



Адекватность гравитационной модели для железнодорожных пассажиропотоков



Александр МАРТЫНЕНКО



Денис САЙФУТДИНОВ

Александр Валериевич Мартыненко¹,
Денис Жавдатович Сайфутдинов²

^{1,2} Уральский государственный университет путей
сообщения (УрГУПС), Екатеринбург, Россия.

¹ Центр развития и размещения производительных
сил Института экономики Уральского отделения
Российской академии наук (ИЭ УрО РАН),
Екатеринбург, Россия.

✉ ² denssovv@yandex.ru.

АННОТАЦИЯ

Необходимой предпосылкой успешного планирования развития транспортной системы является как можно более точное моделирование пространственного распределения пассажиропотоков, на основании которого рассчитывается прогнозная матрица корреспонденций. Одним из основных методов моделирования является подход, основанный на использовании гравитационной модели.

В настоящей работе исследуется вопрос об адекватности гравитационной модели с двойным ограничением и показательно-степенной функцией тяготения. Именно такая спецификация модели и её частные случаи с показательно и степенной функциями тяготения наиболее часто применяются для оценки пространственного распределения пассажиропотоков как в теоретических, так и в прикладных исследованиях.

В статье показана калибровка и валидация указанной модели на наблюдаемой (фактической) матрице пассажирских железнодорожных корреспонденций, для формирования которой были использованы данные из АБД АСУ «Экспресс»: количество проданных билетов на поезда дальнего следования для всех пар станций, между которыми существует прямое железнодорожное сообщение.

Ключевые слова: железнодорожное пассажирское сообщение, гравитационная модель, матрица корреспонденций, калибровка модели, валидация модели, адекватность модели.

Поскольку калибровка гравитационной модели может быть осуществлена разными методами (в зависимости от того, как в модель включена стохастичность, отвечающая за различия между модельными и наблюдаемыми данными), то в работе выполнен детальный анализ наиболее часто встречающихся методов калибровки гравитационной модели и в результате был выбран подход, основанный на методе максимального правдоподобия. Также в работе проанализирован инструментарий валидации гравитационной модели, используемый для оценки близости между наблюдаемой и модельной матрицами корреспонденций.

В результате сравнения модельной и наблюдаемой матриц корреспонденций установлено, что рассматриваемая гравитационная модель с высокой степенью точности прогнозирует агрегированные показатели: общий пассажирооборот, среднюю дальность поездки и распределение дальности поездок. В то же время показано, что погрешность прогноза пассажиропотока для большинства отдельных корреспонденций достаточно велика. Это обстоятельство существенно снижает возможность практического применения гравитационной модели для анализа и моделирования пассажиропотоков в железнодорожном пассажирском сообщении дальнего следования.

Финансирование: статья подготовлена в соответствии с планом НИР УрГУПС.

Для цитирования: Мартыненко А. В., Сайфутдинов Д. Ж. Адекватность гравитационной модели для железнодорожных пассажиропотоков // Мир транспорта. 2023. Т. 21. № 1 (104). С. 75–86. DOI: <https://doi.org/10.30932/1992-3252-2023-21-1-9>.

Полный текст статьи на английском языке, публикуется во второй части данного выпуска.
The full text of the article in English is published in the second part of the issue.

ВВЕДЕНИЕ

В России доминирующее положение в общей структуре междугородних пассажирских перевозок занимает автомобильный и железнодорожный транспорт. При этом основной объём пассажирских перевозок протяжённостью до 300 км приходится на автобусные и пригородные железнодорожные маршруты. Однако для поездов на расстояния от 300 км до 1000 км основную роль играет железнодорожное сообщение дальнего следования (для более протяжённых маршрутов основное значение имеет авиасообщение). Именно железнодорожный транспорт в значительной мере обеспечивает связанность (в том числе социальную) территории Российской Федерации и межрегиональную транспортную доступность, улучшение которых обозначено в качестве приоритетных целей развития транспортной системы¹.

Необходимой предпосылкой успешного планирования развития транспортной системы является как можно более точное моделирование пространственного распределения пассажиропотоков, на основании которого рассчитывается прогнозная матрица корреспонденций (МК). Для моделирования используются два основных метода: энтропийный и гравитационный. Первый из них основывается на предположении о том, что транспортная система, рассматриваемая как система передвижения индивидуумов, является замкнутой и стремится достичь равновесного состояния, соответствующего максимуму энтропии². Подробное изложение этого метода можно найти, например, в монографии [1].

Второй метод основывается на аналогии с законом тяготения Ньютона. При таком подходе предполагают, что пассажиропоток зависит от размера пунктов отправления и прибытия и расстояния между ними, причём между близкими и большими пунктами пассажиропоток больше, чем

между малыми и далекими. Конкретный вид такой зависимости определяется моделируемой системой и дополнительными ограничениями.

Первые попытки использования гравитационной модели для описания пространственного распределения различных видов экономического и социального взаимодействия были предприняты в 30-е годы прошлого века [2], а возможно и раньше [3]. Однако широкое распространение эта модель получила в 50-е годы XX века [4] и с тех пор активно используется для моделирования транспортных, торговых, финансовых, миграционных потоков и тому подобных (примеры использования гравитационной модели в нетранспортной сфере и ссылки на соответствующую литературу можно найти, например, в статье одного из авторов [5]).

В 60-е, 70-е годы прошлого века усилиями ряда учёных были детально изучены математические свойства гравитационной модели. В частности, в работах [6–9] были предложены и строго обоснованы методы калибровки модели на основе эмпирических данных. Достаточно полное изложение этих и других теоретических вопросов содержится в обзорной статье [3] и монографии [10]. Также в этот период начинается применение гравитационной модели для прогнозирования пространственного распределения пассажиропотоков конкретных городов и территорий при разработке планов развития транспортной инфраструктуры [11]. Однако в те годы практическое использование гравитационной модели носило достаточно ограниченный характер, поскольку сбор эмпирических данных, необходимых для калибровки модели, осуществлялся путём опросов и непосредственных наблюдений. Это требовало привлечения большого количества учётников и, соответственно, значительных затрат.

Ситуация с доступностью данных стала меняться с конца 90-х годов в связи с развитием информационных технологий. Широкое внедрение систем видеонаблюдения на дорогах, использование безналичных платежей, появление смартфонов с геопозиционированием и другие подобные технологии позволили получать достаточно полную и надёжную информацию о транспортных потоках.

¹ Транспортная стратегия Российской Федерации до 2030 года с прогнозом на период до 2035 года. Утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 27 ноября 2021 г. № 3363-р. [Электронный ресурс]: <http://static.government.ru/media/files/7enYF2uL5kFZlOO pQhLl0nUT91RjCbeR.pdf>. Доступ 22.12.2022.

² Гасников А. В., Клёнов С. Л., Нурминский Е. А. [и др.] Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие / Под ред. А. В. Гасникова. – М.: МФТИ, 2010. – 362 с. ISBN 978-5-7417-0334-2.

