



Математическая модель асинхронной машины для вибрационных исследований



Константин КИМ
Constantine C. KIM

Елена ЗАЗЫБИНА
Elena B. ZAZYBINA



Mathematical Model of Asynchronous Machine for Vibration Research
(текст статьи на англ. яз. – English text of the article – p. 14)

В основе предлагаемой авторами математической модели лежит представление асинхронной машины в виде двух бесконечно длинных цилиндрических оболочек с токовыми слоями и при этом разделенных воздушным кольцевым зазором. Максимально используется информация, относящаяся к режиму работы, когда оси статора и ротора совпадают. Введены новые параметры, обусловленные радиальным смещением вращающегося ротора, однако их формулировка позволяет использовать известные методы расчёта параметров машин.

Ключевые слова: математическая модель, вибрационные исследования, асинхронная машина, магнитный подшипник, ротор, эксцентриситет, токовый слой, возмущенное поле, невозмущенное поле.

Ким Константин Константинович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретические основы электротехники» Петербургского государственного университета путей сообщения (ПГУПС), Санкт-Петербург, Россия.

Зазыбина Елена Борисовна – кандидат технических наук, доцент ПГУПС, Санкт-Петербург, Россия.

Рассматриваемые вопросы приобретают особое звучание для асинхронных машин, в которых используется магнитный подвес ротора. При вибрационных исследованиях таких систем необходимо учитывать возможность радиального смещения вращающегося ротора. В связи с этим его положение в математической модели асинхронной машины (АМ) определяется двумя координатами – вращательной и радиальной.

В основе модели лежит представление АМ в виде двух бесконечно длинных цилиндрических оболочек с токовыми слоями (рис. 1) и при этом разделенных воздушным кольцевым зазором (круговым при отсутствии радиального смещения ротора или эксцентричным при наличии такового). Так, на цилиндрической оболочке радиуса ρ_1 , расположен токовый слой, имитирующий статорную обмотку асинхронной машины, с плотностью

$$j_1 = j_{m1} \sin(\omega_1 t - \theta),$$

где $j_{m1} = \frac{3}{2} I_{m1}$, I_{m1} – амплитуда фазного тока статора, ω_1 – циклическая частота статорного тока.

Предполагается, что магнитопроводы статора и ротора (его радиус обозначен ρ_2) имеют бесконечную магнитную проницаемость и нулевую электропроводность.

Сначала найдём магнитное поле в области кругового кольцевого воздушного зазора $\rho_2 \leq \rho \leq \rho_1$.

Расчет будем выполнять для векторного потенциала магнитного поля, который в данной области имеет единственную компоненту A , направленную вдоль образующей цилиндра и удовлетворяющую в цилиндрических координатах уравнению Лапласа

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$\rho = \rho_1 \rightarrow B_\theta = -\frac{\partial A}{\partial \rho} = \mu_0 j_1, \quad \rho = \rho_2 \rightarrow B_\theta = 0, \text{ т.е.}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_1} &= \mu_0 (-j_c \cos \theta + j_s \sin \theta) \\ \frac{\partial A}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $j_c = j_{m1} \sin \omega_1 t$, $j_s = j_{m1} \cos \omega_1 t$.

Если предположить, что $A = R(\rho) \times S(\theta)$, то уравнение (1) распадается на два:

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} - n^2 R = 0;$$

$$\frac{d^2 S}{d\theta^2} + n^2 S = 0,$$

где n^2 – постоянная величина.

Решениями этих уравнений являются $R = c\rho^n + d\rho^{-n}$, $S = g \cos(n\theta) + h \sin(n\theta)$,

тогда

$$A = (c\rho^n + d\rho^{-n}) \times [g \cos(n\theta) + h \sin(n\theta)].$$

В этом выражении при граничных условиях (2) постоянная $n=1$, а величины c , d , g и h , не зависящие от переменных ρ и θ , удовлетворяют уравнениям

$$c - d \frac{1}{\rho_2^2} = 0, \quad \left(c - d \frac{1}{\rho_1^2} \right) g = -\mu_0 j_c, \quad \left(c - d \frac{1}{\rho_1^2} \right) h = \mu_0 j_s.$$

Отсюда получим

$$cg = -\frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \mu_0 j_c; \quad ch = \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \mu_0 j_s;$$

$$dg = -\frac{(\rho_1 \rho_2)^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \mu_0 j_c; \quad dh = \frac{(\rho_1 \rho_2)^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \mu_0 j_s,$$

и для векторного потенциала получаем выражение

$$A = \mu_0 \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \left(\rho + \frac{\rho_2^2}{\rho} \right) (-j_c \cos \theta + j_s \sin \theta). \quad (3)$$

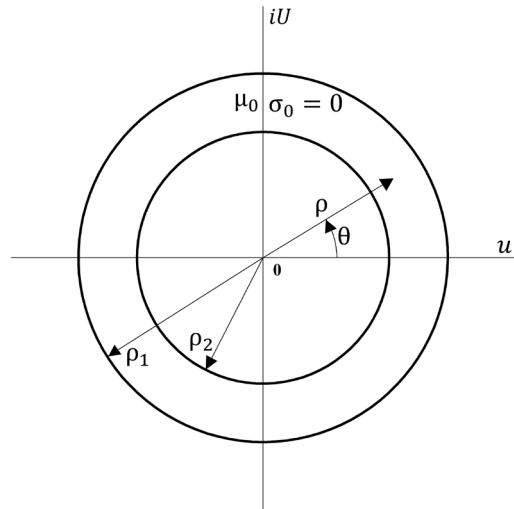


Рис. 1. Случай кругового кольцевого воздушного зазора.

