



Модели транспортного типа по критерию времени с обработкой ресурсов в пунктах назначения



Николай НЕЧИТАЙЛО

Nikolay M. NECHITAYLO

В отличие от классической транспортной задачи по критерию минимума общего времени автор исходит из того, что ресурсы не только должны быть доставлены из исходных пунктов в пункты назначения, но и подвергнуты там дополнительной обработке. Задача считается выполненной лишь после доставки и окончания обработки всех ресурсов, участвующих в транспортной операции. В ходе сопутствующего достижению этой цели моделирования использована разновидность метода последовательного сокращения невязок – венгерский метод. Для сокращения числа шагов алгоритма предложена процедура уточнения нижней границы целевой функции.

Ключевые слова: транспортная задача, критерий минимума времени, ресурсы, пункты назначения, затраты на обработку.

Нечитайло Николай Маркович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Информатика» Ростовского государственного университета путей сообщения.

Классическая транспортная задача по критерию минимума общего времени [1, 2, 4] не предполагает дополнительной обработки ресурсов в пунктах назначения. В нашем случае такая обработка присутствует, и продолжительность ее линейно зависит от объёма наличествующей партии. Наиболее простой вариант – обработка каждой партии ресурса начинается по прибытии в пункт назначения. В варианте же соизмеримости затрат на транспортировку и обработку ресурсов появляется необходимость учёта очередей на обслуживание.

Рассматриваемая задача имеет много общего с транспортной задачей с фиксированными доплатами [3], для решения которой используются либо приближённые методы (за счёт линеаризации целевой функции), либо трудоёмкие комбинаторные. Ввиду минимаксного характера заданной целевой функции решение нашей задачи удалось свести к конечной последовательности задач, вычислительная сложность которых не выше полиномиальной.

В этой связи представляется целесообразным учитывать ограниченные перерабатывающие возможности пунктов назначения (например, портов) при разработке планов прибытия поездов, прежде всего

с экспортными грузами, для сокращения сроков разгрузки и предотвращения заторов на подъездных путях.

МОДЕЛЬ БЕЗ УЧЁТА ОЧЕРЕДЕЙ НА ОБРАБОТКУ

Задача заключается в определении такого плана перевозок $\|x_{ij}\|$, при котором выполняются ограничения

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i, \quad i=1..m; \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\leq b_j, \quad j=1..n; \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i=1..m; j=1..n. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь a_i – величина ресурса в исходном пункте A_i ;

b_j – потребности в ресурсе в пункте назначения B_j ;

x_{ij} – объём ресурса, перемещаемого по маршруту $A_i \rightarrow B_j$.

При этом минимизируется функция $F = \max_{x_{ij}} f(x_{ij})$, (2)

где $f(x_{ij})$ – функция, определяемая следующим образом:

$$f(x_{ij}) = \begin{cases} t_{ij} + t_j x_{ij}, & \text{если } x_{ij} > 0, \\ 0, & \text{если } x_{ij} = 0; \end{cases} \quad (3)$$

t_{ij} – время доставки ресурсов по маршруту $A_i \rightarrow B_j$;

t_j – время, затрачиваемое в пункте B_j на обработку единицы ресурса.

Предлагается, определив нижнюю границу целевой функции F (обозначим её как F_n), вычислить ограничения d_{ij} на величину перевозимого продукта по каждому направлению и свести решение задачи к конечной последовательности подзадач о максимальном транспортном потоке в сети с ограниченными пропускными способностями коммуникаций. Ограничимся применением венгерского метода, поскольку для его реализации нет необходимости ни в сведении задачи к сбалансированному виду, ни в принятии мер борьбы с вырожденностью.

Если в результате решения задачи о потоке все столбцы матрицы перевозок ока-

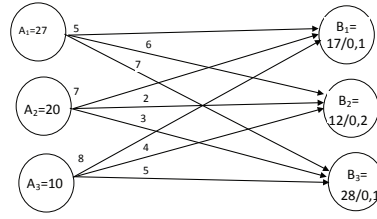


Рис. 1. Сеть иллюстративного примера.

жутся закрытыми (потребности пунктов назначения удовлетворены) либо будут вывезены все ресурсы из исходных пунктов, то оптимальное решение найдено. Если же закрытыми окажутся не все столбцы матрицы, то значение F_n следует увеличить на величину ΔF и исходя из этого нового значения нижней границы произвести пересчёт d_{ij} , и снова решить задачу о максимальном транспортном потоке. Если в результате решения не все столбцы матрицы перевозок окажутся закрытыми, то опять увеличивается значение F_n и повторяются указанные шаги алгоритма.

