

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

УДК 656.1

DOI: <https://doi.org/10.30932/1992-3252-2024-22-3-2>

Особенности использования метода нормированного размаха и фрактального анализа при изучении интенсивности потока автомобильного транспорта



Михаил БОЯРШИНОВ

Михаил Геннадьевич Бояршинов*Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия.**ORCID 0000-0003-4473-6776; Web of Science Researcher ID: ACE-0166-2022;**Scopus Author ID: 6506008407; ПИНЦ SPIN-код: 5958-2345; ПИНЦ Author ID:**79853; ColabID: R-38610-17352-TA83O; Google Scholar: Y4AT3SUAAAAJ.**✉ mgboyarshinov@pstu.ru.***АННОТАЦИЯ**

Актуальность изучения методов исследования транспортных потоков обусловлена необходимостью анализа их особенностей, определения допустимых областей их применения при решении практических задач транспортной отрасли.

Целью настоящей работы является выявление результатов использования современных методов анализа временных рядов, использующих значения интенсивностей потоков автомобильных транспортных средств на городской улично-дорожной сети. Предмет исследования – вычисляемые показатели Хёрста и фрактальной размерности (фрактальный анализ), а также проверка справедливости количественной взаимосвязи этих показателей, указанной Б. Мандельбротом и применяемой в прикладных исследованиях, на реальных данных об интенсивности потоков автомобильного транспорта. Цифровые данные для исследова-

ния получены с использованием стационарных измерительных программно-технических комплексов фото- и видеодетекции «Азимут», размещенных на улично-дорожной сети города.

Исследованием установлено, что при использовании метода нормированного размаха и фрактального анализа встречаются аномальные значения ключевых показателей: показатель Хёрста принимает значения за пределами обычно определяемого диапазона, соотношение между фрактальной размерностью и показателем Хёрста не вполне соответствует известному соотношению Б. Мандельброта. Представляется необходимым глубокое и доскональное исследование результатов, получаемых при применении указанных и, возможно, иных методов изучения интенсивности потоков автомобильного транспорта на улично-дорожной сети.

Ключевые слова: транспортный поток, интенсивность движения автомобилей, показатель Хёрста, фрактальная размерность, городской транспорт.

Для цитирования: Бояршинов М. Г. Особенности использования метода нормированного размаха и фрактального анализа при изучении интенсивности потока автомобильного транспорта // Мир транспорта. 2024. Т. 22. № 3 (112). С. 12–21. DOI: <https://doi.org/10.30932/1992-3252-2024-22-3-2>.

Полный текст статьи в переводе на английский язык публикуется во второй части данного выпуска.
English translation of the full text of the article is published in the second part of the issue.

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивность транспортного потока как временной ряд (функция времени), наряду с другими случайными процессами, относится к особому классу элементов функциональных пространств, которые, в отличие от гладких (дифференцируемых) функций, проявляют свойства фрактальности или самоподобия, то есть при многократном изменении масштаба переменных наблюдается воспроизведение структуры функции, уже зафиксированной на предыдущих масштабах [1, С. 36]. Для описания особых (фрактальных) свойств таких функций используется специально определяемое понятие фрактальной или дробной размерности Хаусдорфа – Безиковича [2, С. 22] (Минковского [3, С. 129]).

Фрактальный анализ с успехом применяется для исследования самоподобных стохастических процессов, характерных для сетевых трафиков и данных о солнечных вспышках [4], для исследования и прогнозирования землетрясений [5]. Моделирование [6] мультимодального распределения пористости нефтегазовых месторождений позволило выявить взаимосвязь показателя фрактальности со степенью нефтенасыщенности грунта.

Анализу фрактальных свойств временных рядов, моделирующих реальные стохастические процессы, посвящена работа [7]. Идентификация временного ряда на основе фрактального анализа с учетом хаотичности предложена в [8]. Классификация стационарных, нестационарных и квазипериодических сигналов разработана автором [9]. В [10; 11] рекомендуется использовать критическое значение фрактальной размерности в качестве индикатора кризисного состояния (катастрофы) рассматриваемой системы. Согласно [12], для оценки структуры и влияния долговременной памяти временного ряда целесообразно использовать значение фрактальной размерности функций, описывающих фазовые превращения в рассматриваемых механических и физических системах.

Фрактальная размерность может использоваться для анализа трендов котировок и в управлении инвестиционными портфелями, при исследовании и выявлении динамики временных рядов показателей финансовой активности [13], для прогнозирования волатильности рынка нефтепродуктов [14] и оценки значимости финансовых активов [15] на основе предположения [16] о фрактальной природе рынка и наличии у рыночных цен истории (долговре-

менной либо кратковременной памяти).

Использование фрактального подхода [17] позволило оптимизировать форму кузова автобуса для уменьшения сопротивления движению, снизить расход топлива. Анализ [18; 19] фрактальных показателей потока автомобилей на городской улично-дорожной сети (УДС), распределения вероятностей и корреляционных характеристик движения транспорта показал, что эмпирические данные о транспортных потоках соответствуют фрактальным показателям и удовлетворительно описываются с их помощью. Исследованием [20] установлено, что появление на дорогах средств автомобильного транспорта в большей степени определяется не пуассоновским (простейшим) процессом, а факторами фрактальной природы. Для классификации транспортных потоков – как следствие их самоподобия и нерегулярности – целесообразно использование гипотезы о «мультифрактальном» характере спектра потока автомобилей [21].

