



Взаимодействие гибкой колесной пары и рельсов с волнообразным износом



Павел БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ

Pavel M. BELOTSERKOVSKIY

Белоцерковский Павел Матвеевич — доктор технических наук, профессор кафедры «Высшая математика» Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ).

Автор рассматривает особенности взаимодействия равномерно движущихся и равноотстоящих друг от друга колесных пар на рельсах с волнообразным износом. В качестве расчетного поля используется периодическая модель железнодорожного пути. Вычисления сделаны с помощью ряда Фурье. Исследуются качение колеса, гибкая колесная пара, различные модельные схемы. Сделанные расчеты позволяют внести существенные уточнения в теоретические положения, касающиеся высокочастотных колебаний рельсового пути.

Ключевые слова: железнодорожный путь, периодическая модель, качение колеса, волнообразный износ рельсов, гибкая колесная пара, модуль упругости, коэффициент Пуассона, ряд Фурье, краевые задачи, сравнительные расчеты.

Железнодорожный путь представляет собой периодическую структуру с периодом, равным шагу шпал. Колебания высокой частоты возникают, когда поезд движется с высокой скоростью по рельсам с короткими волнами на поверхностях катания. В этом случае изменения силы взаимодействия колеса и рельса на длине волны велики и сравнимы со статической нагрузкой на колесо.

Если рассматривается качение колеса заданного радиуса по рельсу с волнами на поверхности катания, то тогда точка касания колеса и рельса попеременно оказывается впереди или позади центра движущегося колеса, а траектория центра колеса отличается от вертикального профиля рельса [1–4]. Учет радиуса колеса приводит к появлению гармоник высшего порядка в траектории его центра, а отсюда и в силе взаимодействия колеса и рельса. Гармоники высшего порядка появляются и когда учитывается периодическая структура железнодорожного пути.

Высокочастотные колебания пути порождают в рельсах короткие волны и, следовательно, значительные деформации сдвига. Поэтому рельс может идентифицироваться как балка Тимошенко. Частота

колебаний пути превосходит низшую частоту собственных изгибных колебаний колесной пары с буксами. Значит, изгиб оси колесной должен приниматься во внимание, а неподдрессоренная масса представляться как многомассовая система.

КАЧЕНИЕ КОЛЕСА ПО ВОЛНИСТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Будем рассматривать поверхность катания рельса как недеформируемую волнистую цилиндрическую поверхность, показанную на рис. 1. Каждое колесо — как круглый цилиндр, ось которого параллельна образующей цилиндрической поверхности катания рельса. Кроме того, примем в расчет, что поверхности катания имеют одинаковый вертикальный профиль 1, определяемый формулой

$$h(x) = -a_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda}, \quad \text{tg} \alpha = h'(x) = \frac{2\pi a_0}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda}, \quad (1)$$

где a_0 , λ и α обозначают амплитуду, длину волны и угол уклона профиля. В этом случае вертикальные колебания обоих колес одинаковы. Возьмем в качестве исходного случая качение без отрыва от рельса одного твердого круглого колеса радиуса r_0 под действием статического груза P_0 .

Кривизна вертикального профиля рельса достигает наибольшего значения во впадине и на вершине профиля. Наименьший радиус кривизны равен величине $r_1 = (\lambda / (2\pi))^2 / a_0$. Обозначим x_c и α_c продольную координату и угол уклона профиля в точке касания колеса и рельса. Продольная и вертикальная координаты центра колеса x_0 и y_0 обозначены на рис. 1 и 2 и вычисляются при помощи формул:

$$x_0 = x_c - r_0 \sin \alpha_c; \quad y_0 = h(x_c) + r_0 \cos \alpha_c. \quad (2)$$

Кривая 2 на рис. 1 и 2 изображает траекторию центра колеса, которая отличается от вертикального профиля рельса 1. Кривизна траектории достигает наибольшего значения во впадине. Наименьшее значение радиуса равно $r_1 - r_0$.

Благодаря инерции центр колеса движется в продольном направлении с постоянной скоростью v_0 , и следовательно, его продольная координата $x_0 = v_0 t$ увеличи-

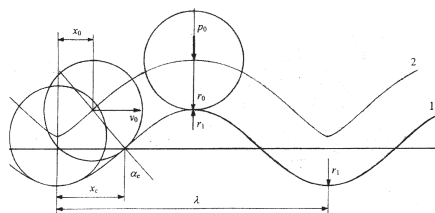


Рис. 1.

вается равномерно. Однако продольная координата x_c точки касания колеса и рельса растет неравномерно. Если время t увеличивается на λ / v_0 , то обе координаты x_c и x_0 возрастают на величину λ . При этом вертикальная координата центра колеса y_0 сохраняет свое значение.

Угол наклона профиля в точке контакта α_c зависит от амплитуды a_0 . Эта нелинейная зависимость исследовалась в [7] при помощи численного метода. Взяв эту амплитуду как малую величину, получим линейное применительно к a_0 выражение

$$y_0 = r_0 + \frac{a_0}{4} R - \frac{a_0}{R} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n(nR)}{n^2} \exp\left(\frac{i2\pi n v_0 t}{\lambda}\right), \quad R = \frac{r_0}{r_1} \quad (3)$$

для вычисления высоты центра колеса относительно нейтральной линии твердого волнистого профиля [2–4]. Это выражение содержит функции Бесселя первого рода $J_n(z)$ [8]. Если амплитуда a_0 мала, то безразмерная величина R также является малой.