По мере роста доступности таких данных значительно увеличилось количество работ, направленных на проверку адекватности гравитационной модели для моделирования пространственного распределения пассажиропотоков для различных территорий и систем транспорта. Результаты подобного рода можно найти в [12–19] и многих других работах. В частности, в [12] показано, что гравитационная модель достаточно хорошо описывает пространственное распределение пассажирских авиаперевозок в странах центральной Европы.

В статье [13] используются данные о ежедневных трудовых корреспонденциях в шести странах для проверки адекватности различных модификаций гравитационной модели. Кроме прочего, в этой работе показано, что для таких данных гравитационная модель даёт достаточно хороший прогноз для малых и средних расстояний, однако для больших расстояний точность прогноза существенно снижается. Данные по трудовым корреспонденциям используются также в [14] для оценки возможности использования гравитационной модели, калибровка которой выполнена на данных одного региона, для прогнозирования корреспонденций в другом регионе. В работе [15] валидация гравитационной модели осуществлялась на основе данных о совершаемых карпулинговых поездках в одном из регионов России.

В [16] гравитационная модель проверяется для грузовых железнодорожных потоков между провинциями Китая. Для пассажирских перевозок по железной дороге аналогичное исследование содержит статья [19]. В этой работе, на основе данных об объёмах пассажирских перевозок на одной из линий испанской железной дороги, авторы показали, что гравитационная модель гораздо лучше аппроксимирует наблюдаемые данные, чем регрессия Пуассона.

Проверка адекватности гравитационной модели для конкретных транспортных систем, территорий и видов транспорта необходима для обоснования правомерности использования гравитационной модели для решения прикладных задач. С практической точки зрения, гравитационная модель является составной частью четырёхшаговой транспортной модели [1], которая

активно используется при принятии управленческих решений по развитию транспортной инфраструктуры^{3,4} и реализована во всех современных программах для транспортного моделирования (PTV Visum, TransNet и другие).

Гравитационная модель может быть использована в четырёхшаговой модели на втором шаге для расчёта общей МК (для всех видов транспорта), после чего на третьем шаге для каждой корреспонденции рассчитывается расщепление пассажиропотока по различным видам транспорта. Также гравитационная модель может быть использована в виде так называемой синтетической гравитационной модели для одновременного расчёта МК и расщепления по видам транспорта (то есть второй и третий шаги объединяются). В этом случае гравитационная модель используется для расчёта МК по каждому виду транспорта в отдельности. Соответственно, практически значимые результаты могут быть получены только в том случае, если гравитационная модель адекватно описывает пространственное распределение пассажиропотоков для каждого вида транспорта в отдельности.

В частности, при создании транспортной модели в масштабах всей страны это касается и железнодорожного сообщения дальнего следования. Поэтому основная *цель* данной работы заключается в проверке адекватности гравитационной модели для моделирования пространственного распределения пассажиропотоков в железнодорожном сообщении дальнего следования.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Гравитационная модель

Пусть пассажиры совершают поездки из пунктов отправления $i = 1, 2, \dots, I$ в пункты прибытия $j = 1, 2, \dots, J$ и известна c_{ij} – обоб-

³ Методические рекомендации по разработке и реализации мероприятий по организации дорожного движения. Организация дорожного движения на регулируемых пересечениях // ОАО «Научно-исследовательский институт автомобильного транспорта». – М., 2017. [Электронный ресурс]: <https://e-ecolog.ru/docs/zZ7TAN6o8Pn-TZ7JAQql2/>. Доступ 22.12.2022.

⁴ СТО АВТОДОР 2.2-2013. Проектирование, строительство, эксплуатация автомобильных дорог. Рекомендации по прогнозированию интенсивности дорожного движения на платных участках автомобильных дорог государственной компании «Автодор» и доходов от их эксплуатации. – М.: Стандарт Государственной компании «Автодор», 2013. [Электронный ресурс]: <https://studylib.ru/doc/2002300/rekomendacii-po-prognozirovaniyu-intensivnosti-dorozhnogo/>. Доступ 22.12.2022.



щённая стоимость поездки из пункта i в пункт j (обобщённая стоимость – величина, которая включает в себя все временные и финансовые затраты пассажира на поездку). Обозначим через T_{ij} количество поездок из пункта i в пункт j . Очевидно, что T_{ij} зависит от пункта отправления i , пункта прибытия j и величины c_{ij} . Одной из наиболее простых форм такой зависимости является соотношение вида:

$$T_{ij} = a_i b_j f(c_{ij}), \quad (1)$$

где a_i и b_j – некоторые количественные характеристики пунктов отправления и прибытия;

$f(c)$ – неотрицательная функция, которая определена при всех $c \geq 0$.

Если функция $f(c)$ является убывающей, а характеристики a_i и b_j интерпретировать как размеры точек зарождения и поглощения пассажиропотоков в соответствующих пунктах, то зависимость (1) представляет собой математическую реализацию эмпирического правила «большие и близкие объекты взаимодействуют сильнее, чем маленькие и далекие». В силу сходства с законом всемирного тяготения Ньютона, зависимость (1) называется гравитационной моделью.

Пусть s_i – количество отправок из пункта i (во все пункты прибытия), d_j – количество прибытий в пункт j (из всех пунктов отправления). Тогда из очевидных тождеств $\sum_{j=1}^J T_{ij} = s_i$,

$\sum_{i=1}^I T_{ij} = d_j$ следует, что a_i и b_j должны удовлетворять равенствам

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^J a_i b_j f(c_{ij}) = s_i \quad \forall i = 1, \dots, I, \\ \sum_{i=1}^I a_i b_j f(c_{ij}) = d_j \quad \forall j = 1, \dots, J. \end{cases} \quad (2)-(3)$$

Для заданных s_i и d_j система (2), (3) представляет собой систему уравнений относительно неизвестных a_i и b_j . Если для любого c_{ij} выполнено условие $f(c_{ij}) > 0$ и

$$\sum_{i=1}^I s_i = \sum_{j=1}^J d_j,$$

то система (2), (3) имеет решение [7]. При этом решение не будет единственным (если a_i^* , b_j^* – решение системы (2), (3), то θa_i^* , $\theta^{-1} b_j^*$ также будет решением для любого $\theta > 0$). Однако в [7] показано, что для любых двух различных решений a_i^1 , b_j^1 и a_i^2 , b_j^2 будет справедливо равенство $a_i^1 b_j^1 = a_i^2 b_j^2$ при любых i, j .

Это означает, что T_{ij} не зависит от того, какое именно решение системы (2), (3) будет использовано в (1). Таким образом, гравитационная модель (1) устанавливает взаимно

однозначное соответствие между МК $\{T_{ij}\}$ с одной стороны и парой векторов $(a_1, \dots, a_I)$, $(b_1, \dots, b_J)$ с другой.