Наряду с анализом фрактальной размерности активно применяется метод нормированного размаха, в основе которого лежит вычисление показателя Хёрста. Индекс Хёрста [22] используется для анализа динамики электроэнцефалографических сигналов пациентов для построения показателя здоровой и аномальной мозговой активности. Количественная оценка [23] морфологических свойств поверхностных структур зубной эмали на основе фрактальной размерности применяется наряду с традиционно определяемым показателем шероховатости поверхности. Анализ интенсивности потока автомобильного транспорта на УДС мегаполиса с использованием современных математических методов (статистический, вейвлет- и Фурье-анализ, показатель Хёрста) изложен в [24–29].

Для большинства временных рядов, порождаемых естественными процессами, прямое (аналитическое) нахождение фрактальной размерности невозможно, поэтому приходится пользоваться специальными алгоритмами [30], показателем Хёрста [1, С. 348] или численными процедурами [31]. Связь между фрактальной размерностью и показателем Хёрста достаточно подробно изучена в работах [1, С. 353; 32–34].

Целью настоящей работы является выявление результатов использования современных методов анализа временных рядов, использующих значения интенсивностей потоков автомобильных транспортных средств на городской



Таблица 1

Показатель *H* Хёрста и фрактальная размерность *D* функций интенсивности транспортных потоков на участках городской УДС [выполнено автором]

№	Средняя интенсивность <i>N</i> , авт/ч	Показатель <i>H</i> Хёрста	Фрактальная размерность <i>D</i>	Статистика Пирсона χ^2
1	166	0,5392	1,6998	30,6
2	281	0,7330	1,6943	32,5
3	311	0,7612	1,7501	31,6
4	417	0,7433	1,7701	40,9
5	467	−0,0310	1,7259	45,4
6	599	0,0359	1,6414	325,8
7	719	0,0573	1,7081	36,7
8	830	0,0158	1,6928	3634,7
9	956	0,0085	1,6715	39,0
10	975	−0,0520	1,6823	32,0
11	1046	−0,0230	1,6801	56,3
12	1273	0,0200	1,6523	108,0
13	1377	−0,0590	1,6606	31,5
14	1398	0,0313	1,6463	71,5
15	1426	−0,0080	1,7021	31,4

улично-дорожной сети, полученные в ходе эксперимента с помощью измерительных программно-технических комплексов.

**ДАННЫЕ НАТУРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ
ЗА ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ПОТОКА
АВТОМОБИЛЬНОГО ТРАНСПОРТА**

При изучении особенностей движения автомобильного транспорта традиционно применяется зависимость от времени интенсивности транспортного потока [35; 36]. Интенсивность $N(t_i)$ потока автомобильного транспорта на рассмотренном в предлагаемом исследовании участке городской УДС (на примере города Пермь) в произвольный момент времени t_i определялась по данным, поступающим от «комплексов измерительных программно-технических» (КИПТ) в режиме реального времени, с использованием выражения:

$$N(t_i) = \frac{n(t_i)}{\Delta}, \tag{1}$$

где $n(t_i)$ – количество автомобилей на входном рубеже, зафиксированных за интервал времени $[t_i - \Delta/2, t_i + \Delta/2]$, $i = \overline{1, m}$;

Δ – выбранный интервал времени;

m – общее количество интервалов наблюдения.

КИПТ серии «Азимут»¹ позволяет распознавать государственный регистрационный знак, измерять скорость автомобиля в зоне контроля,

¹ КИПТ «Азимут 2» Технологии безопасности дорожного движения. – [Электронный ресурс]: <https://tbdd.ru/node/224>. Доступ 11.01.2024.

его среднюю скорость, время движения между рубежами контроля и прочие характеристики.

Для вычисления показателей Хёрста и фрактальных характеристик функций интенсивности потока автомобильного транспорта выбраны 15 улиц города Перми (улица Вавилова, улица Ласьвинская, улица Подлесная, улица Стахановская, Шоссе космонавтов, Южная дамба и другие) с различными значениями средней интенсивности движения транспорта (таблица 1).

На рис. 1 представлены зависимости интенсивностей транспортных потоков от времени, вычисленных согласно (1), при $D = 5$ мин. Продолжительность наблюдения за транспортными потоками варьировалась от 350 до 700 минут, в течение которых интенсивности $N(t)$ автомобильных потоков оставались практически постоянными.

В основе метода нормированного размаха [1, С. 349; 24; 28] лежит аппроксимация безразмерного показателя R/S степенной зависимостью вида at^H , где a – константа, H – показатель Хёрста (константа), t – время. Здесь обозначено:

$$R(M) = \max_{t_1 \leq t_i \leq M} Z(t_i, M) - \min_{t_1 \leq t_i \leq M} Z(t_i, M) \tag{2}$$

– размах отклонений –

$Z(t_i, M) = \sum_{i=1}^M [N(t_i) - \langle N \rangle]$ случайных значений интенсивности $N(t_i)$ потока автомобильного транспорта от среднего значения

$$\langle N \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M N(t_i); \tag{3}$$

