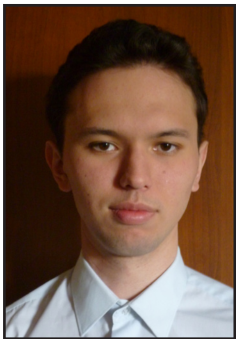
УДК 621.317.0880

Распределения статистик при проверке гипотез

Нурлан СЕЙДАХМЕТОВ
Nurlan B. SEYDAKHMETOV



Николай РУБИЧЕВ
Nikolai A. RUBICHEV

***Рубичев Николай Александрович** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Электроэнергетика транспорта» Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), Москва, Россия.*
***Сейдахметов Нурлан Багитович** – аспирант МИИТ, Москва, Россия.*

Distribution of Statistics in Hypotheses Testing *(текст статьи на англ. яз. – English text of the article – p. 26)*

В статье рассмотрено влияние формы законов распределения единичных наблюдений на квантили статистик, используемых при проверке статистических гипотез и имеющих распределение хи-квадрат или распределение Фишера при нормальном распределении единичных наблюдений. Путем математического моделирования на примере четырех вариантов показано, что отличие закона распределения от нормального приводит к существенному изменению величины квантилей. Это эквивалентно необоснованному изменению уровня значимости при выборе решающего правила.

Ключевые слова: математическая статистика, закон распределения, квантили, статистическая гипотеза, статистическое моделирование.

Проверка статистических гипотез [1] характерна для статистических методов контроля качества, выявления промахов в результатах измерений [2, 3]. Наиболее часто используются статистики γ, имеющие распределение хи-квадрат и распределение Фишера. В первом случае статистика может быть представлена в виде

$$\gamma_1 = \chi_N^2 = \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 . \qquad (1)$$

При этом предполагается, что случайные величины ξ_i статистически независимы и имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичным средним квадратичным отклонением

$$w(x) = e^{-x^2/2} \Big/ \sqrt{2\pi} . \qquad (2)$$

Число слагаемых N называется числом степеней свободы.

Во втором случае

$$\gamma_2 = F_{N_1 N_2} = \frac{\chi_{N_1}^2}{N_1} \Big/ \frac{\chi_{N_2}^2}{N_2} \Big/ . \qquad (3)$$

Случайные величины $\chi_{N_1}^2$ и $\chi_{N_2}^2$ предполагаются статистически независимыми и имеющими распределение хи-квадрат

Таблица 1

Табличные квантили распределения хи-квадрат

p	Число степеней свободы N					
	2	3	5	10	20	30
0,02	0,040	0,185	0,752	3,059	9,237	16,306
0,05	0,103	0,352	1,145	3,94	10,851	18,493
0,1	0,211	0,584	1,61	4,865	12,444	20,599
0,2	0,446	1,005	2,343	6,179	14,578	23,364
0,8	3,219	4,642	7,289	13,442	25,038	36,25
0,9	4,605	6,251	9,236	15,987	28,412	40,256
0,95	5,991	7,815	11,070	18,307	31,410	43,773
0,98	7,824	9,837	13,388	21,161	35,020	47,962