Функция $f(c_{ij})$ называется функцией тяготения. Она показывает «готовность» пассажира совершить поездку в зависимости от размера обобщённой стоимости c_{ij} . В качестве функции тяготения $f(c_{ij})$ часто используют степенную функцию $f(c_{ij}) = c_{ij}^{-\mu}$, показательную функцию $f(c_{ij}) = \exp(-\mu c_{ij})$ или комбинированную функцию $f(c_{ij}) = c_{ij}^{\gamma} \exp(-\mu c_{ij})$, которую также называют показательно-степенной функцией.

Степенная и показательная функции тяготения монотонно убывают при $c_{ij} > 0$, поэтому для этих функций, чем меньше обобщённая стоимость c_{ij} , тем больше «готовность» пассажира совершить поездку. Во многих случаях это верно, однако в некоторых ситуациях при небольших значениях c_{ij} это может быть не так. Например, для внутригородского общественного транспорта у многих пассажиров «готовность» совершить поездку между соседними остановками ниже, чем на более дальнее расстояние (между двумя соседними остановками такие пассажиры предпочитают передвигаться пешком). Аналогичная ситуация будет справедлива и для железнодорожного транспорта дальнего следования: для поездок на небольшие расстояния пассажиры выбирают пригородные поезда или автобусы. Следовательно, в таких случаях для описания тяготения более адекватной является комбинированная функция, которая в случае $\gamma > 0$ сначала возрастает, а затем убывает. Поэтому далее будем рассматривать (1) с комбинированной функцией тяготения, то есть в виде:

$$T_{ij} = a_i b_j c_{ij}^{\gamma} \exp(-\mu c_{ij}). \quad (4)$$

Калибровка гравитационной модели по наблюдаемой МК

Предположим, что в результате наблюдений получена МК $N = \{n_{ij}\}$, $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J$, и рассмотрим задачу оценивания параметров a_i , b_j , γ и μ модели (4) по наблюдаемой матрице N . Очевидно, что способ оценивания зависит от того, как именно будет включена в модель стохастичность, вызывающая отклонение наблюдаемых значений n_{ij} от модельных T_{ij} . Рассмотрим подробно несколько наиболее популярных подходов.

1. Самый простой вариант заключается в предположении, что $n_{ij} = T_{ij} + \varepsilon_{ij}$, где ε_{ij} — случайная величина. В этом случае для оценки параметров модели естественно воспользоваться методом наименьших квадратов (МНК). В результате получим задачу минимизации:

$$S(a_i, b_j, \gamma, \mu) = \sum_{i,j} (n_{ij} - T_{ij})^2 = \sum_{i,j} (n_{ij} - a_i b_j c_{ij}^\gamma \exp(-\mu c_{ij}))^2 \xrightarrow{a_i, b_j, \gamma, \mu} \min,$$

которая в результате применения стандартных методов математического анализа приводит к системе уравнений для определения параметров a_i , b_j , γ и μ :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_i} = 0 \forall i = 1, \dots, I, \\ \frac{\partial S}{\partial b_j} = 0 \forall j = 1, \dots, J, \\ \frac{\partial S}{\partial \mu} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial \gamma} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_i T_{ij} (n_{ij} - T_{ij}) = 0 \forall i = 1, \dots, I, \\ \sum_j T_{ij} (n_{ij} - T_{ij}) = 0 \forall j = 1, \dots, J, \\ \sum_{i,j} C_{ij} T_{ij} (n_{ij} - T_{ij}) = 0, \\ \sum_{i,j} \ln C_{ij} T_{ij} (n_{ij} - T_{ij}) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Слабым местом такого подхода является то, что для применения МНК необходимы ограничения на ε_{ij} , которые в данном случае, скорее всего не будут выполняться. В частности, ε_{ij} не будет гомоскедастичным (очевидно, что дисперсия ε_{ij} зависит от величины T_{ij}). Также существенным недостатком использования МНК является отсутствие осмысленной интерпретации для уравнений (5).

2. Другой подход, который был впервые строго изложен в [8], основывается на предположении, что для совершения поездки каждый пассажир случайным образом и независимо от других пассажиров выбирает одну корреспонденцию (i, j) из $I \times J$ корреспонденций. Причём вероятность p_{ij} выбора корреспонденции (i, j) одинакова для всех пассажиров. При таком подходе T_{ij} интерпретиру-

ется как теоретическая частота выбора корреспонденции (i, j) при $n = \sum_{i,j} n_{ij}$ пассажирах, то есть $T_{ij} = n p_{ij}$. Поэтому гравитационная модель (4) может быть записана в виде:

$$p_{ij} = \frac{1}{n} a_i b_j c_{ij}^\gamma \exp(-\mu c_{ij}). \quad (6)$$

Для оценки параметров $a_1, \dots, a_I, b_1, \dots, b_J, \gamma, \mu$ модели (6) на основе наблюдаемой матрицы N используется метод максимального правдоподобия. В данном случае функция правдоподобия будет иметь вид:

$$L(a_i, b_j, \gamma, \mu) = \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J (p_{ij})^{n_{ij}} = \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J (n^{-1} a_i b_j c_{ij}^\gamma \exp(-\mu c_{ij}))^{n_{ij}}.$$

Логарифмируя функцию L и учитывая, что $n_{ij} \ln n^{-1}$ не зависит от параметров модели, а также то, что вероятности p_{ij} должны удовлетворять условию нормировки $\sum p_{ij} = 1$, приходим к задаче условной оптимизации:

$$\ln L = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J n_{ij} (\ln a_i + \ln b_j + \gamma \ln c_{ij} - \mu c_{ij}) \xrightarrow{a_i, b_j, \gamma, \mu} \max, \\ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_i b_j c_{ij}^\gamma \exp(-\mu c_{ij}) = n.$$

Далее воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа будет иметь вид:

$$F(a_i, b_j, \gamma, \mu, \lambda) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J n_{ij} (\ln a_i + \ln b_j + \gamma \ln c_{ij} - \mu c_{ij}) - \lambda \left(\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_i b_j c_{ij}^\gamma \exp(-\mu c_{ij}) - n \right).$$

Приравнявая частные производные функции F к нулю, получим (7)–(11).