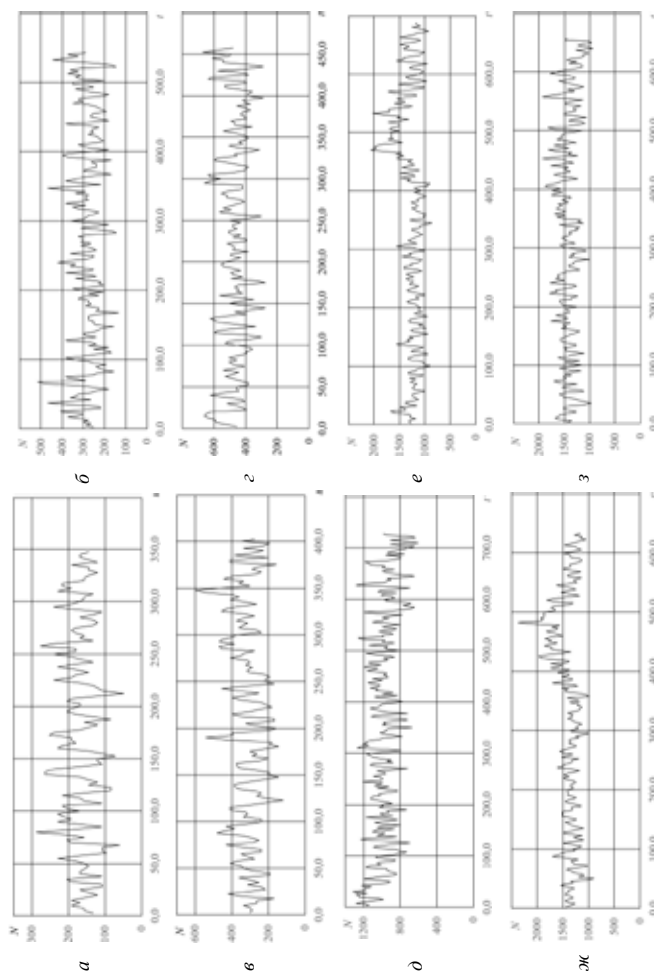


Рис. 1. Интенсивности N (авт/ч) транспортных потоков как функции времени t (мин); средние значения интенсивностей потоков (авт/ч): 166 (а), 281 (б), 311 (в), 467 (г), 975 (д), 1273 (е), 1398 (ж) и 1426 (з) [выполнено автором].

$$S = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [N(t_i) - \langle N \rangle]^2} \quad (4)$$

– среднеквадратичное отклонение интенсивности $N(t_i)$ транспортного потока.

Показатель степени (индекс H Хёрста) функции at^H , аппроксимирующей зависимость R/S , позволяет выделять основные типы поведения временных рядов [1, С. 351; 37]: при $H = 0,5$ значения временного ряда признаются случайными, то есть для слагаемых ряда не проявляется трендовая зависимость; иначе говоря, предыстория появления «ранних» членов ряда не сказывается на значениях последующих;

при $0 \leq H < 0,5$ временной ряд считается «антиперсистентным», что отражает его неустойчивость;

при $0,5 < H \leq 1,0$ наблюдаемый процесс оказывается «персистентным», то есть имеет трендовую составляющую; предыстория

формирования «ранних» слагаемых сказывается на значениях последующих слагаемых временного ряда.

На рис. 2 в логарифмических координатах представлены зависимости функций нормированных размахов R/S от времени t для функций интенсивности $N(t)$ транспортных потоков на рассматриваемых участках дорог согласно соотношениям (2)–(4), а также аппроксимации методом наименьших квадратов этих кривых степенными функциями. Соответствующие значения H показателя Хёрста приведены в таблице 1. Для некоторых временных рядов интенсивностей $N(t_i)$ транспортных потоков значения H показателя Хёрста принимают отрицательные значения, что не предусмотрено классической интерпретацией этого показателя, $0 \leq H \leq 1,0$ [1, С. 349; 37].

Для подсчета фрактальных размерностей исследуемых кривых интенсивностей (1)



транспортных потоков используется метод клеточного покрытия [1, С. 46; 2, С. 197; 3, С. 137], основанный на определении размерности Хаусдорфа – Безиковича.

Предполагается, что на рассматриваемом интервале наблюдения $[t_i, t_m]$ известна функция $N(t)$ с конечным числом разрывов (именно такие функции $N(t_i)$ рассматриваются в качестве временных рядов, получаемых с КИПТ серии «Азимут»). На отрезке $[t_i, t_m]$ вводится сеточная область $\omega_m = \{t_i = \delta \cdot i, i = \overline{1, m}\}$, где $\delta = (t_m - t_i) / m$ – шаг сетки.

Рассматриваемая функция $N(t)$ покрывается квадратными ячейками со стороной δ . При уменьшении размера δ количество клеток m , покрывающих кривую, растет согласно степенному закону [13]:

$$m(\delta) \sim \left(\frac{1}{\delta}\right)^D, \quad (5)$$

показатель степени D определяет размерность Хаусдорфа – Безиковича.

Логарифмирование выражения (5) приводит к соотношению:

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln m(\delta)}{\ln(1/\delta)}. \quad (6)$$

Для вычисления фрактальной размерности D плоскость, на которой определена рассматриваемая функция $N(t)$, первоначально покрывается квадратными ячейками размером δ_1 , и подсчитывается количество M_1 ячеек, покрывающих исследуемый график. Затем размер квадратной ячейки уменьшается до величины δ_2 , подсчитывается количество M_2 ячеек, покрывающих исследуемый график ячейками размером δ_2 , и так далее.

Для практических расчетов вместо количества m ячеек, покрывающих исследуемый график, удобно использовать длину измеряемой кривой $L(\delta) = m\delta$. В этом случае выражение (5) приводится к виду:

$$L(\delta) = \delta m(\delta) \sim \delta \left(\frac{1}{\delta}\right)^D = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{D-1}. \quad (7)$$

Полученная эмпирическая зависимость $L(\delta)$ аппроксимируется методом наименьших квадратов степенной функцией:

$$L(\delta) \approx a(1/\delta)^d. \quad (8)$$

Из сравнения (7) и (8) следует, что фрактальная размерность D определяется значением показателя степени d аппроксимирующей функции:

$$D = 1 + d. \quad (9)$$

На рис. 3 показаны зависимости длины L функций $N(t)$ интенсивности транспортных

потоков на рассматриваемых участках дорог от величины $1/\delta$ (в логарифмических координатах), определенные согласно алгоритму метода клеточного покрытия, а также аппроксимации методом наименьших квадратов этих кривых степенными функциями.