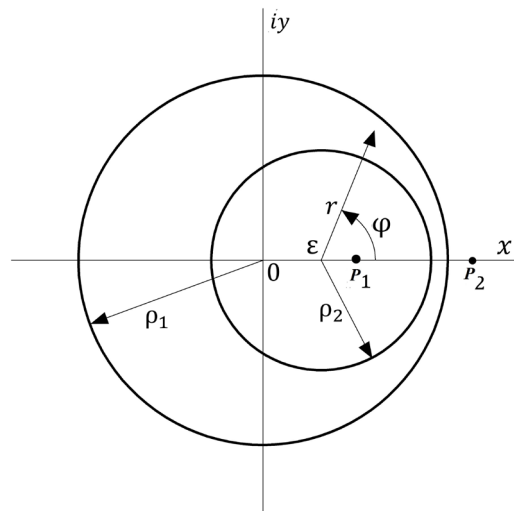


Рис. 2. Случай эксцентрического кольцевого воздушного зазора.

Таким образом, компоненты B_ρ и B_θ вектора магнитной индукции ($B = \text{rot } A$) и скалярный магнитный потенциал V ($H = -\text{grad } V$) будут равны:

$$B_\rho = \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial A}{\partial \theta} = \mu_0 \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \times \left(1 + \frac{\rho_2^2}{\rho^2} \right) \times (j_c \sin \theta + j_s \cos \theta);$$

$$B_\theta = -\frac{\partial A}{\partial \rho} = -\mu_0 \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \times \left(1 - \frac{\rho_2^2}{\rho^2} \right) \times (-j_c \cos \theta + j_s \sin \theta);$$

$$V = -\frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \times \left(\rho - \frac{\rho_2^2}{\rho} \right) \times (j_c \sin \theta + j_s \cos \theta) + V_0,$$

где V_0 – постоянная. Или

$$B_\rho = \mu_0 j_{m1} \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \times \left(1 + \frac{\rho_2^2}{\rho^2} \right) \times \cos(\omega_1 t - \theta); \quad (4)$$

$$B_\theta = \mu_0 j_{m1} \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \times \left(1 - \frac{\rho_2^2}{\rho^2} \right) \times \sin(\omega_1 t - \theta). \quad (5)$$



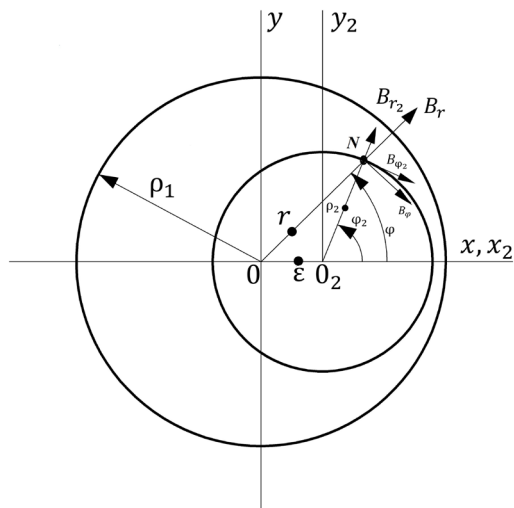


Рис. 3. Используемые системы координат.

Найдём функцию потока U , используя одно из выражений –

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -H_\theta \text{ или } \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial \rho} = H_\rho$$

Получим

$$U = \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \times \left(\rho + \frac{\rho_2^2}{\rho} \right) \times (-j_c \cos \theta + j_s \sin \theta) + U_0,$$

где U_0 – постоянная. Теперь можно вычислить комплексный потенциал $\xi_w = U + jV$ магнитного поля в области кругового кольцевого зазора $\rho_2 \leq \rho \leq \rho_1$ в плоскости w :

$$\xi_w = \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \times \left[(j_c + j \times j_s) \times w + (j_c - j \times j_s) \times \frac{\rho_2^2}{w} \right] + \xi_0, \quad (6)$$

где $w = \rho e^{j\theta}$, ξ_0 – постоянная, $j = \sqrt{-1}$.