Если каждое из уравнений (7) умножить на a_i и просуммировать по i (или каждое из уравнений (8) умножить на b_j и просуммировать по j), то получим:

$$\lambda \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_i b_j c_{ij}^\gamma \exp(-\mu c_{ij}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J n_{ij} = n. \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a_i} = \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^J n_{ij} - \lambda \sum_{j=1}^J b_j c_{ij}^\gamma \exp(-\mu c_{ij}) = 0 \forall i = 1, \dots, I, \\ \frac{\partial F}{\partial b_j} = \frac{1}{b_j} \sum_{i=1}^I n_{ij} - \lambda \sum_{i=1}^I a_i c_{ij}^\gamma \exp(-\mu c_{ij}) = 0 \forall j = 1, \dots, J, \\ \frac{\partial F}{\partial \mu} = - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J n_{ij} c_{ij} - \lambda \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_i b_j c_{ij}^\gamma \exp(-\mu c_{ij}) (-c_{ij}) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J n_{ij} \ln c_{ij} - \lambda \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_i b_j c_{ij}^\gamma \exp(-\mu c_{ij}) \ln c_{ij} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J a_i b_j c_{ij}^\gamma \exp(-\mu c_{ij}) - n = 0. \end{cases} \quad (7)-(11)$$





Отсюда и из (11) следует что $\lambda = 1$. Также (12) означает, что уравнение (11) является следствием каждой из группы уравнений (7) и (8). Поэтому с учётом (4) система уравнений (7)–(11) принимает вид:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^J T_{ij} = \sum_{j=1}^J n_{ij} \quad \forall i=1, \dots, I, \\ \sum_{i=1}^I T_{ij} = \sum_{i=1}^I n_{ij} \quad \forall j=1, \dots, J, \\ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J T_{ij} c_{ij} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J n_{ij} c_{ij}, \\ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J T_{ij} \ln c_{ij} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J n_{ij} \ln c_{ij}. \end{cases} \quad (13)–(16)$$

Таким образом, оценки параметров $a_1, \dots, a_J, b_1, \dots, b_J, \gamma, \mu$ могут быть найдены из системы уравнений (13)–(16). В отличие от системы (5) здесь все уравнения имеют прозрачную интерпретацию, хорошо соответствующую содержанию гравитационной модели. В частности, уравнение (13) означает, что для каждого пункта i модельное количество отправок (во все пункты прибытия) должно совпадать с наблюдаемым количеством направлений. Аналогично, уравнение (14) означает совпадение соответствующих модельных и наблюдаемых прибытий. Уравнение (15) показывает, что общая модельная стоимость всех поездок должна равняться общей наблюдаемой стоимости всех поездок. Если обе части (15) разделить на $\sum_{i,j} T_{ij} = \sum_{i,j} n_{ij}$,

то его можно интерпретировать как равенство соответствующих средних стоимостей. Последнее уравнение имеет такой же смысл, как и (15), но только для логарифмированной обобщенной стоимости c_{ij} .

3. Ещё один подход для включения стохастичности в гравитационную модель был предложен в [9]. В этой работе количество поездок из пункта i в пункт j является дискретной случайной величиной Θ_{ij} , а задаваемая формулой (4) величина T_{ij} интерпретируется как математическое ожидание величины Θ_{ij} , то есть:

$$M[\Theta_{ij}] = T_{ij} = a_i b_j c_{ij}^{\gamma} \exp(-\mu c_{ij}).$$

Предположим, что величины Θ_{ij} ($i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$) независимы в совокупности и под-

чиняются одному и тому же закону распределения (с разными значениями параметров): $Pr(\Theta_{ij} = k) = \varphi(k, T_{ij}) = \varphi(k, a_i b_j c_{ij}^{\gamma} \exp(-\mu c_{ij}))$.

Тогда для оценки параметров $a_1, \dots, a_J, b_1, \dots, b_J, \gamma, \mu$ на основе наблюдаемой матрицы N воспользуемся методом максимального правдоподобия. В данном случае функция правдоподобия будет иметь вид:

$$L = L(a_i, b_j, \gamma, \mu) = \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J Pr(\Theta_{ij} = n_{ij}) = \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J \varphi(n_{ij}, a_i b_j c_{ij}^{\gamma} \exp(-\mu c_{ij})).$$

После логарифмирования функции L , получаем следующую задачу оптимизации:

$$\ln L = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \ln \varphi(n_{ij}, T_{ij}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \ln \varphi(n_{ij}, a_i b_j c_{ij}^{\gamma} \exp(-\mu c_{ij})) \xrightarrow{a_i, b_j, \gamma, \mu} \max.$$

Приравнявая частные производные функции $\ln L$ к нулю, получаем систему уравнений для определения искомых оценок параметров (17)–(20).

Конкретный вид уравнений (17)–(20) зависит от выбора распределения φ . Достаточно часто в качестве φ используют распределение Пуассона:

$$\varphi(T_{ij}, n_{ij}) = \frac{\exp(-T_{ij}) T_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!}.$$

Непосредственными вычислениями можно проверить, что в этом случае система (17)–(20) превращается в систему уравнений (13)–(16). Если же в качестве φ взять нормальное распределение:

$$\varphi(T_{ij}, n_{ij}) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(T_{ij} - n_{ij})^2}{2\sigma^2}\right),$$

то система (17)–(20) превращается в систему уравнений (5). Причём это будет верно при любом среднем квадратичном отклонении σ .

Таким образом, третий подход к моделированию стохастичности гравитационной модели обобщает первый и второй подходы в том смысле, что он приводит к идентичным

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial a_i} = \frac{1}{a_i} \sum_{j=1}^J T_{ij} \frac{d \ln \varphi}{d T_{ij}} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, I, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial b_j} = \frac{1}{b_j} \sum_{i=1}^I T_{ij} \frac{d \ln \varphi}{d T_{ij}} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, J, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J T_{ij} \frac{d \ln \varphi}{d T_{ij}} c_{ij} = 0, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J T_{ij} \frac{d \ln \varphi}{d T_{ij}} \ln c_{ij} = 0. \end{cases} \quad (17)–(20)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J T_{ij}(\gamma, \mu) c_{ij} &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J q(\gamma, \mu) c_{ij}^* \exp(-\mu c_{ij}) c_{ij} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J n_{ij} c_{ij}, \\ \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J T_{ij}(\gamma, \mu) \ln c_{ij} &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J q(\gamma, \mu) c_{ij}^* \exp(-\mu c_{ij}) \ln c_{ij} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J n_{ij} \ln c_{ij}. \end{aligned} \right. \quad (21)-(22)$$

системам уравнений для определения оценок параметров модели. При этом необходимо подчеркнуть, что первый и третий подходы моделируют стохастичность фактически одинаковым образом: в первом подходе будет $M[T_{ij}] = M[T_{ij} + \varepsilon_{ij}]$ при достаточно естественном предположении $M[\varepsilon_{ij}] = 0$, то есть в обоих подходах модельное количество корреспонденций интерпретируется как математическое ожидание наблюдаемого количества корреспонденций. Однако второй подход принципиально отличается от них: в нём модельная относительная частота корреспонденций является вероятностью выбора пассажиром данной корреспонденции.

Как уже было сказано выше, первый подход и полученные на его основе уравнения (5) редко используются для оценки параметров гравитационной модели и в основном в теоретических исследованиях (один из примеров использования первого подхода для оценки параметров МК на основе энтропийной модели можно найти в [20]), что обусловлено необходимостью накладывать не очень реалистичные ограничения на ε_{ij} . В то же время, уравнения (13)–(16) являются основным инструментом для оценки параметров гравитационной модели как в научных исследованиях, так и при создании транспортных моделей конкретных территорий. Поэтому в настоящей работе для калибровки модели (4) будем использовать систему уравнений (13)–(16). Эта система не имеет аналитического решения, поэтому для ее решения необходимо использовать приближенные методы.