Таблица 2

Квантили статистики γ_1 для различных распределений

$p_{\text{дов}}$	Число степеней свободы N					
	2	3	5	10	20	30
Равномерное распределение						
0,02	0,07	0,31	1,25	4,68	11,95	19,60
0,05	0,19	0,66	1,88	5,51	13,57	21,96
0,1	0,40	1,04	2,50	6,40	14,90	23,59
0,2	0,79	1,61	3,28	7,50	16,55	25,80
0,8	3,08	4,36	6,63	12,40	23,40	34,26
0,9	3,69	5,15	7,63	13,64	25,38	36,57
0,95	4,33	5,64	8,36	14,87	26,96	38,39
0,98	4,89	6,29	9,25	16,02	28,44	40,31
Треугольное распределение						
0,02	0,04	0,16	0,78	3,21	9,93	17,51
0,05	0,10	0,36	1,16	4,21	11,59	19,62
0,1	0,22	0,58	1,84	5,20	13,14	21,59
0,2	0,45	1,09	2,55	6,50	15,17	24,25
0,8	3,43	4,77	7,13	13,13	24,57	35,71
0,9	4,57	5,94	8,53	15,27	27,35	39,02
0,95	5,39	6,81	9,85	17,00	29,87	41,74
0,98	6,28	8,00	11,24	19,36	32,19	44,49
Распределение Лапласа						
0,02	0,01	0,07	0,35	1,83	6,10	11,07
0,05	0,04	0,17	0,63	2,48	7,53	14,17
0,1	0,10	0,30	0,95	3,25	9,42	16,36
0,2	0,23	0,57	1,54	4,49	11,84	19,71
0,8	2,90	4,60	7,28	14,12	26,38	38,65
0,9	5,04	7,15	10,57	18,69	32,25	45,40
0,95	7,57	9,81	14,13	22,85	37,39	51,70
0,98	11,12	14,33	18,73	28,16	45,83	60,12
Быстроубывающее распределение						
0,02	0,06	0,25	1,02	3,98	10,89	18,01
0,05	0,15	0,54	1,56	4,89	12,41	20,81
0,1	0,32	0,85	2,12	5,76	14,01	22,61
0,2	0,65	1,35	2,92	7,04	16,04	25,06
0,8	3,27	4,59	6,99	12,75	24,02	35,17
0,9	4,25	5,57	8,26	14,47	26,42	38,06
0,95	4,93	6,44	9,27	16,09	28,69	40,40
0,98	5,73	7,32	10,46	17,56	30,75	42,91

Таблица 3

Квантили распределения Фишера

N_2	p	N_1					
		2	3	5	10	20	30
2	0,75	2,10	2,07	2,03	2,05	2,04	2,05
	0,90	4,71	4,54	4,62	4,69	4,61	4,68
	0,95	9,47	9,51	8,65	10,13	9,42	9,56
	0,99	72,34	56,98	55,23	49,61	44,67	44,52
3	0,75	2,28	2,36	2,41	2,44	2,46	2,47
	0,90	5,46	5,39	5,31	5,23	5,18	5,17
	0,95	9,55	9,28	9,10	8,79	8,66	8,62
	0,99	30,8	29,5	28,2	27,2	26,7	26,5
5	0,75	1,85	1,88	1,89	1,89	1,88	1,88
	0,90	3,78	3,62	3,45	3,30	3,21	3,17
	0,95	5,79	5,41	5,05	4,74	4,56	4,50
	0,99	13,3	12,1	11,0	10,1	9,55	9,38
10	0,75	1,60	1,60	1,59	1,55	1,52	1,51
	0,90	2,92	2,73	2,52	2,32	2,20	2,16
	0,95	4,10	3,71	3,33	2,98	2,77	2,70
	0,99	7,56	6,55	5,64	4,85	4,41	4,25
20	0,75	1,49	1,48	1,45	1,40	1,36	1,34
	0,90	2,59	2,38	2,16	1,94	1,79	1,74
	0,95	3,49	3,10	2,71	2,35	2,12	2,04
	0,99	5,85	4,94	4,10	3,37	2,94	2,78
30	0,75	1,45	1,44	1,41	1,35	1,30	1,28
	0,90	2,49	2,28	2,05	1,82	1,67	1,61
	0,95	3,32	2,92	2,53	2,16	1,93	1,84
	0,99	5,39	4,51	3,70	2,98	2,55	2,39

с числом степеней свободы N_1 и N_2 соответственно.

Распределения хи-квадрат и Фишера табулированы в виде квантилей γ_p, определяемых из условия

$$P[\gamma \le \gamma_p] = p. \qquad (4)$$

В [4] отмечается, что использование для результатов наблюдений соотношений с распределениями, отличными от тех, для которых получены эти соотношения, может привести к существенным ошибкам. В данной работе на основе статистического моделирования показано, что отличие реальных распределений единичных наблюдений от нормального приводит к существенному изменению квантилей (4) для статистик γ_1 и γ_2. При моделировании формировались массивы случайных чисел с теми же распределениями, что и в [5].

Прямоугольное распределение задается формулой

$$w(x) = \begin{cases} 1/2b & |x| \le b; \\ 0 & |x| > b. \end{cases} \qquad (5)$$

Для этого распределения $\sigma = b/\sqrt{3} \approx 0{,}58b$.