В монографии [1, С. 353] Б. Мандельбротом предложено соотношение между индексом (показателем) H Хёрста и фрактальной размерностью D :

$$D = 2 - H, \quad (10)$$

которое активно используется исследователями для вычисления индекса H по известному значению D и, наоборот, для определения размерности D по найденному значению индексу H . Использование соотношения (10) встречается в теоретических исследованиях [30; 34; 38], в публикациях по экономике [11; 15; 16; 39], физике [12], медицине [23], сетевым технологиям [41–44], отраслевому развитию [45–47], транспортным задачам [20; 48] и другим дисциплинам. Исследованию соотношения (10) на большом количестве экспериментальных данных посвящена монография [32], в которой отмечается наличие определенного несоответствия этого соотношения результатам натурных измерений.

Наличие данных о реальных интенсивностях транспортных потоков в результате сбора информации от КИПТ, установленных на дорожной сети города Перми, позволяет дополнительно изучить вопрос соответствия соотношения (10) результатам натурных измерений. Для этого на выбранных участках улично-дорожной сети (таблица 1) с различной интенсивностью движения потока автомобилей вычислены показатели H Хёрста и фрактальной размерности D .

На рис. 4 приведены зависимости показателей H Хёрста (рис. 4, а) и фрактальных размерностей D (рис. 4, б), а также суммы $D + H$ (рис. 4, в) от средних интенсивностей N потоков автомобильных транспортных средств.

При значениях средней интенсивности $\langle N \rangle$ транспортного потока менее 420 авт/ч показатель Хёрста принимает значения от 0,54 до 0,76, что характеризует временную зависимость интенсивности транспортных потоков как персистентную, характерную для естественных процессов [37].

При средней интенсивности $\langle N \rangle$ транспортного потока более 420 авт/ч показатель

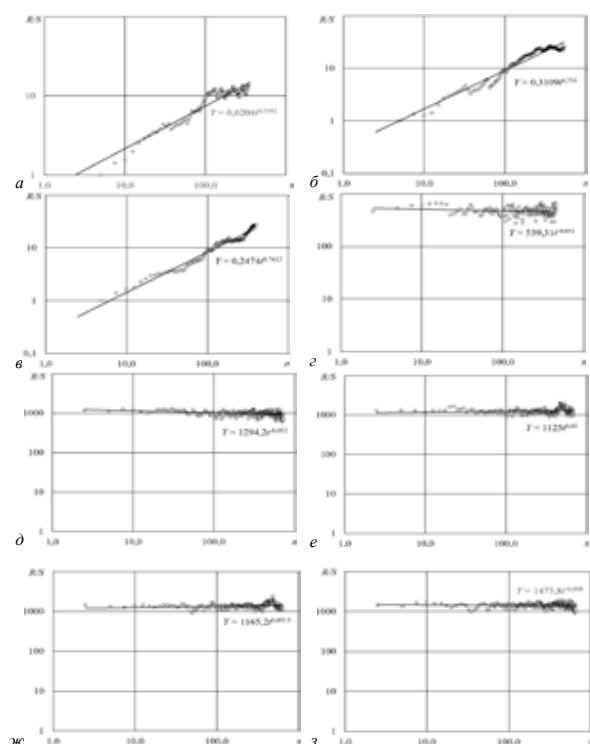


Рис. 2. Зависимости показателей нормированного размаха R/S функций $N(t)$ интенсивности транспортных потоков от времени t (мин, логарифмические координаты); средние значения интенсивности N потоков: 166 (а), 281 (б), 311 (в), 467 (г), 975 (д), 1273 (е), 1398 (ж) и 1426 (з) [выполнено автором].

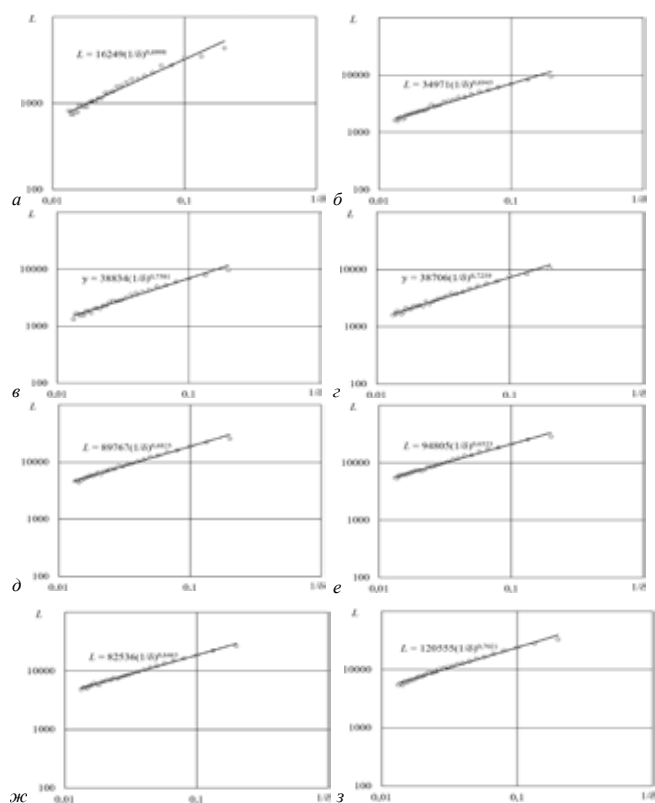


Рис. 3. Зависимости длины L функций $N(t)$ интенсивности транспортных потоков от величины $1/\delta$ (мин–1, логарифмические координаты $\ln(1/\delta)$ и $\ln L(\delta)$); средние интенсивности N потоков: 166 (а), 281 (б), 311 (в), 467 (г), 975 (д), 1273 (е), 1398 (ж) и 1426 (з) [выполнено автором].