Уравнения (13)–(14) фактически представляют собой систему (2)–(3), где в качестве s_i и d_j используются наблюдаемые количества отправок и прибытий, а значит для них будут справедливы сформулированные выше утверждения о существовании и единственности решения (это ещё раз подчёркивает естественность использования системы (13)–(16) для калибровки модели). Следовательно, для заданных значений γ и μ система (13)–(14) однозначно определяет все произведения a_i , b_j , которые могут быть найдены приближенно с помощью метода простых итераций. Для

этого из уравнений (13) выражаются a_i , а из уравнений (14) выражаются b_j . Затем всем a_i придаются некоторые начальные значения (обычно один) и по ним вычисляются b_j из уравнений (14). По полученным значениям b_j вычисляются a_i из уравнений (14) и так далее. Процесс продолжают до тех пор, пока равенства (13)–(14) не будут выполняться с заданным уровнем точности. Такой алгоритм называют методом Фратара (Fratar) или методом Фернеса (Furness) или бипропорциональным алгоритмом (подробнее см. монографию [21]).

Таким образом, уравнения (13)–(14) задают функцию $q(\gamma, \mu) = a_i(\gamma, \mu) b_j(\gamma, \mu)$. Поэтому (15)–(16) являются уравнениями для γ и μ (21)–(22).

Хотя функция $q(\gamma, \mu)$ является гладкой, её нельзя задать аналитически, более того нам доступны только лишь её приближенные значения. Поэтому для решения системы (21)–(22) удобно перейти к эквивалентной ей задаче оптимизации:

$$\begin{aligned} H(\gamma, \mu) &= H_1(\gamma, \mu) + H_2(\gamma, \mu) = \\ &= \left| \sum_{i,j} T_{ij}(\gamma, \mu) c_{ij} - \sum_{i,j} c_{ij} n_{ij} \right| + \\ &+ \left| \sum_{i,j} T_{ij}(\gamma, \mu) \ln c_{ij} - \sum_{i,j} n_{ij} \ln c_{ij} \right| \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (23)$$

для решения которой необходимо использовать безградиентные методы оптимизации.

Исходные данные

Для калибровки гравитационной модели в настоящей работе были использованы данные из автоматизированной системы управления АБД АСУ «Экспресс», доступные через АРМ «Корреспонденции и финансовые результаты». Эта система позволяет получить количество проданных билетов на поезд дальнего следования для любой пары станций отправления и прибытия, то есть наблюдаемую МК.

Данные были взяты за один месяц 2019 года, типичный для допандемийного периода⁵. Всего

⁵ Данные были получены непосредственно из АБД АСУ «Экспресс» на основании договора о доступе УрГУПС к системе в 2019 году в исследовательских целях.





Таблица 1

Основные характеристики наблюдаемых МК [рассчитано авторами]

Характеристика	БМК	ММК
Количество городов	98	38
Количество корреспонденций	9604	1444
Количество пассажиров	3743252	2240018
Количество нулевых корреспонденций	6217	616
Количество корреспонденций, у которых меньше 10 пассажиров	6504	622
Максимальное количество пассажиров для одной корреспонденции	30006	30006
Среднее число пассажиров по всем корреспонденциям	390	1551
Среднее число пассажиров по всем ненулевым корреспонденциям	1105	2705
Медианное число пассажиров по всем корреспонденциям	0	134
Медианное число пассажиров по всем ненулевым корреспонденциям	157	835
Пассажирооборот, тыс. чел.-км.	4563511	3009016
Средняя дальность поездки, км	1219,13	1348,3

Таблица 2

Результаты калибровки гравитационной модели [рассчитано авторами]

Величина	БМК	ММК
Параметр γ	0,3611	0,6616
Параметр μ	1,1515	1,3093
Минимизируемая функция $H(\gamma, \mu)$	365,1	32,7
Абсолютное отклонение пассажирооборота $H_1(\gamma, \mu)$	199,7	18,29
Абсолютное отклонение пассажирооборота для лограсстояния $H_2(\gamma, \mu)$	165,4	14,44
Относительное отклонение пассажирооборота $H_1(\gamma, \mu) / \sum c_{ij} n_{ij}$	$4,4 \cdot 10^{-5}$	$6,1 \cdot 10^{-6}$
Относительное отклонение пассажирооборота для лограсстояния $H_2(\gamma, \mu) / \sum n_{ij} \ln c_{ij}$	$5,5 \cdot 10^{-4}$	$9,2 \cdot 10^{-5}$

в АСУ содержится информация почти о 37 тыс. станций. Но подавляющее большинство станций генерируют незначительный пассажиропоток. Для 35 тыс. станций количество отправленных и прибывших пассажиров (для всех направлений) составляет всего несколько человек в месяц. Ещё для 1000 станций отправления (прибытия) составляют не более 500 пассажиров в месяц, то есть менее 20 человек в день. Поэтому для расчётов параметров гравитационной модели не имеет смысла использовать все станции. Также необходимо иметь в виду, что в одном городе может находиться несколько железнодорожных станций, поэтому их пассажиропотоки необходимо объединить и рассматривать МК не по станциям, а по городам.

Чтобы сравнить качество аппроксимации для наблюдаемых МК разных размеров, калибровку модели будем осуществлять на двух наборах данных: МК для городов, у каждого из которых суммарно более 20 тыс. отправлений и прибытий, а также МК для городов, у каждого из которых суммарно более 50 тыс. отправлений и прибытий. Для краткости, первую из них будем называть большой МК (БМК), а вторую малой МК (ММК). Статистика этих МК представлена в табл. 1.

Отметим, что в рассматриваемых МК достаточно большое количество нулевых корреспонденций (см. табл. 1). В частности, потому что, между многими городами отсутствует прямое пассажирское сообщение. Пункты отправления и прибытия ММК, а также все её корреспонденции объёмом более 5000 пассажиров представлены на рис. 1.

Также визуализация наблюдаемых данных для случая ММК представлена на рис. 2. Здесь хорошо видна высокая степень неоднородности в распределении пассажиров по корреспонденциям: подавляющее большинство городов имеют значительные пассажиропотоки для небольшого числа корреспонденций (от 1 до 4) и только для нескольких городов распределение пассажиров по корреспонденциям выглядит равномерно.

В качестве обобщённой стоимости c_{ij} в гравитационной модели будем использовать тарифное расстояние между станциями. Если между станциями i и j отсутствует прямое пассажирское сообщение, то принимаем $c_{ij} = \infty$. Также поступаем для диагональных элементов МК, то есть $c_{ij} = \infty$ для любого i . При расчётах в качестве ∞ используется достаточно большое число.