Процедуру определения F_n рассмотрим на примере, представленном в виде сети на рис. 1 и матриц перевозок (таблицы 1–4). Цифры над линиями, соединяющими пункты сети, и цифры в правых верхних углах ячеек матриц перевозок представляют собой времена движения между соответствующими пунктами. Цифры в окружностях на рис. 1 – ресурсы и потребности пунктов. Для B_1, B_2, B_3 в окружностях в виде знаменателя указано время обработки единицы полуфабриката.

Исходя из (2, 3), предлагается определить F_n по формуле:

$$F_n = \max_j \{ \min_i [t_{ij} + \min(a_i, b_j) t_j] \} \quad (4)$$

Для иллюстративного примера F_n будет равна $t_{11} + B_1 t_1 = 6,7$. В таблице 1 представлена матрица, в левых нижних углах ячеек которой записаны пропускные способности маршрутов при условии, что $F_n = 6,7$.

Чтобы сократить число шагов алгоритма, целесообразно уточнить F_n . Для этого надо вычислить d_{ij} по следующему правилу:

$$d_{ij} = \begin{cases} \min_{i,j} \{a_i, b_j, (F_n - t_{ij}) \div (t_j)\}, & \text{если } t_j \geq 0, \quad t_{ij} \leq F_n; \\ 0, & \text{если } t_{ij} > F_n, \end{cases} \quad (5)$$





16

Таблица 1

Пропускные способности маршрутов при
 $F_n = 6,7$

	b_1	b_2	b_3
a_1	17	5	6
a_2	0	7	2
a_3	0	8	4

Таблица 2

Исходный план примера

	b_1	b_2	b_3	
a_1	17	5	6	7
a_2	4	7	2	3
a_3	0	8	4	5

Таблица 3

Результат перераспределения

	b_1	b_2	b_3	
a_1	17	5	6	7
a_2	4	7	2	3
a_3	0	8	4	5

где div — операция целочисленного деления (с отбрасыванием остатка).

Затем следует проверить выполнение условий разрешимости задачи:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n d_{ij} &\geq a_i, i=1...m, \\ \sum_{i=1}^m d_{ij} &\geq b_j, j=1...n. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

При невыполнении хотя бы одного из неравенств (6) необходимо увеличить значение F_n на величину ΔF . Затем исходя из нового значения F_n произвести пересчёт d_{ij} в соответствии с (5) и вернуться к проверке выполнения условий (6).

Из таблицы 1 видно, что установленные d_{ij} делают невозможным вывоз ресурсов

из первого исходного пункта. Для иллюстративного примера F_n после уточнения — 7,4.

Потом составляется исходный план перевозок, при этом назначение величины перевозки x_{ij} для очередной клетки матрицы должно производиться по правилу:

$$x_{ij} = \min(a'_i, b'_j, d_{ij}), \quad (7)$$

где a'_i, b'_j — ресурсы и потребности соответствующих исходных пунктов и пунктов назначения с учётом уже намеченных перевозок.

Исходный план иллюстративного примера представлен в таблице 2. В центре каждой клетки проставлены величины перевозок. Полученный вариант не является решением задачи, так как остались невывезенными 6 единиц груза из первого исходного пункта и неудовлетворёнными потребности третьего пункта назначения. В соответствующих строках и столбцах см. знаки «—». Согласно [4], закрытыми оказались только первый и второй столбцы, а поскольку среди чисел a'_i есть отличные от нуля, то транспортный поток может быть увеличен. Построение цепочки для его увеличения начинается с ячейки незакрытого столбца (в иллюстративном примере — третий столбец), которая обозначает возможность перевозки. В иллюстративном примере построенная цепочка отмечена знаками «+» и «—», расположенными в правых нижних углах ячеек.

Перераспределение перевозок заключается в изменении величины перевозок x_{ij} на величину Δx в соответствии со знаком цепочки для своей ячейки. Дополнительное ограничение, накладываемое на Δx :

$$\Delta x = \min\{\min_{i,j} x_{ij}, \min[(a'^*_{i^*}, b'^*_{j^*}), (d_{i^*,j^*} - x_{i^*,j^*})]\} \quad (8)$$

где $a'^*_{i^*}, b'^*_{j^*}$ — ресурсы и потребности исходных пунктов и пунктов назначения, относящихся к ячейкам, помеченным знаками «+»; с учётом уже намеченных перевозок;

(i^*, j^*) — ячейки цепочки, помеченные знаками «+»;

(i', j') — ячейки цепочки, помеченные знаками «—».