Рассмотрим магнитное поле в области эксцентрического воздушного зазора в плоскости z (рис. 2). Здесь ε – эксцентриситет, точки P_1 и P_2 с координатами $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ симметричны относительно обеих окружностей (следы цилиндрических оболочек), т.е. $x_1 x_2 = \rho_1^2$, $(x_1 - \varepsilon) \times (x_2 - \varepsilon) = \rho_2^2$.

Функция, осуществляющая конформное отображение эксцентрического зазора в круговой кольцевой, является дробно-линейной [1] и имеет вид

$$w = \lambda \times \frac{z - x_1}{z - x_2}, \quad (7)$$

где λ – постоянная, x_1 и x_2 – корни уравнения

$$\varepsilon x^2 - (\rho_1^2 - \rho_2^2 + \varepsilon^2)x + \varepsilon \rho_1^2 = 0. \quad (8)$$

Так как $z = r e^{j\phi}$, то $z - x_1 = b_1 e^{j\psi_1}$, $z - x_2 = b_2 e^{j\psi_2}$,

где

$$\begin{aligned} b_1 &= \sqrt{r^2 + x_1^2 - 2rx_1 \cos \phi}, \quad \sin \psi_1 = \frac{r \sin \phi}{b_1}, \\ b_2 &= \sqrt{r^2 + x_2^2 - 2rx_2 \cos \phi}, \quad \sin \psi_2 = \frac{r \sin \phi}{b_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Поэтому отображающую функцию w можно записать как

$$w = b e^{j\psi}, \quad (10)$$

где $b = \lambda \frac{b_1}{b_2}$ и $\psi = \psi_1 - \psi_2$, эти величины яв-

ляются функциями координат r и ϕ текущей точки на плоскости z . Внося (10) в (6), получим выражение для комплексного потенциала магнитного поля в области эксцентрического зазора на плоскости z :

$$\xi_z = -\frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \times \left[(j_c + j \times j_s) \times b e^{j\psi} + (j_c - j \times j_s) \times \frac{\rho_2^2}{b e^{j\psi}} \right] + \xi_0. \quad (11)$$

Отсюда находим соотношения для функции потока и компонент магнитной индукции в указанной области

$$U = -\frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \times \left(b + \frac{\rho_2^2}{b} \right) \times (j_c \cos \psi - j_s \sin \psi); \quad (12)$$

$$\begin{aligned} B_r &= -\frac{\mu_0 \rho_1^2}{(\rho_1^2 - \rho_2^2) r} \times \left\{ j_c \frac{\partial}{\partial \phi} \times \left[\left(b + \frac{\rho_2^2}{b} \right) \cos \psi \right] - \right. \\ &\quad \left. - j_s \frac{\partial}{\partial \phi} \times \left[\left(b + \frac{\rho_2^2}{b} \right) \sin \psi \right] \right\}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} B_\phi &= \frac{\mu_0 \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \times \left\{ j_c \frac{\partial}{\partial r} \times \left[\left(b + \frac{\rho_2^2}{b} \right) \cos \psi \right] - \right. \\ &\quad \left. - j_s \frac{\partial}{\partial r} \times \left[\left(b + \frac{\rho_2^2}{b} \right) \sin \psi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим выражения (13) и (14) более подробно.

Заметим, что корни x_1 и x_2 уравнения (8) при изменении эксцентриситета ε изменяются в весьма широком диапазоне. Например, при приближении ε к своему верхнему пределу, т.е. когда $\varepsilon \rightarrow (\rho_1 - \rho_2)$, корни x_1 и x_2 становятся одинаковыми и равными $x_1 = x_2 = \frac{1}{2} \times (\rho_1 + \rho_2 + \varepsilon)$; напротив, при приближении ε к нижнему пределу ($\varepsilon \rightarrow 0$) один из корней приближается к нулю, второй – к бесконечности. Рассмотрим случай малого эксцентриситета, когда $\varepsilon \ll (\rho_1 - \rho_2)$. Здесь приближенные значения корней уравнения (8) даются формулами

$$x_1 = \varepsilon \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2}, \quad x_2 = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\varepsilon} - \varepsilon \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2}.$$

В этом случае $x_2 \gg r$, где $\rho_2 \ll r \leq \rho_1$, поэтому можно пренебречь z по сравнению

с x_2 и записать (7) в виде

$$w = \lambda \frac{z - \varepsilon'}{-x_2}, \varepsilon' = \varepsilon \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2}.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$, очевидно, должно иметь место $w \rightarrow z$, следовательно, можно принять $\lambda = -x_2$. Таким образом, для $\varepsilon \ll (\rho_1 - \rho_2)$ отображающую функцию можно приближённо представить следующим образом $w = z - \varepsilon'$. (15)

В данном случае величины b и ψ в (10)-(14) равны

$$b = r^2 - 2r\varepsilon' \cos \phi + \varepsilon'^2, \quad \sin \psi = \frac{r \sin \phi}{r - \varepsilon' \cos \phi}. \quad (16)$$