Обозначим p давление колеса на рельс. Вычислим статическое приближение χ центра колеса к рельсу, вызванное деформацией в пятне контакта под действием давления колеса на рельс. С целью упрощения дальнейших вычислений и устранения некоторых трудностей, связанных с плоской контактной механикой (см. [9], Chapter 42 «Contact problems» by J. L. Lubkin), будем рассматривать колесо как упругий круглый цилиндр с радиусом r_0 , катящийся без отрыва по твердой цилиндрической поверхности с вертикальным профилем, определяемым равенством (1). Длина цилиндра d устанавливается





в дальнейшем. Такой подход дает следующее (здесь E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона):

$$\chi = -\frac{1-\nu^2}{\pi dE} \left(\ln \frac{(1-\nu^2)p}{4\pi dEr_e} + 1 \right) p, \quad (4)$$

$$\frac{1}{r_e} = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \cos \frac{2\pi x_c}{\lambda}.$$

Величина r_e обозначает эффективный радиус кривизны в точке касания колеса и рельса. Эта величина изменяется периодически и зависит от амплитуды и длины волны на поверхности катания рельса. Причем модуль упругости E уменьшается вдвое, а величина dE выбирается так, чтобы линейная контактная жесткость k_c , вычисленная при $p = p_0$ и $r_e = r_0$ (т. е. для гладкого рельса), была бы равна $1,4 \times 10^9$ Н/м. Подобная линейная контактная жесткость определяется выражением

$$\frac{1}{k_c} = -\frac{1-\nu^2}{\pi dE} \left(\ln \frac{(1-\nu^2)p_0}{4\pi dEr_0} + 2 \right). \quad (5)$$

Умножая равенство (5) на p и вычитая их произведение из равенства (4), получим

$$\chi - \frac{p}{k_c} = -\frac{1-\nu^2}{\pi dE} \left(\ln \frac{p}{p_0} - 1 + \ln \frac{r_0}{r_e} \right) p,$$

$$\frac{r_0}{r_e} = 1 - R \cos \frac{2\pi x_c}{\lambda}.$$

Безразмерная эффективная кривизна в точке касания колеса и рельса r_0/r_e тоже периодически изменяется. Ее период равен величине λ . Это означает, что имеет место следующее разложение Фурье [4]:

$$\ln \frac{r_0}{r_e} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n \exp \left(\frac{i2\pi n v_0 t}{\lambda} \right), \quad (6)$$

$$R_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - R \cos \xi) \ln(1 - R \cos \xi) d\xi,$$

$$R_n = R_{-n} =$$

$$-\frac{R}{\pi n} \int_0^\pi \frac{\sin \xi \sin(n(\xi - R \sin \xi)) d\xi}{1 - R \cos \xi}, \quad n \geq 1.$$

В данном случае безразмерный параметр R принимается за малую величину. Отбросим все другие малые величины, чей порядок выше, чем порядок этой. Тогда

вычисление двух представленных интегралов приводит к таким результатам:

$$R_0 = 0, \quad R_1 = -R/2, \quad R_{2k+1} = 0,$$

$$R_{2k} = -2R/(4k^2 - 1),$$

$$\ln \frac{r_0}{r_e} = -R \left(\cos \left(\frac{2\pi v_0 t}{\lambda} \right) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{4k^2 - 1} \cos \left(\frac{4\pi k v_0 t}{\lambda} \right) \right).$$

Давление p колеса на недеформируемый рельс с волнообразным износом зависит от времени t и регулярно изменяется периодически с периодом λ/v_0 . Представим величину p в виде ряда Фурье, имеющего неизвестные безразмерные коэффициенты F_k :

$$p = p_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k \exp \left(\frac{i2\pi k v_0 t}{\lambda} \right). \quad (7)$$

Умножая разложения (6) и (7), а затем подставляя $n-k$ вместо n , получим

$$p \ln \frac{r_0}{r_e} = p_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \left(\frac{i2\pi n v_0 t}{\lambda} \right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k R_{n-k}.$$

Следующая безразмерная периодическая функция времени t может быть представлена в виде ряда Фурье с безразмерными коэффициентами P_n , зависящими от неизвестных коэффициентов F_k :

$$\left(\ln \frac{p}{p_0} - 1 \right) p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n \exp \left(\frac{i2\pi n v_0 t}{\lambda} \right),$$

$$P_n = \frac{v_0}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln \frac{p}{p_0} - 1 \right) p \exp \left(-\frac{i2\pi n v_0 t}{\lambda} \right) dt. \quad (8)$$

Приведенное разложение демонстрирует нелинейные контактные эффекты. Приближение центра колеса к рельсу χ теперь записывается в виде

$$\chi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp \left(\frac{i2\pi n v_0 t}{\lambda} \right) \left(\frac{\frac{p_0 F_n}{k_c} - \frac{1-\nu^2}{\pi dE}}{\left(p_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k R_{n-k} + P_n \right)} \right). \quad (9)$$

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПУТИ

Движение нагруженной колесной пары с периодически меняющейся жесткостью

приводит к параметрическим колебаниям как колесной пары, так и рельсового пути. Эти колебания накладываются на вынужденные колебания, вызванные волнообразным износом рельсов с длиной волны λ . Будем предполагать, что безразмерное отношение $L = l/\lambda$, равное отношению шага шпал и длины волны износа рельса, является целым числом. В этом случае шаг шпал l остается периодом структуры.

Если принимать рельс как балку Тимошенко с изгибной жесткостью EJ , величины ρ_0 и $k'GA$ станут отражением линейной плотности и жесткости сдвига балки. G обозначает модуль сдвига, а A — площадь поперечного сечения балки.

Модель железнодорожного пути, включающая в себя упругую прокладку между шпалой и рельсом [4, 10], показана на рис. 2. Такая прокладка имеет жесткость $u_p l$ и вязкое сопротивление $r_p l$. Половина шпалы представляется сосредоточенной массой $\rho_1 l$, которая опирается на пружину с жесткостью $u_b l$ и параллельное ей вязкое сопротивление $r_b l$. Пружина и вязкое сопротивление определяют механические свойства балласта. Величины ρ_1 , u_p , r_p , u_b и r_b относятся к однородной модели железнодорожного пути.

Возьмем установившиеся вертикальные колебания колесной пары, движущейся вдоль пути с постоянной скоростью v_0 . В этом и следующем разделах величина $f_c(t)$ обозначает периодическую силу в точке касания колеса и рельса. Величина имеет период l/v_0 и действует на колесо и рельс в противоположных направлениях. Положительные направления $f_c(t)$ показаны на рис. 2.

