



# Математическое моделирование колебаний вагонов-цистерн с учётом неполного заполнения ёмкости жидким грузом



Павел ГРИГОРЬЕВ



Сергей КОРЖИН



Шерзод ИБОДУЛЛОВ



Фу Тхуан ЧАН

*Павел Сергеевич Григорьев<sup>1</sup>, Сергей Николаевич Коржин<sup>2</sup>, Шерзод Рустамович Ибодуллоев<sup>3</sup>, Фу Тхуан Чан<sup>4</sup>*

<sup>1,2</sup> Российский университет транспорта, Москва, Россия.

<sup>3</sup> Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан.

<sup>4</sup> Общество вьетнамских граждан в Российской Федерации, Хошимин, Вьетнам.

✉ <sup>1</sup> [grigorev.p@gmail.com](mailto:grigorev.p@gmail.com).

## АННОТАЦИЯ

Математическое моделирование процессов движения позволяет оценить динамические качества вагона на стадии его проектирования. Однако необходимо учитывать род перевозимого груза, движение которого оказывает влияние на показатели этих качеств.

В работе рассмотрена математическая модель восьмьюосной железнодорожной цистерны, разработанная с использованием уравнения Лагранжа второго рода. В рассматриваемой математической модели предложен подход, основанный на учёте влияния энергии жидкого груза при установившемся режиме движения. Учёт этого влияния осуществлялся за счёт оценки кинетической и потенциальной энергий колебаний перевозимого жидкого груза.

Для рассматриваемой модели составлены дифференциальные уравнения колебания, где жидкий груз представляется как твёрдое тело. Подход для учёта

влияния жидкого груза при колебаниях вагона-цистерны основан на предположении, что общий объём смещающейся жидкости примерно соответствует объёму слоя жидкости, определяемого смещением подпрыгивания, или, в случае галопирования, – при угловом смещении одного концевое сечения котла цистерны второе сечение поднимается на эту же величину, иными словами, работает система сообщающихся сосудов. На основе этих предположений получены энергетические добавки, которые учитывают перемещение жидкого груза при установившихся режимах движения.

По предложенному подходу были выполнены предварительные расчёты и дана оценка полученным результатам, которые показали удовлетворительную сходимость с вычислениями, выполнявшимися с применением других подходов к моделированию процессов движения железнодорожных вагонов-цистерн.

**Ключевые слова:** транспорт, вагон-цистерна, динамические качества, колебания жидкого груза, восьмиосная цистерна, нагрузка, котёл.

**Для цитирования:** Григорьев П. С., Коржин С. Н., Ибодуллоев Ш. Р., Чан Ф. Т. Математическое моделирование колебаний вагонов-цистерн с учётом неполного заполнения ёмкости жидким грузом // Мир транспорта. 2021. Т. 19. № 2 (93). С. 25–30. DOI: <https://doi.org/10.30932/1992-3252-2021-19-2-4>.

Полный текст статьи на английском языке публикуется во второй части данного выпуска.  
The full text of the article in English is published in the second part of the issue.

## ВВЕДЕНИЕ

При моделировании процессов движения подвижного состава по железнодорожному пути исследователей интересуют показатели динамических качеств (коэффициенты динамики, динамические силы различной направленности, ускорения, перемещения элементов конструкции) [1; 2], значения которых в конечном счёте определяются величинами кинетической и потенциальной энергий и величинами их соотношений в процессе работы системы.

Учитывая это обстоятельство, можно сказать, что если при изучении процессов движения вагона с жидким грузом в математической модели представится возможность сравнительно удачно отразить энергетические показатели движущихся масс жидкости, то в результате можно создать оптимизированную упрощённую модель, отражающую влияние жидкого груза на показатели плавности хода при установившемся режиме движения [3]. Решение этой задачи позволило бы получить оценку ходовых качеств и нагруженности грузовой ёмкости для любых транспортных единиц, связанных с перевозкой жидких грузов. Целью предлагаемой работы является решение этой задачи применительно к железнодорожным цистернам.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Стоит отметить, что, как правило, при разработке математических моделей колебаний вагонов-цистерн перевозимый груз рассматривают как твёрдое тело [4; 5]. Однако, как было отмечено выше, перевозимый груз оказывает влияние на показатели динамических качеств рассматриваемых моделей вагонов-цистерн. Таким образом, необходимо

использовать расчётные подходы, учитывающие энергетический вклад жидкого груза в общую систему.