С учетом (16) выражения (13) и (14) могут быть записаны следующим образом:

$$B_r = \mu_0 j_m \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \left[\left(1 + \frac{\rho_2^2}{r^2} \right) \cos(\omega_1 t - \phi) + 2\varepsilon' \frac{\rho_2^2}{r^3} \cos(\omega_1 t - 2\phi) \right], \quad (17)$$

$$B_\phi = \mu_0 j_m \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \left[\left(1 - \frac{\rho_2^2}{r^2} \right) \sin(\omega_1 t - \phi) - 2\varepsilon' \frac{\rho_2^2}{r^3} \sin(\omega_1 t - 2\phi) \right]. \quad (18)$$

Если магнитное поле, описываемое соотношениями (4) и (5), рассматривать как невозмущённое, то поле, отвечающее в выражениях (17) и (18) членам, содержащим ε' , следует считать возмущённым. В этих выражениях члены без ε' совпадают с (4) и (5) и представляют невозмущённое поле. Таким образом, появление эксцентриситета ротора сопровождается возмущением магнитного поля в воздушном зазоре машины. При малом эксцентриситете ротора, когда $\varepsilon \ll (\rho_1 - \rho_2)$, возмущённое магнитное поле является вращающимся с пространственным периодом, вдвое меньшим периода невозмущённого поля. Это поле вращается в ту же сторону, что и невозмущённое поле со скоростью, равной половине синхронной.

Соотношения (17) и (18) записаны в системе отсчёта xu , жёстко связанной со статором, с началом в центре инерции статора (в точке 0 на рис. 3). Рассчитаем магнитное поле на поверхности ротора (B_r и B_ϕ — компоненты магнитной индукции в точке N на поверхности ротора в системе xu). Затем результаты вычисления (B_r и B_ϕ) запишем в координатной системе $x_2 y_2$, неподвижной относительно статора, но с началом в центре ротора (в точке O_2 на рис. 3).

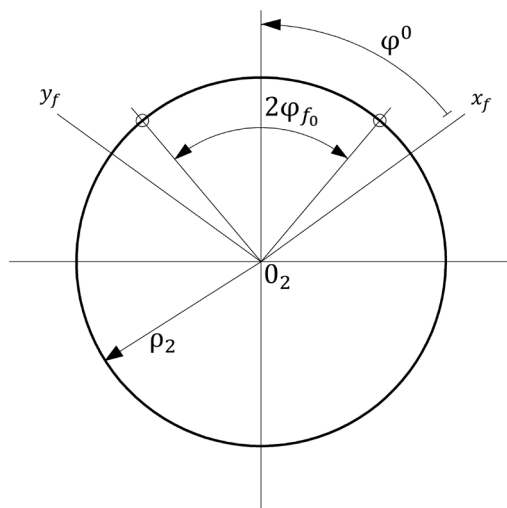


Рис. 4. К расчету потокоцепления витка роторной обмотки.

В результате получим

$$B_r = \mu_0 j_{m1} \left[\frac{2\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \cos(\omega_1 t - \phi_2) + \varepsilon_0 \mu_0 j_m \frac{2(\rho_1 \rho_2)^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \cos(\omega_1 t - 2\phi_2) \right], \quad (19)$$

$$B_\phi = \varepsilon_0 \mu_0 j_m \frac{2\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \times \left[\sin \omega_1 t - \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \sin(\omega_1 t - 2\phi_2) \right], \quad (20)$$

где $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\rho_2}$ — относительный эксцентриситет.

Допустим, что на поверхности ротора имеется слой тока, плотность которого в системе отсчёта статора определяется выражением, по нашему предположению, содержащим невозмущённую и возмущённую компоненты:

$$j_2 = j_{m2} \sin(\omega_1 t - \phi_2 - \psi_2) + j_{m\varepsilon} \sin(\omega_1 t - 2\phi_2 - \psi_\varepsilon). \quad (21)$$

Взаимодействие магнитного поля (19) и (20) (заметим, что это поле обусловлено током статора) с токовым слоем (21) даёт пондеромоторную силу, действующую на ротор. Плотность этой силы (приходящейся на единицу поверхности ротора) с учётом того, что $j_2 = -e_\phi j_2$, равна:

$$f = [j_2 B_2] = -e_\phi f_\phi + e_r f_r; \quad f_\phi = j_2 B_r; \quad f_r = j_2 B_\phi.$$

так что для суммарной силы при активной длине машины l будем иметь

$$F_\phi = l \rho_2 \int_0^{2\pi} f_\phi d\phi_2, \quad F_r = l \rho_2 \int_0^{2\pi} f_r d\phi_2.$$





Тогда тангенциальная F_ϕ и рациональная F_r — силы, действующие на ротор, равны:

$$F_\phi = \mu_0 j_m \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} 2\pi l \rho_2 \left[j_{m_2} \sin \psi_2 + \varepsilon_0 j_{m_e} \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \sin \psi_e \right], \quad (22)$$

$$F_r = \varepsilon_0 \mu_0 j_m j_{m_e} \frac{\rho_1^4}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} 2\pi l \rho_2 \cos \psi_e. \quad (23)$$

Величины j_{m_1} , j_{m_2} , j_{m_e} , ψ_2 и ψ_e , которые до сих пор предполагались заданными, являются, вообще говоря, неизвестными. Для их определения необходимо привлечь уравнения, характеризующие электромагнитный процесс в машине. Возможность непосредственного использования известных уравнений асинхронной машины [2] для этой цели, очевидно, нуждается в обосновании. Связано это с тем, что в рассматриваемом случае из-за эксцентриситета ротора имеет место возмущение магнитного поля в воздушном зазоре машины. Следовательно, нужно выяснить, как этот факт отражается в уравнениях машины.