Можно предположить, что сила $f_c(t)$ приложена к центру колеса и точке центральной линии рельса с вертикальной координатой h_0 . Тогда продольная координата этой точки:

$$x_1 = x_0 + (x_c - x_0)(h_0 + r_0)/r_0.$$

Будем считать, что разность $x_1 - x_0$

мала и может быть отброшена. Принимая во внимание равенство (7), представим вертикальную составляющую $f(t) = -p$ силы $f_c(t)$ в виде ряда Фурье:

$$f(t) = -p_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \exp\left(\frac{i2\pi n v_0 t}{l}\right). \quad (10)$$

Обозначим $y(x, t)$ направленное вверх вертикальное смещение рельса. Пусть продольная координата $x = 0$ соответствует центру шпалы. Предположим, что рельс действует на шпалу в точке $x = 0$ направленной вверх вертикальной силой $k(t)$. Согласно [4, 5], эта сила и вертикальное смещение рельса над шпалой удовлетворяют равенству:

$$\begin{aligned} & \left(u_b + u_p + (r_b + r_p) \frac{d}{dt} + \rho_1 \frac{d^2}{dt^2} \right) k(t) = \\ & = \left(u_b u_p + (u_b r_p + u_p r_b) \frac{\partial}{\partial t} + (\rho_1 u_p + r_b r_p) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \rho_1 r_p \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) ly(0, t). \end{aligned} \quad (11)$$

Следующее уравнение с частными производными определяет направленное вверх смещение рельса $y(x, t)$ под действием направленной вверх силы $f(t)$:

$$\begin{aligned} & EJ \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \rho_0 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - \\ & \frac{\rho_0 J}{A} \left(1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \\ & \frac{\rho_0^2 J}{k'GA^2} \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial t^4} = \\ & = \left(1 + \frac{\rho_0 J}{k'GA^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{EJ}{k'GA} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(t) \delta(x - v_0 t). \end{aligned} \quad (12)$$

Сила $f(t)$ равномерно движется вдоль рельса со скоростью v_0 . Функция Дирака $\delta(x - v_0 t)$ отражает текущее положение этой силы.

Любое численное решение уравнения (12) предполагает, что длина пути является некоторой конечной, но достаточно большой величиной h . Пусть начало отрезка пути соответствует точке $x = 0$, а его конец — точке $x = h$. Обычно считают, что





Оба условия периодичности показывают, что функцию $y(x, t)$ можно разложить в ряд Фурье, записать в виде линейных

Чтобы поставить краевую задачу на отрезке $0 \leq x \leq l$ для уравнения с частными производными (12), необходимо принять во внимание величины слева от начала отрезка $x = 0$ и справа от его конца $x = l$. С учетом этого получим следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^j y(l, t + l/v_0)}{\partial x^j} &= \frac{\partial^j y(0, t)}{\partial x^j}, \quad j = 0, 2; \\ \frac{\partial y(l, t + l/v_0)}{\partial x} &= \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} - \frac{k(t)}{k'GA}; \\ \frac{\partial^3 y(l, t + l/v_0)}{\partial x^3} &= \frac{\partial^3 y(0, t)}{\partial x^3} + \frac{k(t)}{EI}\end{aligned}$$

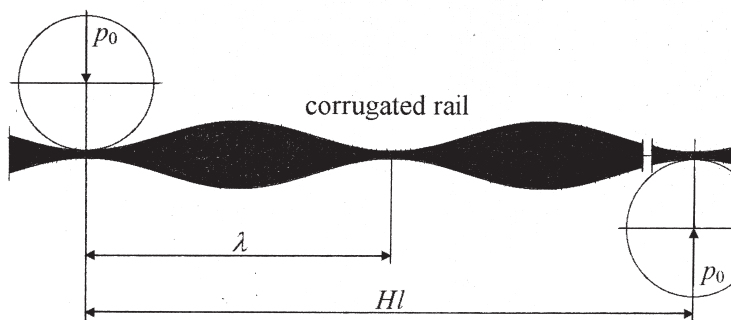


Рис. 3.

$$-\frac{\rho_0 d^2 k(t)}{(k'GA)^2 dt^2}.$$

Последнее слагаемое в последнем граничном условии берет во внимание упомянутую частную производную второго порядка по времени t . Это слагаемое было опущено в работах [5, 6].

Пусть величины $y_n(x, t)$ обозначают поперечное отклонение рельса, вызванное нагрузкой

$$q_n(x, t) = \exp\left(\frac{i2\pi n v_0 t}{l}\right) \delta(x - v_0 t),$$

и удовлетворяют предшествующим однородным граничным условиям. Тогда

$$y(x, t) = -p_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n y_n(x, t). \quad (13)$$

Перейдем к другим безразмерным переменным: времени $T = v_0 t / l$ и продольной координате $X = x / l$. Заметим, что безразмерная продольная координата, соответствующая центру колеса $X_0 = x_0 / l = v_0 t / l$, совпадает с T . Кроме того, учтем, что $\delta(l(X - T)) = \delta(X - T) / l$ и $\delta(X - T) = \delta(T - X)$. Тогда безразмерная величина $Y_n(X, T) = y_n(x, t) / l$ удовлетворяет условию периодичности в схеме Мёбиуса: $Y_n(X, T + H) = -Y_n(X, T)$.