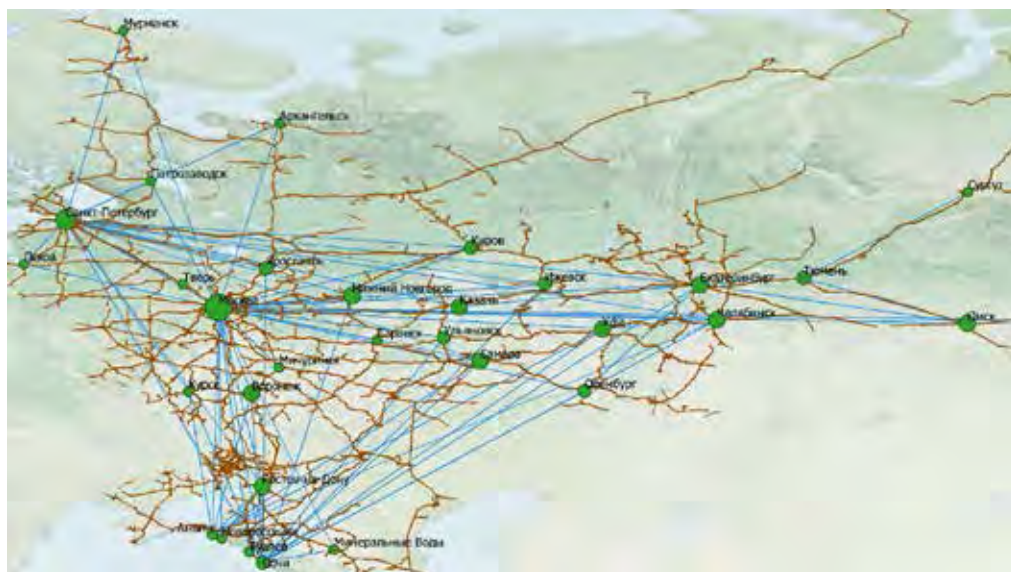


Рис. 1. Корреспонденции ММК объемом более 5000 пассажиров [построено авторами].

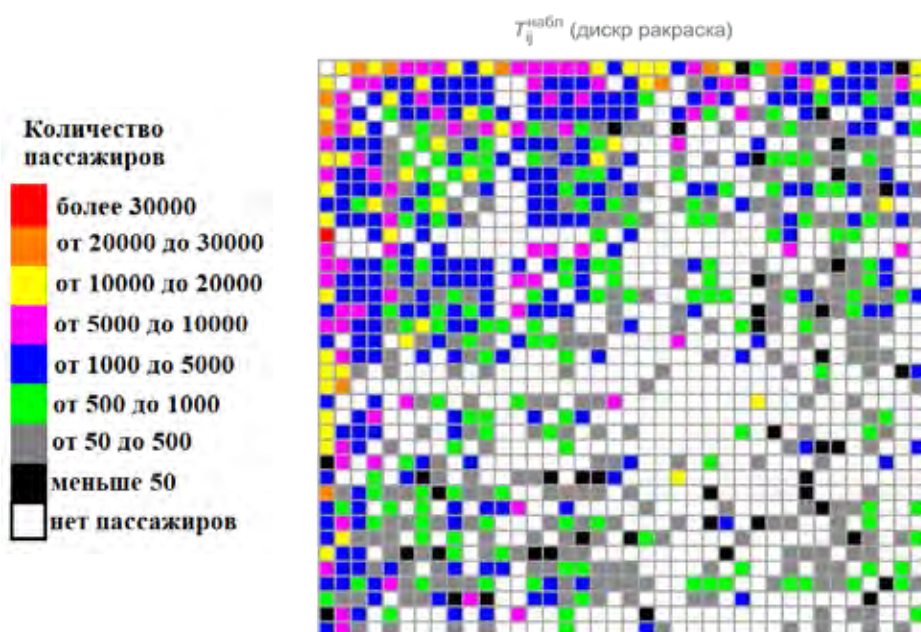


Рис. 2. Визуализация ММК [построено авторами].

Для такого выбора c_{ij} левая и правая части уравнения (21) представляют собой модельный и наблюдаемый пассажирооборот соответственно, а минимизируемая функция $H_1(\gamma, \mu)$ равна абсолютному отклонению модельного пассажирооборота от наблюдаемого. Если обе части уравнения (21) разделить на $\sum_{i,j} T_{ij} = \sum_{i,j} n_{ij}$, то получим модельную и наблюдаемую средние дальности поездок (СДП). Аналогичным образом можно интерпретировать и уравнение (22) для логарифмированного расстояния (лограсстояния).

Таким образом, калибровка гравитационной модели сводится к подбору таких значений параметров γ и μ , при которых модельный пассажирооборот совпадает с наблюдаемым.

Также отметим, что параметры γ и μ нелинейно зависят от выбора единицы измерения c_{ij} . В частности, если c_{ij} измерять в километрах, то при характерных для российской железнодорожной сети расстояниях в несколько тысяч километров, значения γ и μ могут оказаться меньше машинного нуля. Поэтому значения c_{ij} будем задавать в тыс. км.



Таблица 3

Меры близости между модельной и наблюдаемой МК [рассчитано авторами]

Мера близости матриц	БМК	ММК
Средняя абсолютная ошибка $MAE = \sum_{i,j} n_{ij} - T_{ij} / (I \cdot J)$	242	886
Абсолютная ошибка, усреднённая по пассажирам $MAE_p = \sum_{i,j} n_{ij} - T_{ij} / \sum_{i,j} n_{ij}$	0,62	0,57
Стандартное отклонение $S = \left(\sum_{i,j} (n_{ij} - T_{ij})^2 / (I \cdot J - 1) \right)^{1/2}$	1152	2337
Коэффициент корреляции $r = cov(n_{ij}, T_{ij}) / (\sigma(n_{ij}) \sigma(T_{ij}))$	0,77	0,78
Коэффициент корреляции r только для $n_{ij} > 0$	0,75	0,75
Коэффициент детерминации $R^2 = 1 - \sum_{i,j} (n_{ij} - T_{ij})^2 / \sum_{i,j} (n_{ij} - \bar{n}_{ij})^2$	0,55	0,59
Коэффициент детерминации R^2 только для $n_{ij} > 0$	0,51	0,53

Результаты моделирования

Для минимизации функции (23) был использован метод Нелдера–Мида. Полученные результаты представлены в табл. 2.

Как видно из таблицы, в обоих случаях калибровка модели выполнена с достаточно высокой точностью. В частности, модельный пассажирооборот равен наблюдаемому с относительной погрешностью менее 0,01 %.

Для валидации гравитационной модели оценивают близость между наблюдаемой и модельной МК, а также сравнивают модельное и наблюдаемое распределения дальности поездок (такой подход доступен и в ситуациях, когда наблюдаемая МК неизвестна, а распределение дальности поездок получают с помощью опросов). При этом могут возникать определённые сложности в использовании стандартных инструментов сравнения и интерпретации получаемых результатов (см. [22–24] и, особенно, [25]). В частности, ис-

пользование критерия хи-квадрат для сравнения МК (и распределений дальности поездки) почти всегда приводит к отклонению гипотезы о совпадении модельных и наблюдаемых частот, что связано с разреженностью наблюдаемой МК и очень высокой чувствительностью этого критерия для выборок большого размера. Аналогичные сложности возникают и при использовании других критериев согласия.