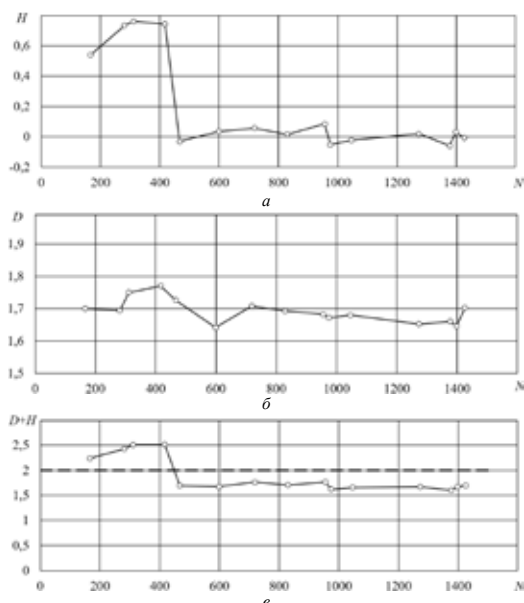


Рис. 4. Зависимости показателя Хёрста H (а), фрактальной размерности D (б) и суммы $D + H$ (в) от среднего значения N (авт/ч) интенсивности транспортных потоков [выполнено автором].

Хёрста падает до минимальных, в том числе отрицательных значений (см. данные в таблице 1, рис. 2, з, д), характеризующих временную зависимость интенсивности транспортных потоков как антиперсистентную, то есть как хаотичную. Следует отметить, что при вычислительной обработке данных натурных наблюдений получены отрицательные значения показателя Хёрста (рис. 2, з, д, з; 4, а; таблица 1). Это противоречит утверждению, содержащемуся в некоторых из перечисленных выше публикаций, что показатель Хёрста не может принимать отрицательные значения.

Фрактальная размерность D временных рядов (рис. 4, б) мало зависит от средней интенсивности $\langle N \rangle$ транспортного потока и изменяется в пределах от 1,65 до 1,77.

Сумма $D + H$ (рис. 4, в) при $\langle N \rangle < 420$ авт/ч превышает значение 2, предсказываемое соотношением (10); при $\langle N \rangle > 420$ авт/ч сумма $D + H$ оказывается меньше ожидаемого значения. Относительное отклонение суммарного значения $D + H$ от значения 2 достигает 25,7 %.

В монографии [1, С. 350] Б. Мандельброт указывает, что соотношение (9) получено в предположении, что изучаемый случайный процесс должен соответствовать гауссовскому (нормальному) распределению вероятностей. На рис. 5 представлены данные о распределении теоретических и эмпирических распределений плотностей p вероятностей интенсивностей N потоков автомобильного транспорта на УДС города Перми.

В таблице 1 приведены числовые значения статистик критерия χ^2 Пирсона для всех рассмотренных участков дорог. Критическое значение критерия Пирсона для уровня значимости 0,95 составляет 30,1, которое меньше всех приведенных в таблице 1 значений критерия χ^2 для представленных в настоящем исследовании функций $N(t_i)$ интенсивности потоков автомобильного транспорта.

Следует признать, что во всех рассмотренных случаях распределение вероятностей значений временных рядов интенсивностей $N(t_i)$ транспортных потоков нельзя считать гауссовским (нормальным). Этим, по-видимому, объясняется несоответствие соотношения (10), установленного Б. Мандельбротом, результатам натурных наблюдений (рис. 4, в).

Становится очевидным, что перед использованием соотношения (10) следует убедиться в гауссовском (или близком к таковому) распределении вероятностей слагаемых изучаемого временного ряда. В противном случае ошибка при использовании формулы (10) может быть значительной.

ВЫВОДЫ

Обработка данных от КИПТ позволяет получать достоверную и содержательную информацию о транспортных потоках на улично-дорожной сети современного города в режиме реального времени.

Анализ получаемых от КИПТ данных об интенсивности транспортных выявил ано-

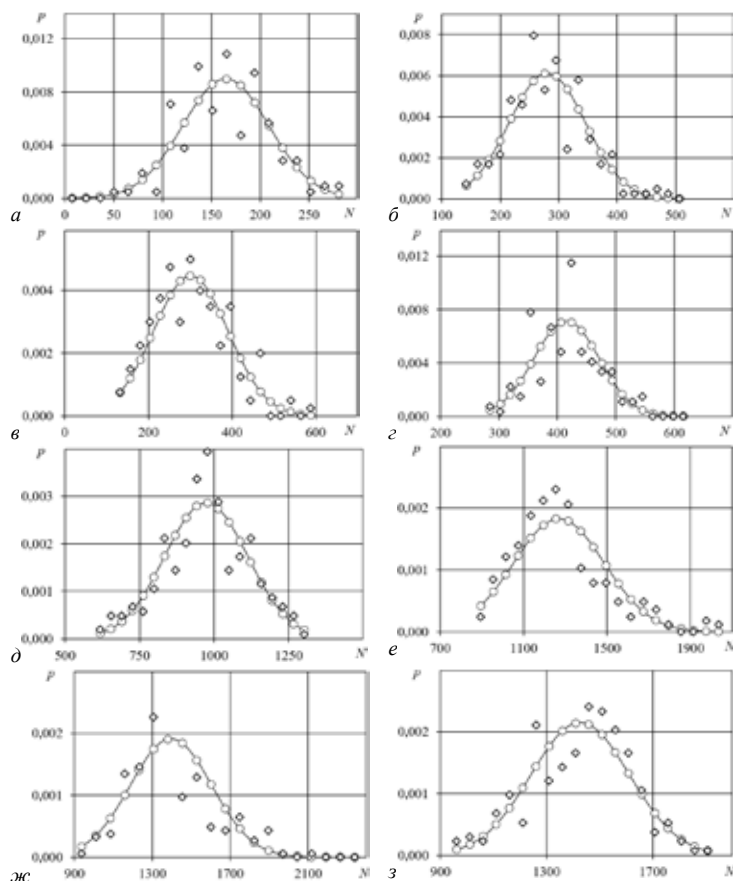


Рис. 5. Гауссовские (—○—) и эмпирические (◇) распределения плотностей p вероятностей интенсивностей N транспортных потоков; значения средних интенсивностей N потоков автомобильного транспорта (авт/ч): 166 (а), 281 (б), 311 (в), 467 (г), 975 (д), 1273 (е), 1398 (ж) и 1426 (з) [выполнено автором].