Решение краевой задачи приводит к следующим результатам:

$$Y_n(X, T) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} C_{s,n}(X) \exp(i\Phi_s T) \quad (14)$$

$$\Phi_s = \frac{\pi(2s-1)}{H},$$

$$C_{s,n}(X) = \frac{A_0}{H} \left(\frac{\exp(-i\Phi_{s,n} X) - 1}{J(\Phi_s) N(X, \Phi_s)} \right) P_{s,n},$$

$$Q(X, \Phi_s) =$$

$$= \frac{1 + \psi(\Gamma - \sigma_2^2)}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$$

$$\frac{\sinh(\sigma_1(1-X)) + \exp(-i\Phi_s) \sinh(\sigma_1 X)}{\sigma_1(\cos\Phi_s - \cosh\sigma_1)}$$

$$- \frac{1 + \psi(\Gamma + \sigma_1^2)}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$$

$$\frac{\sin(\sigma_2(1-X)) + \exp(-i\Phi_s) \sin(\sigma_2 X)}{\sigma_2(\cos\Phi_s - \cos\sigma_2)} =$$

$$= \exp(-i\Phi_s X) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_{s,n} \exp(i2\pi n X),$$

$$\psi = \frac{EJ}{k'GA l^2},$$

$$2\sigma_{2,1}^2 = ((B - \Gamma)^2 - 4A)^{1/2} \pm (B + \Gamma),$$

$$P_{s,n} = \frac{1 + \psi(\Phi_{s,n}^2 - B)}{\Phi_{s,n}^4 - (B + \Gamma)\Phi_{s,n}^2 + B\Gamma - A},$$

$$\Phi_{s,n} = \Phi_s - 2\pi n,$$

$$A = \frac{\rho_0 v_0^2 l^2 \Phi_s^2}{EJ}, B = \frac{\rho_0 v_0^2 \Phi_s^2}{EA}, \Gamma = \frac{\rho_0 v_0^2 \Phi_s^2}{k'GA}$$

$$J(\Phi_s) = \frac{K(\Phi_s) D(\Phi_s)}{K(\Phi_s) + D(\Phi_s)}, D(\Phi_s) = \frac{1}{Q(0, \Phi_s)},$$

$$K(\Phi_s) = \frac{-i\Phi_s^3 K_3 - \Phi_s^2 K_2 + i\Phi_s K_1 + K_0}{-\Phi_s^2 K_{-2} + i\Phi_s K_{-1} + 1},$$

$$K_0 = \frac{u_p u_b l^4}{(u_p + u_b) EJ}, K_1 = \frac{(u_p r_b + r_p u_b) v_0 l^3}{(u_p + u_b) EJ},$$





12

$$K_2 = \frac{(\rho_1 u_p + r_p r_b) v_0^2 l^2}{(u_p + u_b) EJ}, \quad K_3 = \frac{\rho_1 r_p v_0^3 l}{(u_p + u_b) EJ},$$

$$K_{-1} = \frac{(r_p + r_b) v_0}{(u_p + u_b) l}, \quad K_{-2} = \frac{\rho_1 v_0^2}{(u_p + u_b) l^2}.$$

Отметим, что введение полных граничных условий упрощает решение краевой задачи. Подставляя приведенные выражения в равенство (14) и изменяя порядок суммирования, получим

$$Y_n(X, T) = A_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(i 2\pi m X) W(m, n, T - X),$$

$$A_0 = \frac{p_0 l^2}{EJ};$$

$$W(m, n, T - X) = \frac{-1}{H} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J(\Phi_s) P_{s,m} P_{s,n}$$

$$\exp(i \Phi_s (T - X)), m \neq n;$$

$$W(n, n, T - X)$$

$$= \frac{1}{H} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (1 - J(\Phi_s) P_{s,n}) P_{s,n} \exp(i \Phi_s (T - X)).$$

(15)

Величины X и T — произвольные числа. Равенство $X = T$ соответствует точке касания колеса и рельса. Разделим равенство (13) на l и подставим в него величину $Y_n(X, T)$, выраженную при помощи равенств (16). Далее, заменяя X на T , получим выражение для безразмерного вертикального смещения рельса в точке его касания с колесом:

$$\frac{y(v_0 t, t)}{l} =$$

$$-A_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{i 2\pi m v_0 t}{l}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n W(m, n, 0). \quad (16)$$

ГИБКАЯ КОЛЁСНАЯ ПАРА

Если колесная пара движется без отрыва по рельсам с одинаковыми волнами на поверхностях катания, то только симметричный изгиб ее оси следует принимать во внимание. Будем предполагать, что неподрессоренная масса m_0 , приходящаяся на одно колесо, состоит из трех масс m_w , m_a и m_b , показанных на рис. 4 и отнесенных к колесу, оси и буксе. Эти массы сопряжены друг с другом при помощи однородной невесомой оси с изгибной жесткостью EJ_a .

Система, состоящая из пяти масс, имеет две частоты свободных колебаний, которые соответствуют собственным частотам первой и второй симметричных изгибных мод колесной пары, связанной с буксами [1, 12]. Если скорость движения колесной пары v_0 достаточно мала, то отвечающая ей частота прохождения волн на поверхностях катания рельсов оказывается меньше низшей собственной частоты симметричных изгибных колебаний колесной пары. В этом случае изгиб ее оси невелик и она совершает вертикальные колебания как твердое тело. Если частота прохождения волн оказывается больше собственной частоты первой симметричной изгибной моды колесной пары, то на вертикальные ее колебания накладываются и изгибные.

Обозначим $y(x)$ вертикальное статическое смещение оси колесной пары из состояния равновесия, а y_w , y_a и y_b — смещения, отнесенные к колесу, середине оси и буксе. Эти смещения линейно зависят от сил, которые приложены к упомянутым массам на рис. 6. Таким образом: $y_w - y_a = f_1 \delta_{11} + f_2 \delta_{12}$; $y_b - y_a = f_1 \delta_{21} + f_2 \delta_{22}$.