Треугольное распределение задается формулой

$$w(x) = \begin{cases} \left(1 - |x|/b\right)/b & |x| \le b; \\ 0 & |x| > b. \end{cases} \qquad (6)$$

В этом случае $\sigma = b/\sqrt{6} \approx 0{,}41b$.

Трапецеидальное, прямоугольное и треугольное распределения в отличие от нормального (отличного от нуля на всей числовой оси) являются финитными, то есть они отличны от нуля на конечном интервале. При этом в районе максимума, достигаемого при $x = 0$, нормальное распределение оказывается более плоским, чем треугольное, и менее плоским, чем прямоугольное.

В качестве нефинитного распределения, менее плоского и убывающего с ростом модуля аргумента медленнее, чем нормальное, можно рассматривать двухстороннее экспоненциальное распределение (распределение Лапласа)

$$w(x) = e^{-|x|/m}/2m. \qquad (7)$$

Для него $\sigma = m\sqrt{2} \approx 1{,}41m$.

В качестве нефинитного распределения, более плоского и убывающего с ростом мо-

Таблица 4

Квантили статистики γ_2 для равномерного распределения

N_2	p	N_1					
		2	3	5	10	20	30
2	0,75	2,10	2,07	2,03	2,05	2,04	2,05
	0,90	4,71	4,54	4,62	4,69	4,61	4,68
	0,95	9,47	9,51	8,65	10,13	9,42	9,56
	0,99	72,34	56,98	55,23	49,61	44,67	44,52
3	0,75	1,79	1,74	1,70	1,75	1,70	1,69
	0,90	3,45	3,20	3,11	3,15	3,16	3,07
	0,95	5,22	5,01	5,23	5,44	5,04	5,03
	0,99	13,69	12,35	11,31	13,74	13,00	12,54
5	0,75	1,65	1,55	1,48	1,47	1,46	1,43
	0,90	2,52	2,38	2,13	2,18	2,11	2,12
	0,95	3,35	3,24	3,03	2,85	2,73	2,75
	0,99	6,14	6,18	6,01	4,71	5,38	5,15
10	0,75	1,51	1,46	1,37	1,32	1,30	1,27
	0,90	2,18	1,96	1,76	1,73	1,64	1,63
	0,95	2,65	2,34	2,10	2,03	1,92	1,87
	0,99	3,96	3,65	3,05	2,71	2,71	2,58
20	0,75	1,48	1,40	1,29	1,26	1,19	1,19
	0,90	2,02	1,81	1,63	1,56	1,45	1,41
	0,95	2,31	2,11	1,87	1,76	1,58	1,54
	0,99	3,02	2,71	2,41	2,13	2,05	1,96
30	0,75	1,49	1,38	1,29	1,26	1,19	1,16
	0,90	1,94	1,77	1,60	1,52	1,39	1,35
	0,95	2,28	2,04	1,82	1,64	1,53	1,46
	0,99	2,82	2,57	2,28	1,92	1,77	1,70

дуля аргумента быстрее, чем нормальное, рассмотрим

$$w(x) = 2e^{-x^4/m^4} \big/ m\Gamma(0,25) \approx 0{,}552 e^{-x^4/m^4} \big/ m. \quad (8)$$

В данном случае $\sigma = m\sqrt{\Gamma(0{,}75)/\Gamma(0{,}25)} \approx 0{,}58\, m$, где $\Gamma(.)$ – полная гамма-функция. Ниже это распределение будем называть быстроубывающим.

Случайные числа с распределениями (6), (7) и (8) формировались путем нелинейного преобразования чисел с равномерным распределением, формируемых в рамках программы Excel. Вид преобразований указан в [5].

В таблице 1 для некоторых N и p приведены значения квантилей распределения хи-квадрат, соответствующие статистике γ_1 при нормальном распределении единичных результатов наблюдений.

При моделировании для каждого слагаемого в (1) было сформировано по 1000 значений чисел с заданным распределением, и по результатам обработки получены значения квантилей для статистики γ_1. Результаты вычислений приведены в таблице 2.

При равномерном, треугольном и быстроубывающем распределениях единичных измерений квантили больше, чем при нормальном распределении, при вероятностях 0,02-0,2 и меньше (почти везде) – при вероятностях 0,8-0,98. Наибольшие отличия наблюдаются при равномерном распределении, наименьшие – при треугольном. При распределении Лапласа ситуация обратная. С ростом числа степеней свободы для всех распределений происходит уменьшение относительного отличия доверительных границ от результатов при нормальном распределении.