малии в значениях показателя Хёрста при использовании метода нормированного размаха. Традиционно считается, что показатель Хёрста, являющийся критерием устойчивости или неустойчивости тенденций эволюции временного ряда, лежит в диапазоне от 0 до 1, тогда как при вычислении этого показателя для функций интенсивности транспортных потоков в настоящем исследовании получены значения, выходящие за пределы указанного диапазона. Выявлена зависимость показателя Хёрста от среднего значения интенсивности потока транспорта: при небольших значениях средней интенсивности показатель Хёрста превышает 0,5, что соответствует персистентности наблюдаемого процесса; при значениях, превышающих 420 ... 450 авт/ч, этот показатель резко снижается, что является признаком антиперсистентности процесса движения потока автомобильного транспорта, и может принимать отрицательные значения.

Установлено, что традиционно применяемое соотношение Б. Мандельброта, связывающее фрактальную размерность и показатель Хёрста, при выполнении натурных измерений интенсивности потоков автомобильного транспорта нарушается с относительной погрешностью до 25 %. Дополнительное исследование показало, что, возможно, причина такой погрешности заключается в невыполнении условия гауссовского (нормального) распределения вероятностей для полученных временных рядов интенсивностей потоков автомобильного транспорта.

Представляется необходимым в практических исследованиях выполнять проверку соответствия распределения вероятностей слагаемых временных рядов гауссовскому (нормальному) распределению для обоснования корректности применения соотношения Б. Мандельброта.