Четыре упругих коэффициента δ_{11} , $\delta_{12} = \delta_{21}$ и δ_{22} зависят от размеров оси. В модели колесной пары на рис. 4 они определяются выражениями:

$$\delta_{11} = \frac{a^3}{3EJ_a}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{a^2(2a + 3b)}{6EJ_a},$$

$$\delta_{22} = \frac{(a + b)^3}{3EJ_a}.$$

Размеры a и b присутствуют на рисунке. В статическом случае имеет место равенство $f_1 + f_2 = 0$, и поэтому $c_0(y_b - y_w) = f_2$. Величина $A_b = (\delta_{11} - 2\delta_{12} + \delta_{22})^{-1}$ представляет собой статическую жесткость колесной пары. Три дифференциальных уравнения определяют динамические смещения колеса, середины оси колесной пары и буксы:

$$m_w \frac{d^2 y_w}{dt^2} = -\frac{\delta_{22}}{\Delta} (y_w - y_a) + \frac{\delta_{12}}{\Delta} (y_b - y_a) +$$

$$p_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \exp\left(\frac{i 2\pi n v_0 t}{l}\right); \quad (17)$$

$$m_b \frac{d^2 y_b}{dt^2} = \frac{\delta_{12}}{\Delta} (y_w - y_a) - \frac{\delta_{11}}{\Delta} (y_b - y_a),$$

$$\Delta = \delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2;$$

$$m_w \frac{d^2 y_w}{dt^2} + m_a \frac{d^2 y_a}{dt^2} + m_b \frac{d^2 y_b}{dt^2} =$$

$$= p_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \exp\left(\frac{i2\pi n v_0 t}{l}\right).$$

Исключая величины y_b и y_a из первого уравнения, получим единственное дифференциальное уравнение, которое помогает найти вертикальное смещение колеса y_w и имеет ограниченное периодическое решение, если $F_0 = 1$. Решая это уравнение, фиксируем безразмерное вертикальное смещение колеса в следующем виде:

$$\frac{y_w}{l} = -\frac{A_0}{M_0} \sum_{m \neq 0} \frac{F_m N((m\omega_0)^2)}{(m\omega_0)^2 D((m\omega_0)^2)} \exp\left(\frac{i2\pi m v_0 t}{l}\right), \quad (18)$$

$$M_0 = \frac{m_0 l^3}{EJ_a}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi v_0}{l},$$

$$N(\omega^2) = 1 - (\delta_{11} m_a + m_b c_0^{-1}) \omega^2 + m_a m_b \Delta \omega^4;$$

$$D(\omega^2) = 1 + \frac{m_w m_a m_b \Delta \omega^4}{m_0} - \frac{(m_a (\delta_{11} m_w + \delta_{22} m_b) + m_w m_b c_0^{-1}) \omega^2}{m_0}.$$

Если изгибная жесткость оси колесной пары EJ_a обращается в бесконечность, то четыре упругих коэффициента δ_{11} , $\delta_{12} = \delta_{21}$ и δ_{22} , а также величина Δ становятся равными нулю. При этом статическая жесткость колесной пары A_0 обращается в бесконечность, а вся неподдрессоренная масса представляется одним твердым телом. И тогда величины $N(\omega^2)$ и $D(\omega^2)$ становятся равными единице.

Уравнение $\omega^2 D(\omega^2) = 0$ имеет три корня. Если $\omega^2 = 0$, то снова $N(\omega^2) = 1$ и $D(\omega^2) = 1$, а равенство (18) переходит в равенство,

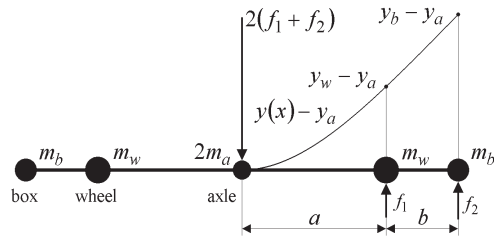


Рис. 4.

представляющее колесную пару в виде одной массы. Таким образом, нулевой корень соответствует симметричным колебаниям колесной пары как твердого тела. В этом случае ее ось представляет собой горизонтальную прямую, которая показана в верхней части рис. 7. Два ненулевых корня определяют две частоты f_1 и f_2 свободных гармонических колебаний гибкой колесной пары, связанной с буксами.

Пусть $a = 2b$, $A_0 = 3 \times 10^8$ Н/м, $m_w = 400$ кг, $m_a = 200$ кг, $m_b = 300$ кг и $m_0 = m_w + m_a + m_b = 900$ кг. Тогда обе величины $f_1 = 133$ Гц и $f_2 = 566$ Гц хорошо согласуются со значениями, полученными экспериментально или, например, при помощи расчета собственных колебаний упругой колесной пары методом конечных элементов. Приравняв к нулю коэффициенты F_n в правых частях дифференциальных уравнений (17), делаем систему трех дифференциальных уравнений однородной и определяем с ее помощью свободные гармонические колебания связанной с буксами колесной пары.

Две моды собственных колебаний гибкой колесной пары соответствуют упомянутым частотам f_1 и f_2 . Эти моды также присутствуют на рис. 5. В средней его части изображена мода, относящаяся к низшей частоте f_1 , а в нижней части — мода, отвечающая высшей частоте f_2 . В обоих случаях две кривые, являющиеся зеркальным отображением друг друга, иллюстрируют положения оси симметрии колесной пары, находящиеся в противофазе. Черные кружки отмечают положения упомянутых выше масс.

Как показывает рис. 5, массы m_w и m_b , соответствующие колесу и буксе, колеблются в противофазе.





В первом случае, относящемся к низкой частоте собственных колебаний, масса m_a в середине колесной пары, и масса колеса m_w находятся в одной и той же фазе. Два узла, симметричных относительно середины колесной пары, расположены вблизи колес. Поэтому колебания колес малы по сравнению с колебаниями букс и середины оси колесной пары. То есть колебания колес не существенны.

Во втором случае, относящемся к высшей частоте собственных колебаний, масса m_a и масса колеса m_w колеблются в противофазе, а ось симметрии колесной пары имеет четыре узла, симметрично расположенных между массами m_b , m_w и m_a . И колебания всех масс одинаково существенны.

Вынужденные симметричные колебания гибкой колесной пары состоят из трех частей. Первая – это поступательные колебания недеформируемой колесной пары. Две описанных ранее моды являются второй и третьей частями.