Если гипотеза о нормальности распределения единичных измерений выполняется, статистика γ_2, задаваемая формулой (3), имеет распределение Фишера. Квантили этого распределения для некоторых p и чисел степеней свободы приведены в таблице 3.

При невыполнении предположения о нормальности, как и в предыдущем случае, квантили статистики γ_2 не будут иными. Результаты моделирования для распределений (5)-(8) даны в таблицах 4-7.

Из сопоставления данных таблиц 4-7 с данными таблицы 3 видно, что при равно-

Таблица 5

Квантили статистики γ_2 для треугольного распределения

N_2	p	N_1					
		2	3	5	10	20	30
2	0,75	2,62	2,81	2,93	3,07	3,13	3,15
	0,90	8,73	8,33	8,19	9,00	9,07	8,91
	0,95	20,15	21,30	18,92	16,45	17,04	17,02
	0,99	80,57	100,89	101,53	98,77	105,69	90,87
3	0,75	2,24	2,30	2,29	2,23	2,37	2,32
	0,90	5,13	5,30	4,71	4,77	4,84	4,83
	0,95	9,06	8,38	7,93	8,06	8,16	7,92
	0,99	31,30	34,16	26,95	20,96	19,82	20,45
5	0,75	1,84	1,83	1,78	1,76	1,76	1,74
	0,90	3,52	3,38	3,10	2,91	2,85	2,91
	0,95	5,80	5,05	4,21	3,97	3,94	3,82
	0,99	11,47	11,33	12,06	11,11	8,28	9,47
10	0,75	1,64	1,56	1,48	1,48	1,43	1,41
	0,90	2,86	2,52	2,24	2,15	1,98	1,89
	0,95	3,75	3,31	2,92	2,71	2,38	2,36
	0,99	5,57	4,48	4,14	4,19	3,71	3,70
20	0,75	1,55	1,47	1,40	1,35	1,30	1,28
	0,90	2,41	2,17	1,96	1,80	1,67	1,59
	0,95	3,06	2,78	2,41	2,15	1,92	1,86
	0,99	4,77	3,96	3,34	3,15	2,61	2,51
30	0,75	1,53	1,42	1,34	1,29	1,25	1,23
	0,90	2,32	2,06	1,90	1,77	1,59	1,51
	0,95	2,94	2,52	2,25	2,03	1,78	1,65
	0,99	4,19	3,77	3,05	2,84	2,30	2,17

Таблица 6

Квантили статистики γ_2 для распределения Лапласа

N_2	p	N_1					
		2	3	5	10	20	30
2	0,75	4,21	4,67	4,82	6,07	6,09	6,07
	0,90	15,62	17,70	16,80	19,22	19,39	19,16
	0,95	35,24	40,96	39,57	48,16	45,64	42,31
	0,99	361,01	332,19	346,67	274,46	230,41	252,57
3	0,75	2,94	3,16	3,46	4,07	4,25	4,18
	0,90	9,79	10,35	10,84	11,33	10,19	10,91
	0,95	19,31	20,91	20,52	20,56	21,18	20,97
	0,99	65,52	70,25	60,63	61,81	54,77	62,25
5	0,75	2,08	2,23	2,39	2,66	2,73	2,80
	0,90	5,85	5,49	5,13	5,89	5,77	5,59
	0,95	9,72	10,67	9,64	9,10	8,77	8,86
	0,99	30,87	26,60	21,68	21,96	23,87	25,57
10	0,75	1,61	1,67	1,72	1,92	1,90	1,88
	0,90	3,97	3,67	3,32	3,38	3,34	3,37
	0,95	6,41	5,83	5,15	5,12	4,60	4,42
	0,99	15,20	12,08	10,16	8,94	9,94	8,58
20	0,75	1,33	1,44	1,51	1,52	1,52	1,52
	0,90	3,34	2,90	2,63	2,58	2,33	2,34
	0,95	4,73	4,04	4,03	3,45	3,06	2,91
	0,99	9,07	7,84	5,85	5,68	4,93	4,31
30	0,75	1,28	1,43	1,48	1,49	1,43	1,44
	0,90	2,99	2,69	2,55	2,38	2,15	2,06
	0,95	4,34	4,26	3,58	3,10	2,74	2,52
	0,99	8,31	7,91	5,65	4,48	4,19	3,62