Так в работах [6–9] оценивается влияние жидкого груза при переходных режимах работы, где описание движения жидкости осуществляется уравнениями механики сплошных сред. Учёт влияния жидкого груза в современных программных комплексах осуществляется с помощью решения задач гидродинамики [10; 11] или с использованием маятниковых аналогов [12–14].

В предлагаемой работе методика строится на предположении, что оболочка ёмкости абсолютно жёсткая, конструкция симметрична относительно продольной и поперечной плоскостей. Ёмкость имеет круговую цилиндрическую форму. Начало координат совпадает с центром среднего сечения. Продольная ось  $X$  направлена вдоль оси цилиндра, поперечная ось  $Y$  совпадает с горизонтальным диаметром среднего сечения, а вертикальная  $Z$  направлена по вертикальному диаметру среднего сечения.

Принципиальной основой в формируемых моделях служит закон сохранения энергии, то есть трансформация кинетической энергии, связанной со скоростью движения волны, в потенциальную энергию, обусловленную высотой волны.

Разработка математических моделей выполняется с использованием уравнения Лагранжа второго рода [15], которое для рассматриваемой задачи будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Pi_{\Sigma}}{\partial q_i} = 0, \quad (1)$$

где  $q_i$  – обобщённая координата;

$T_{\Sigma}$  – кинетическая энергия системы;

$\Pi_{\Sigma}$  – потенциальная энергия системы.

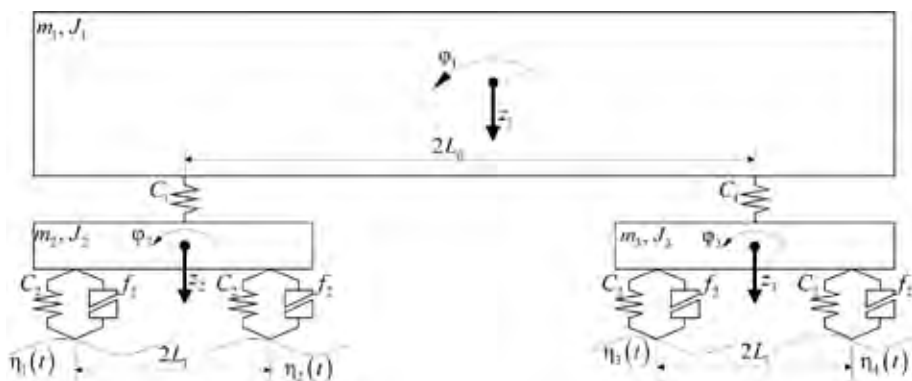


Рис. 1. Расчётная схема для определения колебаний вагона-цистерны (выполнена авторами).

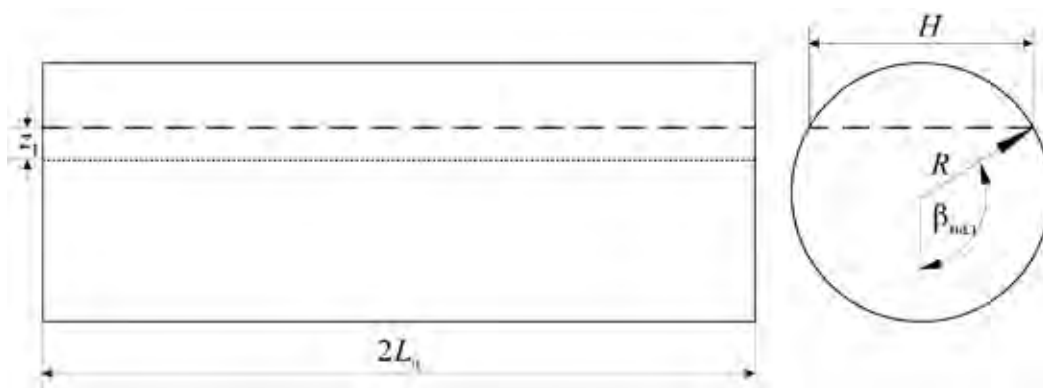


Рис. 2. Расчётная схема для определения энергетической добавки из-за колебаний жидкого груза при колебаниях подпрыгивания (составлена авторами).

