказываются разные точки пути.

В первом случае во всех циклах аналитики имеют дело с одной и той же геометрической схемой оценивания, поэтому измерения нового цикла значительно уточняют координаты точек пути, и система нормальных уравнений параметрического уравнивания $Bx=y$ принимает вид

$(B^1+B^2+\ldots+B^к)\, x = (y^1+y^2+\ldots+y^к).$ (25)

При $B^1=B^2=\ldots=B^к=B$ и $m_1=m_2=\ldots=m_к=m$ точность координат повышается пропорционально номеру цикла в соответствии с выражением

$K(x^i) = m^2 B^{-1}/i.$ (26)

Во втором случае матрица A системы уравнений поправок за счет перестановки столбцов может быть приведена к виду

$$A = \begin{bmatrix} A^1_n & & & & & & A^1_c \\ & A^2_n & & & 0 & & A^2_c \\ & & A^3_n. & & & & A^3_c. \\ & & & . & & & . \\ & & & & . & & . \\ & 0 & & & & . & . \\ & & & & & A^k_n & A^k_c \end{bmatrix},$$

где A^i_c и A^i_n – блоки, соответствующие стабильным и нестабильным точкам пути.

При одинаковой схеме и точности измерений $A^1_n=A^2_n=...=A_n$; $A^1_c=A^2_c=...=A^k_c=A_c$, поэтому матрица B и система нормальных уравнений будут иметь вид

$$B^k=\begin{bmatrix} B^0_n & B^T_{nc} \\ B_n & kB_c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_n & & & & & A^T_n A_c \\ & B_n & & & & A^T_n A_c \\ & & . & & & . \\ & & & . & & . \\ & & & & . & . \\ & & & & B_n & A^T_n A_c \\ A^T_c A_n & . & . & . & . \; A^T_c A_n & kB_c \end{bmatrix}$$

$$B^k\times\begin{bmatrix} x^1_n \\ x^2_n \\ . \\ . \\ . \\ x^k_n \\ x_c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^T_n Pl^1 \\ A^T_n Pl^2 \\ . \\ . \\ . \\ A^T_n Pl^k \\ A^T_c P(l^1+l^2+....+l^k) \end{bmatrix} \qquad (27)$$

Обращая матрицу B^k по формулам Фробениуса [2], получим

$$(\mathrm{B}^k)^{-1}=\begin{bmatrix} T & Q \\ Q^T & S \end{bmatrix}$$

где:

$$S=(B_c-A^T_c A_n B^{-1}_n A^T_n A_c)^{-1}/k=(A^T_c P_{N(An)} A_c)^{-1}/k; \qquad (28)$$

$$Q=-(A^T_c P_{N(An)} A_c)^{-1} B_{nc} (B^o_n)^{-1}/k; \qquad (29)$$

$$T=(B^o_n)^{-1}(I+B^T_{nc}(A^T_{nc}P_{N(An)}A_c)^{-1}B_{nc}(B^o_n)^{-1}/k). \qquad (30)$$

Из формул (28–30) видно, что совместная обработка в κ раз уменьшает элементы ковариационной матрицы координат устойчивых x_c точек пути, в то время как повышение точности координат неустойчивых точек пути – незначительно (см. формулу (30)).

Наиболее просто система (27) решается, если зафиксировать все устойчивые точки пути, то есть перейти к несвободному оцениванию. Однако несвободное оценивание приводит к искажению представлений о внутренней геометрии сети, что нежелательно. Лучше, как и прежде, применять процедуры рекуррентного оценивания с учётом ошибок исходных данных.

В третьей ситуации, рассуждая подобным же образом, можно было бы разделить точки пути на устойчивые, устойчивые не во всех циклах, неустойчивые и получить решение, применяя принципы группового оценивания. Но этот способ слишком громоздок и не эффективен в вычислительном плане. Существует значительно более эффективный приём последовательной обработки измерений, основанный на схеме учёта ошибок исходных данных и сводящийся к оцениванию коррелированных измерений. В этом случае вектор dx^{oi-1} можно считать дополнительным измерением и перейти от системы уравнений поправок

$A^i dx^{oi}=dl^{oi}+v^i$ с $K(dl^{oi})=P^{-1}$ (31)

к системе.

$$\begin{pmatrix} A^i \\ I \end{pmatrix} dx^{oi}=\begin{pmatrix} dl^{oi} \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v^i \\ dx^{oi} \end{pmatrix} \text{ с}$$

$$K\begin{pmatrix} dl^{oi} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} K(dl^{oi}) & 0 \\ 0 & K(dx^{oi-1}) \end{pmatrix} \qquad (32)$$