Таблица 7

Квантили статистики γ_2 для быстроубывающего распределения

N_2	p	N_1					
		2	3	5	10	20	30
2	0,75	2,46	2,49	2,39	2,48	2,47	2,48
	0,90	5,74	5,95	5,60	5,84	5,58	5,65
	0,95	11,52	10,90	10,66	11,98	11,21	11,70
	0,99	91,84	77,08	75,49	64,68	58,45	59,64
3	0,75	1,99	1,97	1,93	2,05	2,01	2,00
	0,90	4,21	4,04	3,92	3,86	3,84	3,81
	0,95	6,22	6,52	6,52	6,47	6,39	6,16
	0,99	18,93	17,03	15,36	16,73	15,08	14,66
5	0,75	1,76	1,69	1,61	1,61	1,64	1,63
	0,90	3,01	2,82	2,55	2,61	2,53	2,52
	0,95	4,21	4,06	3,62	3,67	3,38	3,32
	0,99	8,23	8,56	6,92	6,00	6,71	6,43
10	0,75	1,58	1,52	1,45	1,39	1,39	1,35
	0,90	2,50	2,26	1,97	1,98	1,84	1,85
	0,95	3,30	2,82	2,46	2,41	2,23	2,14
	0,99	5,16	4,58	3,88	3,36	3,31	3,21
20	0,75	1,51	1,45	1,36	1,32	1,24	1,23
	0,90	2,27	2,02	1,79	1,66	1,53	1,49
	0,95	2,73	2,36	2,19	1,98	1,78	1,70
	0,99	3,78	3,30	2,92	2,53	2,34	2,20
30	0,75	1,50	1,42	1,36	1,32	1,22	1,21
	0,90	2,24	1,96	1,74	1,62	1,48	1,43
	0,95	2,68	2,28	2,01	1,86	1,67	1,61
	0,99	3,45	3,23	2,75	2,21	1,99	1,90

мерном, треугольном и быстроубывающем распределениях единичных наблюдений квантили статистики γ_2 уменьшаются по сравнению с квантилями при нормальном распределении. Наибольшие отличия наблюдаются при равномерном распределении, наименьшие – при треугольном. При распределении Лапласа квантили увеличиваются.

С ростом числа степеней свободы для всех распределений, как и в предыдущем случае, происходит уменьшение относительного отличия от результатов при нормальном распределении.

Погрешность значений квантилей статистик γ_1 и γ_2, приводимых в таблицах 2, 4-7, как показано в [5], составляет от нескольких сотых до двух десятых, что вполне приемлемо.

Изменение квантилей статистик γ_1 и γ_2 из-за отличия распределения результатов от нормального приводит к изменению вероятностей ошибок первого рода при проверке гипотез, если правило принятия решения базируется на предположении нормальности результатов наблюдения. При увеличении квантилей эти вероятности уменьшаются, что эквивалентно уменьшению уровня пороговых значений при принятии решения об истинности или ложности проверяемой гипотезы. В противном случае они увеличивается, что эквивалентно увеличению уровня значимости.

Результаты исследования могут оказаться полезными при оценке достоверности результатов проверки статистических гипотез, если нет уверенности в выполнении предположения о нормальности распределения единичных наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.

2. ГОСТ Р ИСО 17123-1-2011 ГСИ. Оптика и оптические приборы. Методики полевых испытаний геодезических и топографических приборов. Часть 1. Теория.

3. ГОСТ 50779.21-2004. Правила определения и методы расчёта статистических характеристик по выборочным данным. Часть 1. Нормальное распределение.

4. Рубичев Н. А., Рябцев Г. Г. Типовые ошибки применения статистических методов обработки измерительной информации и способы их устранения // Метрология. – 2012. – № 6. – С. 3-16.

5. Рубичев Н. А., Сейдахметов Н. Б. Доверительные границы результатов измерений // Мир транспорта. – 2014. – № 5. – С. 38-51.

Координаты авторов: Рубичев Н. А. – vechibur@mail.ru, Сейдахметов Н. Б. – nourlan92@rambler.ru.

Статья поступила в редакцию 12.05.2014, принята к публикации 25.09.2014.