Покажем сначала, что уравнения для величин j_{m_1} , j_{m_2} и ψ_2 не содержат j_{m_e} и ψ_e , и эти уравнения в принципе совпадают с уравнениями асинхронной машины, описывающими электромагнитные процессы без эксцентриситета ротора.

Запишем (19) и (20) в системе отсчета $x_f y_f$ жёстко связанной с ротором. Для этого в (19) и (20) выполним подстановку: $\phi_2 = \phi_f + \gamma$, где ϕ_f — угловая координата, измеряемая от оси x_f , $\gamma = \int \omega_2 dt + \gamma_0$, где ω_2 — скорость вращения ротора вокруг собственной оси. Имеем

$$B_z = \mu_0 j_m \frac{2\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \times \cos(\omega_1 t - \gamma - \phi_f) + \varepsilon_0 \mu_0 j_m 2 \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \right)^2 \times \cos(\omega t - 2\gamma - 2\phi_f). \quad (24)$$

Вычислим потокосцепление витка роторной обмотки, обусловленное полем (24). Положение витка определим углом ϕ^0 между его магнитной осью и осью x_f (рис. 4):

$$\Phi(\phi^0) = \frac{\tau}{\pi} \int_{\phi^0 - \phi_{f_0} - \frac{l}{2}}^{\phi^0 + \phi_{f_0} + \frac{l}{2}} B_z d\phi_f dz,$$

где τ — полюсное деление, l — активная длина машины. Получим

$$\Phi(\phi^0) = \mu_0 j_m \frac{4\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \frac{\tau l}{\pi} \sin \phi_{f_0} \times \left[\cos(\omega_1 t - \gamma - \phi^0) + \varepsilon_0 \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \cos \phi_{f_0} \cos(\omega_1 t - 2\gamma - 2\phi^0) \right].$$

Тогда потокосцепление $\Psi(\phi^0)$ катушечной группы равно

$$\Psi(\phi^0) = w_0 \int_{-\alpha_0/2}^{\alpha_0/2} \Phi(\phi^0 + \phi_f) d\phi_f.$$

Здесь $\Phi(\phi^0 + \phi_f)$ даётся выражением для $\Phi(\phi^0)$ при замене в нём ϕ^0 на $\phi^0 + \phi_f$, где под ϕ^0 понимается уже угол, составленный осью x_f и магнитной осью катушечной группы, α_0 — угол фазной зоны ($\alpha_0 = \frac{\pi}{pm}$, p — число

пар полюсов, m — число фаз), w_0 — плотность распределения витков ($w_0 = \frac{q w_k}{\alpha_0}$, q —

число пазов на полюс и фазу, w_k — число витков в катушке). Имеем:

$$\Psi(\phi^0) = j_m \left[m \cos(\omega_1 t - \gamma - \phi^0) + m_e \cos(\omega_1 t - 2\gamma - 2\phi^0) \right], \quad (25)$$

где

$$m = \mu_0 \frac{8\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \frac{\tau l}{\pi} w_0 \sin \phi_{f_0} \sin \frac{\alpha_0}{2}, \quad (26)$$

$$m_e = \varepsilon_0 m \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \cos \phi_{f_0} \cos \frac{\alpha_0}{2}. \quad (27)$$

Запишем уравнения Кирхгофа для катушечных групп:

$$r_0 i_j + \frac{d\Psi_j}{dt} = 0, \quad (28)$$

где $j = 1, 2, \dots, 2n$; $n = mp$.

Потокосцепление катушечной группы Ψ_j представим в виде суммы потокосцеплений $\Psi_j(f)$ и $\Psi_j(s)$, обусловленных соответственно полем ротора и полем статора. Присвоив номер l произвольно выбранной катушечной группе, пронумеруем все остальные в порядке их расположения по периферии ротора. Обозначим коэффициент самоиндукции катушечной группы как $l = l(0, \alpha)$, коэффициент взаимоиנדукции между j -й и k -й катушечными группами при одинаковых направлениях токов в них:

$$l_{jk} = l(|j - k| \alpha) \text{ или } l_{jk} = l((2n - |j - k|) \alpha),$$

где α — угол между осями соседних катушечных групп ($\alpha = \frac{\pi}{n}$). В любой фазе токи

в соседних катушечных группах имеют противоположные направления. Пусть во всех нечётных катушечных группах токи направлены от зажима «н» к зажиму «к», а в чётных — от «к» к «н». Тогда для потоко-сцепления j -й катушечной группы, обусловленного полем ротора, получим

$$\Psi_j(f) = \sum_{k=1}^{2n} (j-k|\alpha) i_k (-1)^{j+k},$$

где $j = 1, 2, \dots, 2n$.