Использовать в качестве мер близости такие показатели как коэффициент корреляции, коэффициент детерминации и им подобные также нужно крайне осторожно из-за сильной нелинейности (при близких значениях этих показателей качество моделей может существенно отличаться [22; 25]). Для преодоления сложностей, связанных с нелинейностью, разработаны относительные информационные критерии, которые зависят от ошибок «почти линейно» и поэтому позволя-

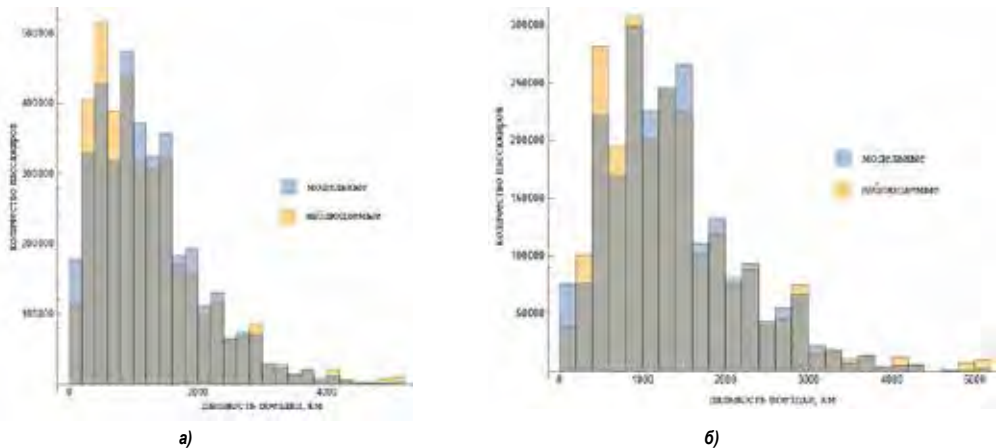


Рис. 3. Сравнение модельного и наблюдаемого распределения дальности поездки для: а) БМК; б) ММК [построено авторами].

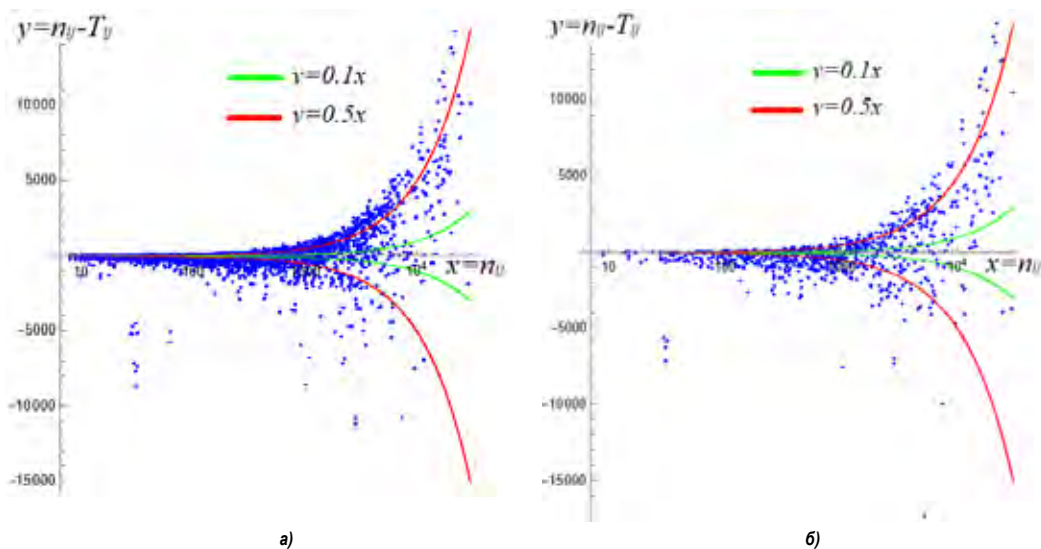


Рис. 4. Отклонения модели для: а) БМК; б) ММК (на горизонтальной оси используется логарифмический масштаб [построено авторами]).

ют эффективно сравнивать разные модели [25]. Если же стоит задача проверки адекватности одной модели, то здесь необходимо исходить из содержательной постановки конкретной задачи и использовать легко интерпретируемые меры близости типа средней абсолютной ошибки и другие.

В нашем случае распределение дальности поездок для наблюдаемых и модельных матриц представлены на рис. 3. Здесь модельные значения достаточно хорошо согласуются с наблюдаемыми: суммарное отклонение по всем интервалам составляет 14 % и для ММК, и для БМК, то есть только 14 % пассажиров, предсказанных моделью, будут совершать поездки на расстояния, отличные от наблюдаемых. Попутно отметим, что, как и указывалось выше, формальное применение критерия хи-квадрат приводит к выводу о различии модельных и наблюдаемых частот: для ММК и БМК значения критерия составляют $\chi^2_{набл} = 150031$ и $\chi^2_{набл} = 149143$ соответственно.

Количественные оценки близости матриц представлены в табл. 3. Здесь сразу можно отметить, что за исключением MAE и S, все показатели практически совпадают для БМК и ММК. Сильные отличия MAE и S обусловлены тем, что по количеству корреспонденций БМК и ММК отличаются гораздо сильнее, чем по количеству пассажиров.

Полученные значения показателей MAE, MAE_p и S в табл. 3 говорят о низком уровне соответствия между наблюдаемыми и модельными значениями. В частности, значение

MAE составляет более 50 % от среднего и медианного количества пассажиров (см. табл. 1), а MAE_p показывает такие же значения относительно одного пассажира. Коэффициенты корреляции и детерминации показывают более высокий уровень соответствия, но, как уже отмечалось, в данной ситуации это имеет второстепенное значение.

К окончательным выводам относительно качества полученной модели позволяет прийти рис. 4. На рисунке вместе с остатками модели построены прямые $y = 0,1x$ и $y = 0,5x$ (в логарифмическом масштабе по оси x), которые выделяют 10 % и 50 % отклонения модели для корреспонденций. На рисунке видно, что точных прогнозов (с отклонением менее 10 %) мало, а неточных (с отклонением более 50 %) – много. Причём это верно для корреспонденций с любым объёмом пассажиров. Таким образом, для прогнозирования пассажиропотоков на отдельных корреспонденциях гравитационную модель использовать нельзя.

ВЫВОДЫ

Проверка адекватности гравитационной модели с двойным ограничением и показательно-степенной функцией тяготения для моделирования матрицы корреспонденций железнодорожного сообщения дальнего следования показывает, что:

1) Модель с высокой точностью прогнозирует такие агрегированные характеристики пространственного распределения пассажи-



ропотоков, как средняя дальность поездки, общий пассажирооборот и распределение дальности поездок.