Обнаруженные аномалии требуют дальнейшего глубокого исследования рассмотрен-





ных и иных методов и подходов, используемых для анализа транспортных процессов на улично-дорожных сетях крупных городов.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с. ISBN 5-93972-108-7.
2. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с. ISBN 5-03-001712-7.
3. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000. – 354 с. ISBN 5-901095-03-0.
4. Grahovac, D., Leonenko, N. N., Taqqu, M. S. Scaling Properties of the Empirical Structure Function of Linear Fractional Stable Motion and Estimation of Its Parameters. *Journal of Statistical Physics*, 2015, Vol. 158 (1), pp. 105–119. DOI: 10.1007/s10955-014-1126-4.
5. Любушин А. А. Прогноз Великого Японского землетрясения // *Природа*. – 2012. – № 8 (1164). – С. 23–33. [Электронный ресурс]: https://elibrary.ru/download/elibrary_18042955_47303750.pdf. Доступ 16.01.2024. EDN: PEVRQB.
6. Гасанов А. Б., Аббасова Г. Г. Оценка фрактальной структуры и стохастического распределения поровых пустот нефтеносных коллекторов // *Вестник ПНИПУ. Геология. Нефтегазовое и горное дело*. – 2019. – Т. 19. – № 3. – С. 228–239. DOI: 10.15593/2224-9923/2019.3.3.
7. Смирнов В. В., Спиридонов Ф. Ф. Фрактальные модели стохастических процессов // *Южно-Сибирский научный вестник*. – 2013. – № 1 (3). – С. 99–102. [Электронный ресурс]: https://elibrary.ru/download/elibrary_19107961_73506142.pdf. Доступ 16.01.2024. EDN: QCDQDT.
8. Пашенко Ф. Ф., Амосов О. С., Муллер Н. В. Структурно-параметрическая идентификация временного ряда с применением фрактального и вейвлет-анализа // *Информатика и системы управления*. – 2015. – № 2 (44). – С. 80–88. [Электронный ресурс]: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=twbnmr&ysclid=m3ok83dhjp774512399>. Доступ 17.01.2024. EDN: TWNBMR.
9. Кликушин Ю. Н. Метод фрактальной классификации сложных сигналов // *Журнал радиоэлектроники*. – 2000. – № 4. – 6 с. [Электронный ресурс]: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15111685>. Доступ 16.01.2024. EDN: MSRQXN.
10. Неганов В. А., Антипов О. И., Неганова Е. В. Фрактальный анализ временных рядов, описывающих качественные преобразования систем, включая катастрофы // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. – 2011. – Т. 14. – № 1. – С. 105–110. [Электронный ресурс]: https://elibrary.ru/download/elibrary_16337899_76189553.pdf. Доступ 16.01.2024. EDN: NTNOXH.
11. Кривоносова Е. К., Первачук В. П., Кривоносова Е. А. Сравнение фрактальных характеристик временных рядов экономических показателей // *Современные проблемы науки и образования*. – 2014. – № 6. – 113 с. [Электронный ресурс]: https://elibrary.ru/download/elibrary_22877127_95621621.pdf. Доступ 16.01.2024. EDN: TGQDAZ.
12. Барабаш Т. К., Масловская А. Г. Компьютерное моделирование фрактальных временных рядов // *Вестник Амурского государственного университета. Естественные и экономические науки*. – 2010. – № 49. – С. 31–38. [Электронный ресурс]: https://vestnik.amursu.ru/wp-content/uploads/2017/12/N49_7.pdf. Доступ 16.01.2024.
13. Гарафутдинов Р. В., Ахуниязова С. А. Адаптированный метод клеточного покрытия для оценивания фрактальной размерности финансовых временных рядов // *Прикладная математика и вопросы управления*. – 2020. – № 3. – С. 185–218. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.3.10.
14. Gerogiorgis, D. I. Fractal scaling in crude oil price evolution via Time Series Analysis (TSA) of historical data. *Chemical Product and Process Modeling*, 2009, Vol. 4, No. 5. DOI: <https://doi.org/10.2202/1934-2659.1370>.
15. Некрасова И. В. Показатель Херста как мера фрактальной структуры и долгосрочной памяти финансовых рынков // *Международный научно-исследовательский журнал*. – 2015. – № 7 (38). – С. 87–91. [Электронный ресурс]: https://research-journal.org/media/PDF/irj_issues/7-3-38.pdf?page=87. Доступ 15.01.2024.
16. Симонов П. М., Гарафутдинов Р. В. Моделирование и прогнозирование динамики курсов финансовых инструментов с применением эконометрических моделей и фрактального анализа // *Вестник Пермского университета. Экономика*. – 2019. – Т. 14. – № 2. – С. 268–288. DOI: 10.17072/1994-9960-2019-2-268-288.
17. Генералова А. А., Бычков Д. С. Улучшение аэродинамических свойств междугородного автобуса с применением теории фракталов // *Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе*. – 2015. – № 2 (14). – С. 158–166. [Электронный ресурс]: https://elibrary.ru/download/elibrary_24107892_77708413.pdf. Доступ 13.01.2024.
18. Караблин О. В. О фрактальном характере автомобильного трафика города // *Экономика: вчера, сегодня, завтра*. – 2018. – Т. 8. – № 9А. – С. 287–292. [Электронный ресурс]: <http://www.publishing-vak.ru/file/archive-economy-2018-9/32-karablin.pdf>. Доступ 13.01.2024.
19. Pengjian Shang, Meng Wan, Santi Kama. Fractal nature of highway traffic data. *Computers and Mathematics with Applications*, 2007, Vol. 54, Iss. 1, pp. 107–116. DOI: doi.org/10.1016/j.camwa.2006.07.017.
20. Qiang Meng, Hooi Ling Khoo. Self-Similar Characteristics of Vehicle Arrival Pattern on Highways. *Journal of Transportation Engineering*, 2009, Vol. 135, Iss. 11, pp. 864–872. DOI: [doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-947X\(2009\)135:11\(864\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-947X(2009)135:11(864)).
21. Xuewei Li, Pengjian Shang. Multifractal classification of road traffic flows. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, Vol. 31, Iss. 5, pp. 1089–1094. DOI: doi.org/10.1016/j.chaos.2005.10.109.
22. David, S. A., Machado, J. A. T., Inacio, C. M. C., Valentim, C. A. A combined measure to differentiate EEG signals using fractal dimension and MFDDFA-Hurst. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2020, Vol. 84, 105170. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105170>.
23. Ерофеева Е. С., Ляпунова Е. А., Оборин В. А., Гилева О. С., Наймарк О. Б. Структурно-функциональный анализ твёрдых тканей зубов в оценке качества технологий отбеливания // *Российский журнал биомеханики*. – 2010. – Т. 14. – № 2 (48). – С. 47–55. [Электронный ресурс]: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_15105346_39403207.pdf. Доступ 16.01.2024.
24. Бояршинов М. Г. Метод нормированного размаха для анализа интенсивности транспортного потока // *Вестник ГБУ «Научный центр безопасности жизнедеятельности»*. – 2020. – № 2 (46). – С. 35–46. [Электронный ресурс]: https://elibrary.ru/download/elibrary_44788054_61375863.pdf. Доступ 15.01.2024.
25. Boyarshinov, M. G., Vavilin, A. S. The deterministic component of the traffic flow intensity. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, International Conference: Actual Issues of Mechanical Engineering (AIME 2020) 27th – 29th October 2020, Saint-Petersburg, Russian Federation, 2021, 1111 (1), 012013 (10 p). DOI: 10.1088/1757-899X/1111/1/012013.