Потокоосцепление $\Psi_j(s)$ определяется формулой (30) при значении ϕ^0 , соответствующем j -й катушечной группе. Пусть для первой группы $\phi^0 = 0$, тогда для j -й катушечной группы имеем

$$\phi^0 = (j-1)\alpha p \quad (29)$$

ЭДС, соответствующие потокоосцеплениям, вычисленным по формуле (25) при ϕ^0 согласно (29), направлены во всех катушечных группах одинаково от «н» к «к». Так же направлены токи и в нечётных катушечных группах, а в чётных, как указывалось ранее, противоположно. Чтобы согласовать направление ЭДС и токов в чётных катушечных группах, необходимо потокоосцеплениям, вычисленным по (25) при (29) для чётных катушечных групп, приписать противоположный знак. Таким образом, получаем следующее выражение для потокоосцепления $\Psi_j(s)$, справедливое как для чётных, так и нечётных катушечных групп:

$$\Psi_j(s) = j_{m_e} [m \cos(\omega t - \gamma - (j-1)\alpha p) + m_e \cos(\omega t - 2\gamma - 2(j-1)\alpha p)] (-1)^{j-1}. \quad (30)$$

Пусть катушечная группа под номером 1 входит в фазу «а». Тогда принадлежность других групп выясняется сразу. В фазе «а» будем иметь 1, 4, ..., $2n - 2$ катушечные группы, в фазе «b» — 3, 6, ..., $2n$ и в фазе «с» — 2, 5, ..., $2n-1$.

Просуммируем уравнения (28) при значениях индекса j , которые он принимает в отдельных фазах (полагаем, что катушечные группы в фазах соединены последовательно), и учтём:

$$i_a = i_1 = i_4 = \dots = i_{2n-2}, i_b = i_3 = i_6 = \dots = i_{2n}, i_c = i_2 = i_5 = \dots = i_{2n-1}.$$

Тогда получим

$$Ri + \frac{d}{dt}(Li + \Psi(s)) = 0, \quad (31)$$

где i , $\Psi(s)$ — столбцевые матрицы токов и потокоосцепления фаз, обусловленных магнитным полем статора:

$$i = (i_a i_b i_c)^T, \Psi(s) = (\Psi_a(s) \Psi_b(s) \Psi_c(s))^T,$$

где R — матрица фазных сопротивлений;

L — матрица фазных индуктивностей.

$$R = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} l_0 & l_m & l_m \\ l_m & l_0 & l_m \\ l_m & l_m & l_0 \end{pmatrix}.$$

Здесь r — активное сопротивление фазы, l_0 — собственная индуктивность фазы, l_m — взаимная индуктивность между фазами:

$$r = 2pr_0, l_0 = 2p \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k l(3k\alpha),$$

$$l_m = 2p \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k l((2+3k)\alpha).$$

Потокоосцепление фаз, обусловленное магнитным полем статора, вычисляем, имея в виду (30):

$$\Psi_a(s) = 2pj_{m_e} m \cos(\omega t - \gamma);$$

$$\Psi_b(s) = 2pj_{m_e} m \cos(\omega t - \gamma - 120);$$

$$\Psi_c(s) = 2pj_{m_e} m \cos(\omega t - \gamma + 120).$$

Отсюда следует, что индуцированное эксцентриситетом ротора возмущённое магнитное поле, которому в (30) соответствует составляющая потокоосцепления катушечной группы, содержащая множитель m_e , не делает вклада в потокоосцепления фаз роторной обмотки. Это связано с тем, что период распределения возмущённого магнитного поля вдвое меньше полюсного деления. Поэтому в каждой фазе при обычной обмотке ротора потокоосцепление нечётных катушечных групп, обусловленное возмущённым магнитным полем, компенсируется потокоосцеплением чётных катушечных групп от того же магнитного поля. Таким образом, уравнения для переменных j_{m_e} , j_{m_2} и Ψ_2 (их можно назвать уравнениями невозмущённого состояния) не должны отличаться от известных уравнений асинхронной машины, соответствующих случаю совпадения осей статора и ротора.