Сопоставим вертикальные смещения колеса и рельса. Учитывая упругое статическое приближение колеса к рельсу, получим равенство $y_w = y_0 + y(v_0 t, t) - \chi$. Разделим все члены полученного равенства на шаг шпал l . Принимая во внимание ряды Фурье (3), (9), (10), (14), (18) и собирая в левой части все слагаемые последнего равенства, содержащие F_n , получим следующее бесконечное множество алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{(1-v^2)p_0}{\pi hEl} \left(\ln \frac{(1-v^2)p_0}{4\pi hEr_0} + 2 \right) + \frac{A_0 N(m\omega_0^2)}{M_0(m\omega_0)^2 D(m\omega_0^2)} \right] F_m - \\ & - \frac{(1-v^2)p_0}{\pi hEl} \sum_{k \neq 0} R_k F_{m-Lk} + \\ & + A_0 \sum_{n \neq 0} F_n W(m, n, 0) = \\ & = - \frac{a_0}{Rl} \sum_{k \neq 0} \Delta(m-Lk) \frac{J_k(kR)}{k^2} + \frac{(1-v^2)p_0}{\pi hEl} \\ & P_m - A_0 W(m, 0, 0), \quad m \uparrow 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $\Delta(0)=1$. Иначе $\Delta(m-Lk)=0$.

Полученные ранее уравнения содержат неизвестные коэффициенты F_n . Второе слагаемое в правой части каждого уравнения (19) учитывает нелинейные эффекты. Различные гармоники могут взаимодействовать друг с другом благодаря этому слагаемому. Исключая второе слагаемое, подсчитаем безразмерные коэффициенты F_n . Далее определим начальное (положительное) давление p при помощи равенства (7), а затем вычислим безразмерные коэффициенты P_n при помощи второго равенства (8). Подставляя найденные величины в правую часть равенства (19), получим уточненные значения безразмерных коэффициентов F_n и давления p . Если давление p оказывается отрицательным, то представленный расчет теряет смысл. Этот случай соответствует потере контакта колеса с рельсом.

РАСЧЕТЫ

Следующие параметры железнодорожного пути выбраны для вычислений: $EJ = 6,41 \times 10^6$ Нм², $\rho_0 = 60,3$ кг/м, $u_p = 133 \times 10^6$ Н/м², $r_p = 46 \times 10^3$ Нс/м², $\rho_1 = 300$ кг/м, $u_b = 41,7 \times 10^6$ Н/м², $r_b = 58 \times 10^3$ Нс/м². Статическая нагрузка на колесо p_0 равна 90000 Н.

На рис. 6 представлены амплитуды, относящиеся к первым шестнадцати гармоникам периодически изменяющегося давления p колеса на рельс. Эти амплитуды, зависящие от скорости поезда v_0 , вычислены для радиуса колеса $r_0 = 0,5$ м, амплитуды волны на поверхности катания рельса $a_0 = 0,05$ мм и длины этой волны $\lambda = 75$ мм. Таким образом, безразмерное отношение $L = l/\lambda = 8$ является целым, а безразмерный параметр $R = r_0/r_1 = 0,18$ достаточно мал. Однако этот параметр может существенно влиять на гармоники высокого порядка. Вычисления выполнены для скорости поезда v_0 от нуля до 200 км/ч.

Кривые в верхней и средней частях рис. 6 относятся к периодической модели желез-

нодорожного пути, показанной на рис. 2. Последовательные колесные пары, представленные на рис. 4, удалены друг от друга соответственно на расстояния 60 и 120 м. Кривые 1 как в верхней, так и средней частях рисунка изображают амплитуду восьмой гармоники, частота которой равна частоте прохождения волн на поверхности катания рельса. Обе кривые 2 изображают амплитуду шестнадцатой гармоники, частота которой равна удвоенной частоте прохождения волн на поверхности катания рельса. Наконец, кривые 3 показывают амплитуду первой гармоники, частота которой равна частоте прохождения шпал.

Все кривые в верхней части рис. 6 тождественны тем же самым кривым в средней его части. Следовательно, вид этих кривых не зависит от расстояния между последовательными колесными парами. Если такое расстояние равно 60 м, то взаимодействие колесных пар пренебрежимо мало, а каждая из пар в последовательности может рассматриваться как единственная.

При рассматриваемых высокочастотных колебаниях длина бегущих изгибных волн в рельсе имеет порядок 1 м. Для достаточно точного описания изгиба под действием бесконечного ряда движущихся колесных пар примем в расчет волны от 0,05 до 60 м (14). Это требует суммирования 2400 членов ряда.

При наибольшей скорости движения поезда, равной 200 км/ч, частота прохождения волн на поверхности катания рельса с длиной 75 мм будет 741 Гц и она превосходит частоту собственных колебаний (566 Гц) второй симметричной изгибной моды колесной пары. Частота прохождения волн на поверхности катания рельса совпадает с частотами f_1 и f_2 свободных колебаний колесной пары при скорости поезда 36 и 154 км/ч. На кривых 1 имеются заметные особенности, соответствующие этим скоростям. Однако около скорости 36 км/ч отсутствуют значительные изменения в кривых, и это обстоятельство согласуется с предшествующим исследованием первой моды изгибных собственных колебаний колесной пары. Изменения около скорости 154 км/ч более значительны. В этом режиме сильно колеблющиеся буксы и ось колесной пары действуют на колеса как ди-

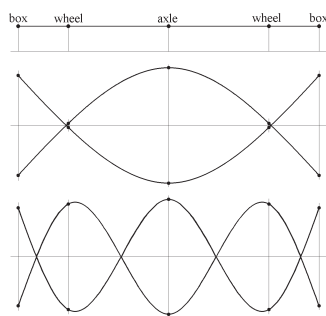


Рис. 5.