26. Бояршинов М. Г., Вавилин А. С., Шумков А. Г. Использование комплекса фотовидеофиксации нарушений правил дорожного движения для выделения детерминированной и стохастической составляющих интенсивности транспортного потока // Интеллект. Инновации. Инвестиции. – 2021. – № 3. – С. 61–71. DOI: 10.25198/2077-7175-2021-3-61.
27. Бояршинов М. Г., Вавилин А. С., Шумков А. Г. Фурье-анализ интенсивности транспортного потока // Интеллект. Инновации. Инвестиции. – 2021. – № 4. – С. 46–59. DOI: 10.25198/2077-7175-2021-4-46.
28. Бояршинов М. Г., Вавилин А. С., Васькина Е. В. Применение показателя Хёрста для исследования интенсивности транспортного потока // Интеллект. Инновации. Инвестиции. – 2022. – № 2. С. 68–81. DOI: 10.25198/2077-7175-2021-2-68.
29. Бояршинов М. Г., Вавилин А. С., Васькина Е. В. Применение вейвлет-анализа для исследования интенсивности транспортного потока // Интеллект. Инновации. Инвестиции. – 2022. – № 4. – С. 72–87. DOI: doi.org/10.25198/2077-7175-2022-4-72.
30. Grassberger, P., Procaccia, I. Characterization of Strange Attractors. *Physical Review Letters*, 1983, 50, pp. 346–349. [Электронный ресурс]: https://e-l.unifi.it/pluginfile.php/591014/mod_resource/content/0/PhysRevLett.50.346.pdf. Доступ 16.01.2024.
31. Крылова О. И., Цветков И. В. Комплекс программ и алгоритм расчета фрактальной размерности и линейного тренда временных рядов // Программные продукты и системы. – 2012. – № 4. – С. 106–112. [Электронный ресурс]: <https://swsys.ru/index.php?page=article&id=3320&lang>. Доступ 16.01.2024. EDN: OXSJMU.
32. Дещеревский А. В. Фрактальная размерность, показатель Херста и угол наклона спектра временного ряда. – М.: Институт сейсмологии Объединенного института физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, 1997. – 34 с. [Электронный ресурс]: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_26650013_92379281.pdf. Доступ 16.01.2024. EDN: WLESYZ.
33. Старченко Н. В. Индекс фрактальности и локальный анализ хаотических временных рядов // Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – М.: МИФИ (гос. ун-т), 2005. – 24 с. [Электронный ресурс]: https://viewer.rusneb.ru/ru/000200_000018_RU_NLR_bibl_1085207?page=1&otate=0&theme=white. Доступ 16.01.2024.
34. Анисимов И. А., Осипов Г. С. Сравнение классического и модифицированного методов расчета фрактальной размерности временных рядов с помощью показателя Херста // *International Journal of Humanities and Natural Sciences*. – 2020. – Т. 10–2 (49). – С. 6–10. DOI: 10.24411/2500-1000-2020-11104.
35. Дрю Д. Теория транспортных потоков и управление ими. – М.: Транспорт, 1972. – 424 с.
36. Сильянов В. В. Теория транспортных потоков в проектировании дорог и организации движения – М.: Транспорт, 1977. – 303 с.
37. Sutcliffe, J., Hurst, S., Awadallah, A. G., Brown, E., Hamed, Kh. Harold Edwin Hurst: the Nile and Egypt, past and future. *Hydrological Sciences Journal*, 2016, Vol. 61, Iss. 9, pp. 1557–1570. DOI: 10.1080/02626667.2015.1019508.
38. Голубь Ю. Я. Изучение фрактальной размерности произведения временного ряда на число и умножения временных рядов // *Наука и бизнес: пути развития*. – 2016. – № 5 (59). – С. 72–76. [Электронный ресурс]: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_26384218_98248727.pdf. Доступ 13.01.2024. EDN: WFNJCD.
39. Голубь Ю. Я. Аналитическое рассмотрение фрактальной размерности кросс-курсов одной валюты по отношению к другой // *Наука и бизнес: пути развития*. – 2014. – № 7 (37). – С. 42–45. [Электронный ресурс]: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_22309341_13493325.pdf. Доступ 14.01.2024. EDN: SUFBVT.
40. Михайлов В. В., Киринос С. Л., Гедзенко М. О. Фрактальная модель обработки потоковых данных в задаче прогнозирования условий погоды // *Проблемы обеспечения безопасности при ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций*. – 2013. – Т. 2. – № 1 (2). – С. 43–46. [Электронный ресурс]: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_26293729_82151009.pdf. Доступ 13.01.2024. EDN: WDKAMR.
41. Li Li, Zhiheng Li, Yi Zhang, Yudong Chen. A Mixed-Fractal Traffic Flow Model Whose Hurst Exponent Appears Crossover. *Fifth International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization*, Conference Publishing Service, 2012, pp. 443–447. DOI: 10.1109/CSO.2012.103.
42. Kaklauskas, L., Sakalauskas, L. Study of on-line measurement of traffic self-similarity. *CEJOR*, 2013, Vol. 21, pp. 63–84. DOI: 10.1007/s10100-011-0216-5.
43. Mehrvar, H. R., Le-Ngoc, T. Estimation of Degree of Self-Similarity for Traffic Control in Broadband Satellite Communications. *Proceedings 1995 Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, Montreal, QC, Canada, 1995, Vol. 1, pp. 515–518. DOI: 10.1109/CCECE.1995.528187.
44. Главацкий С. П. Статистический анализ трафика социальных сетей // *Наукові праці ОНАЗ ім. О. С. Попова*, 2013, № 26 с. 94–99. – [Электронный ресурс]: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21597433>. – Доступ 14.08.2023.
45. Жмурко Д. Ю., Осипов А. К. Прогнозирование показателей развития сахарной отрасли с применением методов фрактального анализа // *Вестник Удмуртского университета. Экономика и право*. – 2018. – Т. 28. – № 2. – С. 185–193. [Электронный ресурс]: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_35078230_18865640.pdf. Доступ 14.08.2023. EDN: LVBFMT.
46. Лопухин А. М. Применение методов фрактального анализа к прогнозированию показателей развития предприятий кофейной отрасли // *Continuum. Математика. Информатика. Образование*. – 2020. – № 4. – С. 70–77. DOI: 10.24888/2500-1957-2020-4-70-79.
47. Шмырин А. М., Седых И. А., Щербаков А. П. Методы нелинейного анализа при исследовании характеристик производства клинкера // *Вестник ТГУ*. – 2014. – Т. 19. – Вып. 3. – С. 923–926. [Электронный ресурс]: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_21830477_25858437.pdf. Доступ 14.08.2023. EDN: SJSQBH.
48. Can Ye, Huiyun Li, Guoqing Xu. An Early Warning Model of Traffic Accidents Based on Fractal Theory. *17th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, Qingdao, China, 2014, pp. 2280–2285. DOI: 10.1109/ITSC.2014.6958055. ●

Информация об авторе:

Бояршинов Михаил Геннадьевич – доктор технических наук, профессор кафедры автомобилей и технологических машин Пермского национального исследовательского политехнического университета, Пермь, Россия, mgboyarshinov@psu.ru.

Статья поступила в редакцию 10.01.2024, одобрена после рецензирования 05.07.2024, принята к публикации 24.07.2024.