Результат перераспределения представлен в таблице 3. Этот план перевозок удовлетворяет ограничениям (1) и, следовательно, может считаться оптимальным. Анализ полученного плана показывает, что маршру-

том с наибольшим суммарным временем (транспортировка + обработка) является маршрут $A_1 \rightarrow B_3$, поскольку $x_{13} = d_{13}$, а значит, для него $F = F_n$.

Особенностью решения остается то, что число базисных переменных (в которых $x_{ij} > 0$) превышает $m + n - 1$. Можно попытаться избавиться от замкнутого цикла, образованного переменными x_{12} , x_{13} , x_{22} и x_{23} . Однако любая такая попытка приводит к недопустимому увеличению (превышающему F_n) либо переменной x_{12} , либо x_{13} , то есть к увеличению времени реализации плана перевозок.

МОДЕЛЬ С УЧЁТОМ ОЧЕРЕДЕЙ

Минимизируется функция (2), где $f(x_{ij})$ определена следующим образом:

$$f(x_{ij}) = \begin{cases} t_{ij} + t_j x_{ij} + f_{oc}(t_{ij}), & \text{если } x_{ij} > 0, \\ 0, & \text{если } x_{ij} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где

$$f_{oc}(t_{ij}) = \begin{cases} t_{ij} + t_j x_{ij} - t_{ij}, & \text{если } x_{ij} > 0, \\ t_{ij} > t_{i'j}, t_{ij} < t_{i'j} + t_j x_{ij}, & i \neq i', \\ 0, & \text{если } t_{ij} = \min_i t_{ij} \\ \text{либо } t_{ij} \geq t_{i'j} + t_j x_{ij}, \end{cases} \quad (10)$$

t_{ij} — время доставки ресурсов по маршруту $A_i \rightarrow B_j$;

t_j — время, затрачиваемое в пункте B_j на обработку единицы ресурса.

Значение целевой функции при решении задачи без учёта очередей не превышает величины целевой функции в случае их учёта. В этой связи оптимальный ответ может быть получен на основе решения задачи без очередей с последующим пересчётом времён движения ресурсов до пунктов назначения и их последующей обработки в этих пунктах с учётом очередей. Затем следует принять меры для уменьшения (в предельном случае — исключения) вариантов критической перевозки, перераспределив ресурсы по маршрутам. Такая цель достижима за счёт уменьшения d_{ij}^* критического маршрута до величины $d_{ij}^* = x_{ij}^* - 1$ (где x_{ij}^* — критическая перевозка) и повторного решения задачи.

Таблица 4

План перевозок без учёта очередей ($F_n = 44$)

	b_1	b_2
a_1	16 27	5 11 6
a_2	20 20	7 20 2
a_3	10	8 10 4

Если значение целевой функции нового решения после пересчёта времён с учётом очередей не превышает значения целевой функции предыдущего плана, то уменьшение величины критической перевозки прошло успешно и процедуру надо продолжить. В противном случае либо в случае отсутствия допустимого решения следует вывод о невозможности уменьшения критической перевозки и о том, что на предыдущем шаге получен оптимальный план.

Процедуру определения нижней границы целевой функции рассмотрим на примере, представленном в виде сети на рис. 2 и матриц перевозок (таблицы 4–6). Для B_1 , B_2 в окружностях в виде знаменателя указано время обработки единицы полуфабриката в пункте пребывания.

Исходя из (9, 10) достаточно обоснованное значение нижней границы целевой функции может быть найдено в соответствии с выражением

$$F_n = \max_j \{ \min_i t_{ij} + b_j t_j \}. \quad (11)$$

Для иллюстративного примера нижняя граница целевой функции, определённая согласно (11), будет $t_{22} + B_2 t_2 = 44$. В таблице 4 представлена матрица, в которой в правых верхних углах ячеек проставлены времена движения по соответствующим маршрутам, а в левых нижних углах — пропускные способности маршрутов при условии, что $F_n = 44$. В этой же таблице указан допустимый

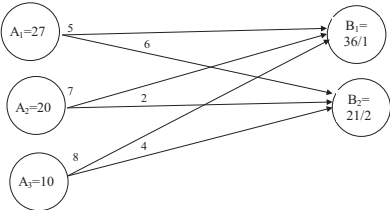


Рис. 2. Сеть иллюстративного примера.