намический гаситель колебаний. При скорости менее 36 км/ч изгиб оси колесной пары не имеет особого значения, а колесная пара может рассматриваться как твердое тело. При скорости движения более 36 км/ч тот же изгиб существенно влияет на взаимодействие колеса и рельса с волнами на поверхности катания.

Кривые 2 представляют амплитуды колебания силы взаимодействия колеса и рельса с частотой, равной удвоенной частоте колебаний, представленных кривыми 1. Поэтому аналогичные особенности кривых 2 соответствуют вдвое меньшим скоростям движения 18 и 77 км/ч. Приведенные выше расчеты показывают, что колебания средней части оси колесной пары существенно влияют на взаимодействие колеса и рельса. Это оправдывает представление неподдрессоренной массы при помощи пяти сосредоточенных масс.

На кривых в верхней и средней частях рис. 6 наблюдаются многочисленные острые пики, располагающиеся во всем диапазоне скоростей движения поезда. Первый из них находится на кривой 3 и соответствует скорости 23 км/ч. Причина появления большого числа пиков заключается во взаимном влиянии частоты прохождения шпал и частоты волн на поверхности катания рельсов. Всплески появляются, если одно из кратных подобным двум частотам или сумма двух таких кратных частотам совпадают с какой-либо резонансной частотой механической системы. Пики отмечают скорости, при которых могут возникнуть неустойчивость вертикальных колебаний колесной пары [см. 13,14] и потеря контакта между колесом и рельсом с последующим ударом. В этом случае возможен рост волнообразного износа рельсов.



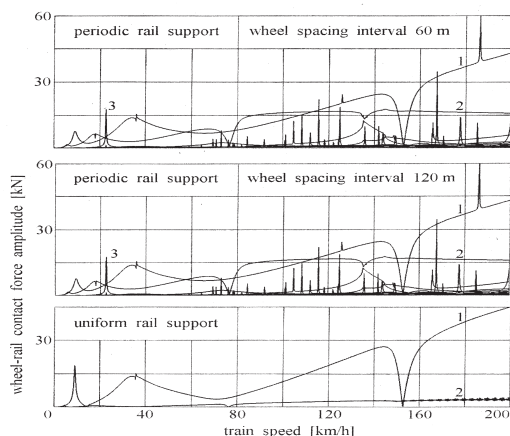


Рис. 6.

С целью сравнения двух моделей железнодорожного пути: с периодической поддержкой рельсов шпалами и поддержкой их однородным упругим основанием [1,15] вторая модель также исследована. Вычисления, выполненные с теми же параметрами пути, представлены в нижней части рис.6. Кривые 1 и 2 имеют тот же смысл. Для устранения взаимодействия последовательных колесных пар через рельсы, опирающиеся на однородное упругое основание, расстояние между ними принято равным 600 м. Оно в десять раз больше расстояния, принятого при расчете периодической модели железнодорожного пути. Это различие можно объяснить тем, что каждая шпала демпфирует волны в рельсах и расщепляет их на прямую и обратную волну. Соседние шпалы снова демпфируют и расщепляют эти волны и т. д. Поэтому периодический путь гасит волны в рельсах быстрее, чем путь с однородным упругим основанием. По-видимому, тем объясняется и сохранение периодического железнодорожного пути в течение столетий.

Отмеченные особенности кривых 1 и 2 в верхней и средней частях рис. 6 наблюдаются и в условиях однородного упругого основания пути. Однако острые пики тут отсутствуют. Таким образом, появление пиков связано с периодической структурой железнодорожного пути. Кривые 1, соответствующие частоте прохождения волн на поверхности катания рельса, выглядят почти одинаково как

в варианте периодической, так и однородной модели пути. Исключение составляют два острых пика в первом случае. Кривые 2 при удвоенной частоте прохождения волн выглядят различно, поскольку периодическая модель пути способствует появлению гармоник высшего порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Belotserkovskiy P. M. Nonlinear interaction between flexible wheel-sets via corrugated rails, M. J. Brennan ed. 10th International Conference RASD 2010, Southampton, England, 2010. CD.
2. Belotserkovskiy P. M., Pugina L. V. Roll of a flexible wheelset over corrugated rails: influence of the wheel radius, I. Zobory ed. Proceedings of the 10th Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies VSDIA 2006. Budapest, Hungary, 2006, pp. 123–130.
3. Белоцерковский П. М., Пугина Л. В. Качение колеса по рельсу с волнообразным износом// Прикладная математика и механика. — 2008, — Том 72, Вып. 3. — С. 421–430.
4. Belotserkovskiy P. M. Nonlinear interaction between a flexible wheel-set and severely corrugated rails, M. J. Brennan ed. 7th European Conference on Structural Dynamics, Southampton, England, 2008. CD.
5. Белоцерковский П. М. Взаимодействие бесконечного ряда колес с постоянным шагом, равномерно движущихся по рельсовому пути// Прикладная математика и механика. — 2004. — Том 68, Вып. 6. — С. 1025–1034.
6. Belotserkovskiy P. M. Interaction between a railway track and uniformly moving tandem wheels. Journal of Sound and Vibration, 298, 855–876, 2006.
7. Igeland A., Ilias H. Rail head corrugation growth prediction based on non-linear high frequency vehicle/track interaction. Wear, 213, 90–97, 1997.
8. Abramowitz M., Stegun I. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Bureau of Standards, Washington, 1964 (Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. — М.: Наука, ред., 1979).
9. Fluegge W. ed. Handbook of Engineering Mechanics. McGraw-Hill. N.Y., 1962.
10. Grassie S. L., Gregory R. W., Harrison D., Johnson K. L. The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation. Journal of Mechanical Engineering Science, 24, 77–90, 1982.
11. Ripke B. Hochfrequente Gleismodellierung und Simulation der Fahrzeug-Gleis-Dynamik unter Verwendung einer nichtlinearen Kontaktdynamik, VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 12, No. 249, VDI-Verlag, Duesseldorf, 1995.
12. Kremer M. Comparison of dynamical simulation methods by using rail-bus models of different degree-of-freedom, I. Zobory ed. Proceedings of the 11th Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies VSDIA 2008. Budapest, Hungary, 2008, pp. C. 259–268.
13. Весницкий А. И., Метрикин А. В. Параметрическая неустойчивость колебаний тела, равномерно движущегося по периодически неоднородной упругой системе// Прикладная механика и техническая физика. — 1993. — № 2. — С. 127–133.
14. Белоцерковский П. М. Исследование вер-

тикальных параметрических колебаний и устойчивости движения нагруженного колеса по рельсу// Транспорт: наука, техника, управление. — 2000. — № 2. — С. 39–44.