## РЕЗУЛЬТАТЫ

### Система дифференциальных уравнений

В качестве расчётной модели рассмотрим условную схему восьмиосной железнодорожной цистерны.

В работе принимаем следующие обозначения:

$m_1$  – масса брутто котла цистерны;

$J_1$  – момент инерции котла цистерны;

$m_{2,3}$  – масса соединительной балки;

$J_{2,3}$  – момент инерции соединительной балки;

$C_1$  – вертикальная жёсткость соединительной балки;

$C_2$  – вертикальная жёсткость комплекта рессорного подвешивания;

$f_2$  – коэффициент сухого трения фрикционного гасителя колебаний;

$2L_6$  – база цистерны;

$2L_{ц}$  – длина цилиндрической части котла цистерны;

$2L_1$  – база тележки;

$\eta_{1,2,3,4}(t)$  – функция неровности пути под соответствующей тележкой;

$z_1$  – вертикальное перемещение центра масс котла цистерны;

$\varphi_1$  – угол поворота котла цистерны относительно поперечной оси  $Y$ ;

$z_{2,3}$  – вертикальное перемещение центра масс соединительной балки;

$\varphi_2$  – угол поворота соединительной балки относительно поперечной оси  $Y$ ;

$\rho_{ж}$  – плотность массы перевозимого жидкого груза;

$g$  – ускорение свободного падения;

$\beta_{нал}$  – угол налива жидкого груза;

$R$  – радиус котла цистерны;

$H$  – линейный размер свободной поверхности жидкости в поперечном направлении, определяемый как  $H = 2\sin\beta_{нал}$ .

Для представленной на рис. 1 схемы система дифференциальных уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + C_1 (2z_1 - z_2 - z_3) = 0 \\ J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1 L_6 (2\varphi_1 L_6 - z_2 + z_3) = 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 + C_1 (-z_1 - \varphi_1 L_6 + z_3) + \\ + C_2 (1 + f_{mp} \text{sign}(\Delta_3, \dot{\Delta}_3)) (2z_2 - \eta_1(t) - \eta_2(t)) = 0 \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + C_2 (1 + f_{mp} \text{sign}(\Delta_4, \dot{\Delta}_4)) (2\varphi_2 L_1 - \eta_1(t) - \eta_2(t)) = 0 \\ m_3 \ddot{z}_3 + C_1 (-z_1 + \varphi_1 L_6 + z_2) + \\ + C_2 (1 + f_{mp} \text{sign}(\Delta_5, \dot{\Delta}_5)) (2z_3 - \eta_3(t) - \eta_4(t)) = 0 \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 + C_2 (1 + f_{mp} \text{sign}(\Delta_6, \dot{\Delta}_6)) (2\varphi_3 L_1 - \eta_3(t) - \eta_4(t)) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\Delta_{3,5} = 2z_{2,3} - \eta_{1,3}(t) - \eta_{2,3}(t)$ ,

$\dot{\Delta}_{3,5} = 2\dot{z}_{2,3} - \dot{\eta}_{1,3}(t) - \dot{\eta}_{2,3}(t)$ ,

$\Delta_{4,6} = 2\varphi_{2,3} L_1 - \eta_{1,3}(t) - \eta_{2,4}(t)$ ,

$\dot{\Delta}_{4,6} = 2\dot{\varphi}_{2,3} L_1 - \dot{\eta}_{1,3}(t) - \dot{\eta}_{2,4}(t)$ ,

$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0 \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$  – разрывная функция,

обозначающая смену знака.

В приведённой системе дифференциальных уравнений (2) перевозимый жидкий груз воспринимается как твёрдое тело. Естественно, что величины кинетической и потенциальной энергий волнового движения поверхности жидкости зависят от высоты волн, возникающих на свободной поверхности жидкого груза. При моделировании в задачах колебания свободной поверхности жидкости можно ввести предположение, что общий объём смещающейся жидкости примерно соответствует объёму слоя жидкости, опре-