Таблица 5

План перевозок при $d^*_{12} = x^*_{12} - 1 = 10$

	b_1	b_2
a_1	5 17 27	6 10 10
a_2	7 19 20	2 1 12
a_3	8 10	4 10

план перевозок для задачи без учёта очередей (в центре каждой клетки проставлены величины перевозок).

Чтобы определить значения целевой функции представленного плана для случая учёта очередей на обработку ресурсов, рассчитаем времена движения ресурсов по каждому маршруту:

$$\begin{aligned} f(x_{11}) &= t_{11} + t_1 * x_{11} = 5 + 16 = 21; \\ f(x_{21}) &= \max\{t_{21}, t(x_{11})\} + t_1 * x_{21} = 21 + 20 = 41; \\ f(x_{32}) &= t_{32} + t_2 * x_{32} = 4 + 20 = 24; \\ f(x_{12}) &= \max\{t_{12}, t(x_{32})\} + t_2 * x_{12} = 24 + 22 = 46. \end{aligned}$$

Таким образом, время реализации плана перевозок, представленного в таблице 4, составляет 46 единиц ($F = f(x_{12})$). Поскольку $F > F_n$, следует попытаться улучшить решение за счёт уменьшения пропускной способности критического маршрута (для иллюстративного примера — маршрута $A_1 \rightarrow B_2$).

Установим $d^*_{12} = x^*_{12} - 1 = 10$ и вновь решим задачу без учёта очередей. Полученный план перевозок представлен в таблице 5.

Для нового плана перевозок рассчитаем времена движения ресурсов по каждому маршруту:

$$\begin{aligned} f(x_{11}) &= t_{11} + t_1 * x_{11} = 5 + 17 = 22; \\ f(x_{21}) &= \max\{t_{21}, t(x_{11})\} + t_1 * x_{21} = 22 + 19 = 41; \\ f(x_{22}) &= t_{22} + t_2 * x_{22} = 2 + 2 = 4; \\ f(x_{32}) &= \max\{t_{32}, t(x_{22})\} + t_2 * x_{32} = 4 + 20 = 24; \\ f(x_{12}) &= \max\{t_{12}, t(x_{32})\} + t_2 * x_{12} = 24 + 10 = 44. \end{aligned}$$

Поскольку в полученном плане $F = 44 = F_n$, можно сделать вывод об оптимальности полученного плана. Тем не менее для избавления от замкнутых циклов процедуру уменьшения количества ресурсов, перебираемых по критическому маршруту, целесообразно продолжить. Так, в таблице 6 представлен план перевозок, в котором $d^*_{12} = 0$.

Для этого нового плана перевозок рассчитаем времена движения ресурсов по каждому маршруту:

Таблица 6

План перевозок при $d^*_{12} = 0$

	b_1	b_2
a_1	5 27 27	6 0
a_2	7 9 20	2 11 12
a_3	8 10	4 10

$$\begin{aligned} f(x_{11}) &= t_{11} + t_1 * x_{11} = 5 + 27 = 32; \\ f(x_{21}) &= \max\{t_{21}, t(x_{11})\} + t_1 * x_{21} = 32 + 9 = 41; \\ f(x_{22}) &= t_{22} + t_2 * x_{22} = 2 + 22 = 24; \\ f(x_{32}) &= \max\{t_{32}, t(x_{22})\} + t_2 * x_{32} = 24 + 20 = 44. \end{aligned}$$

И, наконец, в общем случае каждый пункт назначения (обработки) может рассматриваться как многоканальная система обслуживания. Эта система характеризуется не только суммарными возможностями по переработке ресурсов, прибывающих из исходных пунктов, но и временем, затрачиваемым одним каналом на обработку единицы ресурса — t_j , не зависящим от пункта отправления ресурса, и числом таких каналов z_j . Иными словами, z_j — количество ресурса, которое способен одновременно обработать j -й пункт за время t_j .

Таким образом, задача заключается в определении такого плана перевозок $\|x_{ij}\|$, когда выполняются ограничения (1) и достигается своего минимально возможного значения функция (2), в которой функция $f(x_{ij})$ представлена следующим образом:

$$f(x_{ij}) = \begin{cases} t_{ij} + t_j(x_{ij} + z_j - 1) \operatorname{div}(z_j) + f_{оч}(t_{ij}), & \text{если } x_{ij} > 0, \\ 0, & \text{если } x_{ij} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$f_{оч}(t_{ij}) = \begin{cases} t_{ij} + t_j(x_{i'j} + z_j - 1) \operatorname{div}(z_j) - t_{ij}, & \text{если } x_{i'j} > 0, \\ t_{ij} > t_{i'j} \text{ и } t_{ij} < t_{i'j} + t_j x_{i'j}, i \neq i', & \\ 0, & \text{если } t_{ij} = \min_i t_{ij} \\ \text{либо } t_{ij} \geq t_{i'j} + t_j x_{i'j} & \end{cases} \quad (13)$$