Теперь определимся с величинами j_{m_e} и Ψ_e , связанными с возмущённым магнитным полем. В асинхронных машинах с роторной обмоткой в виде беличьей клетки (простой или двойной), а также в машинах с глубокопазым или массивным ротором возмущённое магнитное поле, радиальная компонента которого равна (см. (24))





$$B_r = 2\varepsilon_0\mu_0j_m \left(\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \right)^2 \cos(\omega_1 t - 2\gamma - 2\phi_f), \quad (32)$$

индуцирует в роторе ток. С этим током связана введенная ранее величина $j_m \sin(\omega_1 t - 2\phi_2 - \psi_\varepsilon)$ (см. (21)). В асинхронных машинах с указанной конструкцией ротора период распределения индуцированного в роторе тока совпадает с периодом внешнего магнитного поля B_r . Поэтому потокосцепление «витка», отвечающее (36) и вычисленное по формуле

$$\Phi_\varepsilon = \frac{\tau}{\pi} \int_{\phi^0-45}^{\phi^0+45} \int_{-1/2}^{1/2} B_r d\phi_f dz,$$

будет равно:

$$\Phi_\varepsilon = 2\varepsilon_0\mu_0j_m \left(\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \right)^2 \frac{\tau l}{\pi} \cos(\omega_1 t - 2\gamma - 2\phi^0).$$

Если роторная обмотка выполнена в виде беличьей клетки с числом стержней h , то потокосцепление «фазы» ротора можно определить по формуле

$$\Psi_\varepsilon = \frac{hp}{\pi} \int_{-\alpha_0/2}^{\alpha_0/2} \Phi_\varepsilon d\phi^0,$$

где p — число пар полюсов, α_0 — угол фазовой зоны.

Получим

$$\Psi_\varepsilon = 2\varepsilon_0\mu_0j_m \left(\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \right)^2 \frac{\tau l p h}{\pi^2} \sin \alpha_0 \cos(\omega_1 t - 2\gamma)$$

и отвечающую Ψ_ε «фазную» ЭДС ротора e_ε , которая при постоянной скорости вращения ротора равна:

$$e_\varepsilon = 2\varepsilon_0\mu_0j_m \left(\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \right)^2 \frac{\tau l p h}{\pi^2} \omega_1 (1-2s) \sin \alpha_0 \sin \omega_1 (1-2s)t,$$

где s — скольжение ротора ($s = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1}$). От-

сюда находим ток

$$i_\varepsilon = I'_m \sin[\omega_1 (1-2s)t - \psi_\varepsilon]; \quad (33)$$

$$I'_m = \frac{2\varepsilon_0\mu_0j_m \left(\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \right)^2 \frac{\tau l p h}{\pi^2} \omega_1 (1-2s) \sin \alpha_0}{\sqrt{R_\varepsilon^2 + (1-2s)^2 X_\varepsilon^2}}; \quad (34)$$

$$\psi_\varepsilon = \arctg \frac{(1-2s) X_\varepsilon}{R_\varepsilon}, \quad (35)$$

где R_ε — активное сопротивление, X_ε — индуктивное сопротивление рассеяния ротора. Кстати, для экспериментального определения этих параметров пришлось бы выполнить статорную обмотку с вдвое меньшим полюсным делением при неизменных прочих условиях.

Ток i_ε образует симметричную систему прямой последовательности, при этом (33) можно рассматривать как выражение одного из фазных токов в системе отсчета ротора. Весьма существенно, что период распределения «обмотки» с током i_ε вдвое меньше полюсного деления. Поэтому эквивалентный этой «обмотке» токовый слой в системе отсчета статора выражается формулой

$$j_\varepsilon = j_m \sin(\omega_1 t - 2\phi_2 - \psi_\varepsilon), \quad (36)$$

которая была задана априори в (21). При выводе формулы (36) было предположено, что фазные «обмотки» распределены по гармоническому закону и симметричны друг относительно друга. В (36)

$$j_{m_\varepsilon} = \frac{3}{2} I'_m.$$

Найдём выражение для величины j_m .

Предварительно заметим, что в случае ротора с беличьей клеткой в (26) следует положить $w_0 = \frac{h}{2\pi}$; $\sin \phi_0 = 1$. Если далее учесть, что $2pm = L_{12}$ — коэффициент взаимной индукции между статором и ротором, то, имея в виду (31) и (38), получим

$$j_m = \frac{\varepsilon_0 \frac{3\rho_2^2}{4(\rho_1^2 - \rho_2^2)} \cos \frac{\alpha_0}{2} \omega_1 (1-2s)}{\sqrt{R_\varepsilon^2 + (1-2s)^2 X_\varepsilon^2}} L_{12} j_{m_\varepsilon}. \quad (37)$$

Соотношения (35) и (37) играют весьма важную роль. Определяемые ими величины j_m и Ψ_ε входят в формулу для радиальной компоненты пондеромоторной силы, действующей на ротор (23). Тем самым конкретизируется уравнение радиального движения ротора, которое имеет вид

$$M \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = 2\varepsilon\mu_0j_mj_{m_\varepsilon} \frac{\rho_1^2}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} \pi l \cos \psi_\varepsilon - F_c, \quad (38)$$

где F_c — радиальная сила сопротивления, например, магнитного подшипника, M — масса ротора.