Применяя к новой системе обобщённый метод наименьших квадратов, получим

$$dx^{oi}=(A^{i\,T}K(dl^{oi})^{-1}+K(dx^{oi-1})^{+})^{+}A^{i\,T}K(dl^{oi})^{-1}dl^{oi}; \qquad (33)$$

$$K(dx^{oi})=m^2(A^{i\,T}K(dl^{oi})^{-1}A+K(dx^{oi-1})^{+})^{+}. \qquad (34)$$

Формулы (31–34) справедливы для случая, когда все точки исследуемого пути между циклами $i-1$ *и* i устойчивы. В противном случае, если группу из j устойчивых точек пути пронумеровать первыми, то матрица I в модели (32) заменится на $(I_{j,j}0)$. Соответственно изменятся и формулы (33–34):

$$dx^{oi}=(A^{i\,T}K(dl^{oi})^{-1}A^i+\begin{pmatrix} K(dx^{oi-1})^{-1}_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{mm})^{-1}A^{i\,T}K(dl^{oi})^{-1}dl^{oi}, \qquad (35)$$

$$\mathrm{K}(\mathrm{dx}^{oi})=\mathrm{m}^2(\mathrm{A}^{i\,T}\mathrm{K}(\mathrm{dl}^{oi})^{-1}\mathrm{A}^i+\begin{pmatrix} K9dx^{oi-1})_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{mm})^{-1}. \qquad (36)$$

Этими формулами можно завершить изложение теории совместного оценивания измерений нескольких циклов, поскольку вместе с остальным материалом они создают достаточную теоретическую базу для потребностей практики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альберт А. Регрессия, псевдообращение и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977. – 221 с.
2. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
3. Грооп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979. – 302с.
4. Зыков А. А. Основы теории графов. – М.: Вузовская книга, 2004. – 664 с.
5. Лёвин Б. А., Круглов В. М., Матвеев С. И. и др. Геоинформатика транспорта. – М.: ВИНИТИ РАН, 2006. – 336 с.
6. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
7. Матвеев С. И. Геометрия группового уравнивания // Геодезия и картография. – 1997. – № 10. – С. 13–16.
8. Матвеев С. И., Коугия В. А. Высокоточные цифровые модели пути и спутниковая навигация железнодорожного транспорта. – М.: Маршрут, 2005. – 290 с.
9. Матвеев С. И., Розенберг И. Н. Графы и навигация. – М.: ВИНИТИ РАН, 2011. – 196 с.
10. Тертычный –Даури В. Ю. Адаптивная механика – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Факториал Пресс, 2003. – 464 с.

Исследования проводились в рамках проекта 11-08-13131-офи-М-2011-«РЖД». ●

COORDINATE MODELS OF TRACK TRAJECTORY

Matveev, Alexander S. *– Ph.D. (Tech), associate professor of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russia.*

The author describes theoretical fundamentals, used to proceed with mathematical treatment of the results of measurements of parameters of technical conditions of the rail track. The calculations use different variants of assessment. The first one considers comparable data of two cycles of control. The second one proceeds with superposed, monitoring-based analysis of the indices received out of several measuring cycles with predetermined time intervals and dynamics (mobility) of the points of geodesic network.

Key words: rail track, monitoring of technical conditions, assessment methods, coordinate and time parameters, theory of evaluation of repeatable measurements, mobility of geodesic network points, mathematical methods of data treatment, theorems, consequences.

REFERENCES

1. Albert A. A. Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse [*Russian title: Regressiya, psevdoobraschenie i rekurrentnoye otsenivaniye*]. Moscow, Nauka publ., 1977, 221 p.
2. Voevodin V. V., Kuznetsov Yu.A. Matrix and calculations [*Matritsy i vychisleniya*]. Moscow, Nauka publ., 1984, 320 p.
3. Graupe Daniel. Identification of Systems [*Russian title: Metody identificatsii system*]. Moscow, Mir publ., 1979, 302 p.
4. Zykov A. A. Fundamentals of graph theory [*Osnovy teorii grafov*]. Moscow, Vuzovskaya kniga publ., 2004, 664 p.
5. Lievin B. A., Kruglov V. M., Matveev S. I. et al. Transport Geoinformatics [*Geoinformtika transporta*]. Moscow, VINITI RAN, 2006, 336 p.
6. Lawson Charles N., Hanson Richard J. Solving Least Squares Problems [*Russian title: Chislennoye reshenie zadach metoda naimenshih kvadratov*]. Moscow, Nauka publ., 1986, 232 p.
7. Matveev S. I. Geometry of group adjustment [*Geometriya gruppovogo vyravnivaniya*]. Geodesiya i kartografiya [*Geodesy and cartography*], 1997, No 10, pp. 13–16.
8. Matveev S. I., Kougiya V. A. High-precision digital models of rail track and satellite navigation of railways [*Visokotochnye tsifrovye modeli puti i sputnikovaya navigatsiya zheleznodorozhnogo transporta*]. Moscow, Marshrut publ., 2005, 290 p.
9. Matveev S. I., Rozenberg I. N. Graphs and navigation [*Grafy i navigatsiya*]. Moscow, VINITI RAN, 2011, 196 p.
10. Tertuchni-Dauri V. Yu. Adaptive mechanics [*Adaptivnaya mehanika*]. 2d ed., rev. and enlarged. Moscow, Factorial Press, 2003, 464 p.

The researches have been conducted in the framework of the project 11–08–13131-ofi-M-2011- RZD.

Координаты автора (contact information): Матвеев А. С. (Matveev A. S.) – (495) –684–24–07.

Статья поступила в редакцию / article received 12.02.2013
Принята к публикации / article accepted 03.04.2013