Из этого вытекает, что решение задачи с многоканальным характером обработки может быть сведено к решению задачи, имеющей по одному каналу обработки в каждом из пунктов назначения. Причем в простейшем случае есть основание считать, что время на обработку единицы ресурса в многоканальном пункте обработки в z_j раз меньше времени, затрачиваемого одним каналом, и равно $t'_j = t_j/z_j$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. — М.: Наука, 1969. — 384 с.
2. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1967. — 460 с.
3. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. Дискретное программирование. — М.: Наука, 1969. — 370 с.
4. Триус Е. Б. Задачи математического программирования транспортного типа. — М.: Наука, 1967. — 208 с.

TIME-BASED TRANSPORTATION PATTERNS AND THEIR ADJUSTMENT FOR RESOURCES PROCESSING TIMETABLE AT POINTS OF DESTINATION

Nechitaylo, Nikolay M. – Ph. D. (Tech), associate professor at the department of informatics of Rostov State University of Railway Engineering, Rostov-on-the-Don, Russia.

Classical minimum-time transportation problem [1, 2, 4] doesn't assume any supplementary processing of resources at the points of destination. The elementary variant supposes that the processing of each consignment begins immediately after it arrives at the destination. It is a model without process queues.

The model of commensurability of transportation and processing costs considers process queues.

The problem under consideration supposes that the resources should not only be shipped from the origin to destination point but also should undergo a secondary processing at the destination. The problem is solved, once all the resources within a transfer operation have been delivered and processed. The study examines a case of such a processing and shows that the transfer length linearly depends on the volume of present consignment.

Besides, each point of destination (processing) can be regarded as a multichannel service system. The features of such a system include aggregate capacity of processing of arriving resources as well as the time of processing by one of the channels of a resource unit (t_j), which doesn't depend on origin point of carriage, and the quantity of the channels (z_j), being equal to the quantity of resources that a given j -point can process during t_j time.

The solution of a problem with multichannel processing can be reduced to solution of a

problem of one processing channel at every point of destination. In an elementary case it is reason to believe that the time of processing of resource unit at multichannel processing point is z_j times less than the time of processing of similar unit by a sole channel and is equal to $t'_j = t_j/z_j$.

The examined problem has much in common with excess fare transportation problem [3]. The solution of excess fare transportation problem is found with the help of approximate method (linearization of efficiency function) or of labor-consuming combinatoric method. See the minimax character of the defined efficiency function, the solution of the examined problem reduces to finite sequence of problems whose computational complexity doesn't exceed a polynomial one. Meanwhile there is the assumption that a processing time at any destination point depends on the volume of processed consignment. That is why such problems are generalized minimax transportation problems. The Hungarian method, that is a variant of sequential reduction of misalignments, permits to solve the problem. A proposed technique of adjusting of a lower bound of the efficiency function reduces the number of steps within the algorithm.

The adoption of the model permits to consider limited processing capacity of the points of destination (for instance of sea ports) during planning of train arrivals (especially those with exported freight) in order to reduce unloading time and to avoid traffic jams on house tracks.

Key words: transport problem, criterion of the minimum of time, resources, station of destination, processing costs.

REFERENCES

1. Golshtein E. G., Yudin D. B. Problems of linear programming of transport type [*Zadachi lineinogo programmirovaniya transportnogo tipa*]. Moscow, Nauka publ., 1969. 384 p.
2. Zuhovitsky S. I., Avdeeva L. I. Linear and convex programming [*Lineinoe i vypukloe programmirovaniye*]. Moscow, Nauka publ., 1967. 460 p.

3. Korbut A. A., Finkelshtein Yu.Yu. Korbut A. A., Finkelshtein Yu.Yu. Discrete programming [*Diskretnoe programmirovaniye*]. Moscow, Nauka publ., 1969. 370 p.
4. Trius E. B. Problems of mathematical programming of transport type [*Zadachi matematicheskogo programmirovaniya transportnogo tipa*]. Moscow, Nauka publ., 1967. 208 p.

Координаты автора (contact information): Нечитайло Н. М. (Nechitaylo N. M.) – nechitaylo2007@rambler.ru.

Статья поступила в редакцию / received 30.08.2012
Принята к публикации / accepted 06.11.2012