Для определения величин j_m , j_{m_ε} и Ψ_2 необходимо решить уравнения асинхронной машины, описывающие процессы в отсутствие эксцентриситета ротора. Эти уравнения в общем виде могут быть записаны так:

$$\left. \begin{aligned} R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} &= u_1; \\ R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{21} \frac{di_1}{dt} - j\omega L_{21} i_1 &= 0; \\ J \frac{d\omega}{dt} &= M_\phi - M_c. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Здесь u_1, i_1, i_2 — изображающие векторы напряжения и тока; R_1 и R_2 — активные сопротивления статора и ротора; $L_{12} = L_{21}$ — их взаимная индуктивность, равная главной индуктивности статорной обмотки; $L_1 = L_{12} + L_{\sigma 1}$, $L_2 = L_{21} + L_{\sigma 2}$, $L_{\sigma 1}$ и $L_{\sigma 2}$ — индуктивности рассеяния статора и ротора, включающие пазовое, лобовое, дифференциальное рассеяния; M_ϕ — момент, обусловленный тангенциальным компонентом пондеромоторной силы; M_c — момент сопротивления; J — момент инерции относительно оси вращения ротора.

При гармоническом распределении фазных обмоток и симметричном расположении их друг относительно друга величины j_{m_1} и j_{m_2} численно равны амплитудам I_{m_1} и I_{m_2} токов i_1 и i_2 , умноженным на $\frac{3}{2}$, а Ψ_2 представляет угол между векторами i_1 и i_2 . В синусоидальном режиме, полагая в (39) $u_1 = \dot{U}_{m_1} e^{j\omega t}$, $i_1 = \dot{I}_{m_1} e^{j\omega t}$ и $i_2 = \dot{I}_{m_2} e^{j\omega t}$, сразу можем вычислить $\dot{I}_{m_1}$ и $\dot{I}_{m_2}$ из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + jX_1) \dot{I}_{m_1} + jX_{12} \dot{I}_{m_2} &= \dot{U}_{m_1} \\ (R_2 + jX_2) \dot{I}_{m_2} + jX_{12} \dot{I}_{m_1} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (40)$$

которые следуют из (39) при $\omega = \text{const}$, а по ним и величины j_{m_1} , j_{m_2} и Ψ_2 .

В малых асинхронных машинах электромагнитные постоянные времени малы, поэтому при питании таких машин от шин бесконечной мощности (U_{m_1} , $\omega_1 = \text{const}$) их динамические свойства не отличаются от статических. В этом случае рассмотренная процедура определения величин j_{m_1} , j_{m_2} , j_{m_e} , Ψ_2 и Ψ_e , основанная на использовании (37) и (40), вполне обоснована.

Напротив, в крупных асинхронных машинах с добротными обмотками и контурами следует иметь в виду возможность появления заметных переходных процессов. Это приводит к необходимости привлечения вместо (40) уравнений (39), в которых

$$M_\phi = j \times \frac{X_{12}}{2} \times (i_2 \times i_1^* - i_1 \times i_2^*), \text{ а вместо формул}$$

(34) и (35) — уравнения

$$\left. \begin{aligned} L_e \frac{di_e}{dt} + R_e i_e &= e_e; \\ e_e &= -2\epsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \right)^2 \frac{\tau l p h}{\pi^2} \sin \alpha_0 \frac{d}{dt} [j_{m_1} \cos(\omega_1 t - 2\gamma)], \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

где j_{m_1} является уже функцией времени.

Таким образом, в задаче исследования асинхронной машины с магнитными подшипниками и, в частности, при расчёте ее вибрационных характеристик она может быть смоделирована уравнениями (38), (39), (41), либо уравнениями (35), (37), (38) и (40).

В заключение отметим, что параметры, входящие в уравнения (39) и (40), легко могут быть рассчитаны по известным методам [3], либо найдены экспериментально [4]. Что касается параметров R_e и X_e , то они являются новыми и, как уже отмечалось, представляют активное и индуктивное сопротивление рассеяния ротора при условии, что число полюсов машины увеличилось вдвое. Расчёт этих параметров по методам, используемым в практике проектирования электрических машин, по-видимому, не представляет затруднений. Однако экспериментальное определение указанных параметров в действующих машинах едва ли окажется выполнимым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Свешников А. Г. Теория функций комплексной переменной. — М.: Физматлит, 2005. — 336 с.
2. Вольдек А. И. Электрические машины. — Л.: Энергоиздат, 1974. — 839 с.
3. Копылов И. П., Клоков Б. К., Морозкин В. П., Токарев Б. Ф. Проектирование электрических машин. — М.: Высшая школа, 2002. — 757 с.
4. Жерве Г. К. Промышленные испытания электрических машин. 4-е изд. — Л.: Атомэнергоиздат, 1984. — 407 с.

Координаты авторов: Ким К. К. — kimkk@inbox.ru, Зазыбина Е. Б. — elzazybina@yandex.ru.

Статья поступила в редакцию 22.12.2014, принята к публикации 07.02.2015.