2) Точность модели для прогнозирования пассажиропотоков отдельных корреспонденций является достаточно низкой.

Таким образом, модель может быть использована для прогнозирования распределения дальности поездок, но для прогноза объёмов отдельных корреспонденций её использовать нельзя.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Ortúzar, J. de D., Willumsen, L. G. Modelling Transport. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2011, 608 p. ISBN 1119993520, 9781119993520.
2. Reilly, W. J. The law of retail gravitation. New York: Knickerbocker Press, 1931. Corpus ID: 117983034.
3. Hua, C., Porell, F. A Critical Review of the Development of the Gravity Model. International Regional Science Review, 1979, Vol. 4 (2), pp. 97–126. DOI: 10.1177/016001767900400201.
4. Изард У. Методы регионального анализа: введение в науку о регионах / Пер. с англ. В. М. Хомана, Ю. Г. Липец, С. Н. Тарера. – М.: Прогресс, 1966. – 660 с. [Электронный ресурс]: <https://libcats.org/book/671460/>. Доступ 13.01.2023.
5. Мартыненко А. В. Модификация гравитационной модели Андерсона и ван Винкоопа для анализа торговли между Россией и Беларусью // AlterEconomics. – 2022. – Т. 19. – № 2. – С. 326–350. DOI: 10.31063/AlterEconomics/2022.19-2.7.
6. Hyman, G. M. The calibration of trip distribution models. Environment and Planning A: Economy and Space, 1969, Vol. 1 (1), pp. 105–112. DOI: 10.1068/a010105.
7. Evans, A. W. Some properties of trip distribution methods. Transportation Research, 1970, Vol. 4, pp. 19–36. DOI: 10.1016/0041-1647(70)90072-9.
8. Evans, A. W. The calibration of trip distribution models with exponential or similar cost functions. Transportation Research, 1971, Vol. 5 (1), pp. 15–38. DOI: 10.1016/0041-1647(71)90004-9.
9. Kirby, H. R. Theoretical Requirements for Calibrating Gravity Models. Transportation Research, 1974, Vol. 8, Iss. 2, pp. 97–104. DOI: 10.1016/0041-1647(74)90036-7.
10. Erlander, S., Stewart, N. F. The gravity model in transportation analysis: theory and extensions. CRC Press, 1st edition, 1990, 226 p. ISBN-10 9067640891; ISBN-13 978-9067640893.
11. Wells, G. Traffic Engineering: An Introduction. Charles Griffith, London, 1979. 2nd ed. ISBN 978-0852642542.
12. Grosche, T., Franz Rothlauf, F., Heinzl, A. Gravity models for airline passenger volume estimation. Journal of Air Transport Management, 2007, Vol. 13, Iss. 4, pp. 175–183. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jairtraman.2007.02.001>.

13. Lenormand, M., Bassolas, A., Ramasco, J. J. Systematic comparison of trip distribution laws and models. Journal of Transport Geography, 2016, Vol. 51, pp. 158–169. DOI: 10.1016/j.jtrangeo.2015.12.008.

14. McArthur, D. P., Kleppe, G., Thorsen, I., Ubøe, J. The spatial transferability of parameters in a gravity model of commuting flows. Department of Finance and Management Science, Norwegian School of Economics and Business Administration, Discussion Papers, 2011, Vol. 19 (4), 27 p. DOI: 10.2139/ssrn.1612164.

15. Мартыненко А. В., Филиппова Е. Г. Моделирование пространственного распределения междугородных автомобильных поездок на основе данных сервисов карпулинга // Транспорт Урала. – 2021. – № 3 (70). – С. 33–38. DOI: 10.20291/1815-9400-2021-3-33-38.

16. Chen, Yanguang. The distance-decay function of geographical gravity model: Power law or exponential law? Chaos, Solitons & Fractals, 2015, Vol. 77, pp. 174–189. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.05.022.

17. Cordera, R., Sañudo, R., dell'Olio, L., Ibeas, Á. Trip distribution model for regional railway services considering spatial effects between stations. Transport Policy, 2018, Vol. 67 (C), pp. 77–84. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tranpol.2018.01.016>.

18. Abdel-Aal, Mounir. Calibrating a trip distribution gravity model stratified by the trip purposes for the city of Alexandria. Alexandria Engineering Journal, 2014, Vol. 53, Iss. 3, pp. 677–689. DOI: 10.1016/j.aej.2014.04.006.

19. Timofeeva, G., Ie, O. Evaluation of origin-destination matrices based on analysis of data on transport passenger flows. Applications of Mathematics in Engineering and Economics, AMEE 2020: Proceedings of the 46th International Conference, Sofia, American Institute of Physics Inc., 2020, Vol. 2333, 100002. DOI: 10.1063/5.0041801.

20. Иванова А. С., Омельченко С. С., Котлярова Е. В., Матюхин В. В. Калибровка параметров модели расчёта матрицы корреспонденций для г. Москвы // Компьютерные исследования и моделирование. – 2020. – Т. 12. – Вып. 5. – С. 961–978. DOI: <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2020-12-5-961-978>.

21. Ortúzar, J. D., Willumsen, G. L. Modelling transport. New Delhi, 2011, 608 p. ISBN 9781119993537.

22. Black, W. R. A note on the use of correlation coefficients for assessing goodness-of-fit in spatial interaction models. Transportation, 1991, Vol. 18, pp. 199–206. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00172935>.

23. Wilson, S. R. Statistical notes on the evaluation of calibrated gravity models. Transportation Research, 1976, Vol. 10, Iss. 5, pp. 343–345. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-1647\(76\)90114-3](https://doi.org/10.1016/0041-1647(76)90114-3).

24. Black, J. A., Salter, R. J. A statistical evaluation of the accuracy of a family of gravity models. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 1975, Vol. 59 Iss. 1, pp. 1–20. DOI: <https://doi.org/10.1680/iicep.1975.3839>.

25. Knudsen, D. C., Fotheringham, A. S. Matrix comparison, goodness-of-fit, and spatial inter-action modeling. International Regional Science Review, 1986, Vol. 10, pp. 127–147. DOI: 10.1177/016001768601000203.

Информация об авторах:

Мартыненко Александр Валериевич – кандидат физико-математических наук, доцент, руководитель научно-исследовательской лаборатории транспортного моделирования Уральского государственного университета путей сообщения (УрГУПС); старший научный сотрудник Центра развития и размещения производительных сил Института экономики Уральского отделения Российской академии наук (ИЭ УрО РАН), Екатеринбург, Россия, amartynenko@rambler.ru.

Сайфутдинов Денис Жавдатович – аспирант кафедры естественнонаучных дисциплин Уральского государственного университета путей сообщения (УрГУПС), Екатеринбург, Россия, denisssov@yandex.ru.

Статья поступила в редакцию 22.12.2022, одобрена после рецензирования 27.02.2023, принята к публикации 03.03.2023.