15. Белоцерковский П. М. Нелинейная контактная механика на рельсах с короткими волнами// Мир транспорта. — 2011. — № 3. — С. 4–13. ●

INTERACTION BETWEEN FLEXIBLE WHEEL-SET AND CORRUGATED RAILS

Belotserkovskiy, Pavel M. – D.Sc. (Tech), professor of the department of higher mathematics of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russia.

Railway track represents a periodic structure. In the presence of short-pitch rail corrugation, a wheel moving at high speed induces the vibrations whose frequency is greater than the frequency of the second symmetric flexural mode of a wheel-set. Therefore, the wheel-set cannot be regarded as a rigid body. In this study, the wheel-set is modeled by means of five lumped masses connected to a weightless flexible axle. These masses correspond to the boxes, to the wheels

and to the wheel-set axle. Contact deformation due to a periodic contact force between the wheel and the rail causes an approach of the wheel centre to the rail centre-line. This approach is calculated by means of non-linear contact mechanics. The periodically varying curvature of the rail vertical profile causes periodic variation in the wheel-rail contact stiffness whose period equals the corrugation length. The above force is determined by means of Fourier series.

Key words: rail track, periodical model, wheel rolling, wavy wear of the rail, corrugated rails, flexible wheelset, resiliency pattern, Poisson ratio, Fourier series, boundary-value problem, comparative computations.

REFERENCES

1. Belotserkovskiy P. M. Nonlinear interaction between flexible wheel-sets via corrugated rails, M. J. Brennan ed. 10th International Conference RASD 2010, Southampton, England, 2010. CD.
2. Belotserkovskiy P. M., Pugina L. V. Roll of a flexible wheelset over corrugated rails: in-fluence of the wheel radius, I. Zobory ed. Proceedings of the 10th Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies VSDIA 2006. Budapest, Hungary, 2006, pp. 123–130.
3. Belotserkovskiy P. M., Pugina L. V. Wheel rolling over the wavy worn rail [*Kachenie kolesa po relsu s volnoobraznym iznosom*]. *Prikladnaya matematika* [Applied Mathematics], 2008, vol.72, Iss. 3, pp.421–430.
4. Belotserkovskiy P. M. Nonlinear interaction between a flexible wheel-set and severely corrugated rails, M. J. Brennan ed. 7th European Conference on Structural Dynamics, Southampton, England, 2008. CD.
5. Belotserkovskiy P. M. Interaction of infinite series of the wheels with fixed lead moving uniformly by rail track [*Vzaimodeistvie beskonечноgo riada kolios s postoyannym shagom, ravnomerno dvizhuschihsia po relsovomu puti*]. *Prikladnaya matematika i mehanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 2004, vol.68, Iss. 6, pp.1025–1034.
6. Belotserkovskiy P. M. Interaction between a railway track and uniformly moving tandem wheels. *Journal of Sound and Vibration*, 298, 855–876, 2006.
7. Igeland A., Ilias H. Rail head corrugation growth prediction based on non-linear high frequency vehicle/track interaction. *Wear*, 213, 90–97, 1997.
8. Abramowitz M., Stegun I. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Bureau of Standards, Washington, 1964 (Russian translation. Moscow, Nauka editions, 1979).
9. Fluegge W. ed. Handbook of Engineering Mechanics. McGraw-Hill. N.Y., 1962.
10. Grassie S. L., Gregory R. W., Harrison D., Johnson K. L. The dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 24, 77–90, 1982.
11. Ripke B. Hochfrequente Gleismodellierung und Simulation der Fahrzeug-Gleis-Dynamik unter Verwendung einer nichtlinearen Kontaktdynamik, VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 12, No. 249, VDI-Verlag, Duesseldorf, 1995.
12. Kremer M. Comparison of dynamical simulation methods by using rail-bus models of different degree-of-freedom, I. Zobory ed. Proceedings of the 11th Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies VSDIA 2008. Budapest, Hungary, 2008, pp. 259–268.
13. Vesnitsky A. I., Metrikin A. V. Parametric instability of oscillations of a solid moving uniformly over periodically not uniform elastic system [*Parametricheskaya neustoiichivost kolebaniy tela, ravnomerno dvizhushegosia po periodicheski neodnorodnoy uprugoy sisteme*]. *Prikladnaya mehanika i tehnikeskaya fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 1993, Iss.2, pp.127–133.
14. Belotserkovskiy P. M. A study on vertical parametric oscillations and stability of a loaded wheel moving along the rail [*Issledovanie vertikalnykh parametricheskikh kolebaniy i ustoichivosti dvizheniya nagruzhennogo kolesa po relsu*]. *Transport: nauka, tekhnika, upravlenie* [Transport: science, technics, management], 2000, Iss.2, pp.39–44.
15. Verichev S. N., Metrikine A. V. Instability of vibrations of a mass that moves uniformly along a beam on a periodically inhomogeneous foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 260, 901–925, 2003.
16. Belotserkovskiy P. M. Nonlinear Contact Mechanics on the Rails with Short Waves. *Mir Transporta* [World of Transport and Transportation Journal], 2011, Vol.36, Iss.3, pp.4–13.

Координаты автора (contact information): Белоцерковский П.М. (Belotserkovskiy P.M.) – belotserk1936@rambler.ru

Статья поступила в редакцию / received 12.11.2012
Принята к публикации / accepted 23.12.2012