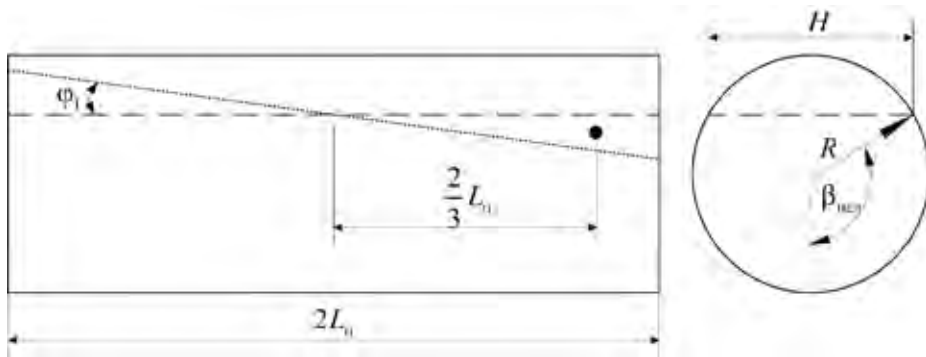


Рис. 3. Расчётная схема для определения энергетической добавки из-за колебаний жидкого груза при колебаниях галопирования (составлена авторами).

деляемого смещения подпрыгивания, то есть величиной  $z_1$  (рис. 2). Такое предположение можно обосновать тем, что объём волны, поднимаемой над слоем, находящимся в покое, равен объёму волны, находящемуся под этим слоем. Таким образом, в представленную модель дополнительно вводятся вклады кинетической  $T_{ж}$  и потенциальной  $\Pi_{ж}$  энергий жидкого груза, перемещающегося вследствие колебаний котла цистерны.

Определим объём и массу жидкого груза, захваченного вследствие колебаний подпрыгивания. Будем считать, что этот уровень соответствует уровню перемещения котла цистерны  $z_1$ . Тогда объём этой массы будет равен:

$$V_{ж} = 2R \sin \beta_{нал} 2L_{ц} z_1.$$

Тогда кинетическая  $T_{жврт}$  и потенциальная  $\Pi_{жврт}$  энергии будут определяться как:

$$T_{жврт} = \frac{\rho_{ж} 2R \sin \beta_{нал} 2L_{ц} z_1 \dot{z}_1^2}{2}, \quad (3)$$

$$\Pi_{жврт} = \rho_{ж} 2R \sin \beta_{нал} 2L_{ц} z_1 g z_1.$$

Подставив выражения (3) в уравнение (1), получим выражения для подстановки в исходную систему дифференциальных уравнений (2):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 T_{жврт}}{\partial \dot{z}_1^2} = 4\rho_{ж} R \sin \beta_{нал} L_{ц} (\dot{z}_1^2 + z_1 \ddot{z}_1); \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Pi_{жврт}}{\partial z_1} = 8\rho_{ж} R \sin \beta_{нал} g L_{ц} z_1.$$

Рассмотрим угловые колебания. При угловых колебаниях работает «схема сообщающихся сосудов», то есть при угловом смещении одного концевое сечения котла цистерны (например, вниз) второе сечение поднимается на эту же величину. И при этом, очевидно, осуществляется смещение объёма жидкости. При угловых колебаниях объём жидкости, находящейся слева от среднего сечения, дол-

жен равняться объёму жидкости, находящейся справа.

Найдём объём жидкости  $V_{жул}$  и скорость перемещения центра масс  $v_{цт}$ , изменяющихся вследствие угловых колебаний котла цистерны:

$$V_{жул} = L_{ц}^2 R \sin \beta_{нал} \phi_1; \quad v_{цт} = \frac{2}{3} L_{цт} \dot{\phi}_1. \quad (5)$$

С учётом этого, кинетическая  $T_{жул}$  и потенциальная  $\Pi_{жул}$  энергии перетекающей жидкости будут определяться как:

$$T_{жул} = \frac{4}{9} \rho_{ж} L_{ц}^4 R \sin \beta_{нал} \phi_1 \dot{\phi}_1^2; \quad (6)$$

$$\Pi_{жул} = \frac{4}{3} L_{ц}^3 \rho_{ж} R \sin \beta_{нал} g \phi_1^2.$$

Подставив выражения (6) в уравнение (1), получим выражения для подстановки в исходную систему дифференциальных уравнений (2):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 T_{ж}}{\partial \dot{\phi}_1^2} = \frac{8}{9} \rho_{ж} L_{ц}^4 R \sin \beta_{нал} (\dot{\phi}_1^2 + \phi_1 \ddot{\phi}_1); \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Pi_{ж}}{\partial \phi_1} = \frac{8}{3} L_{ц}^3 \rho_{ж} R \sin \beta_{нал} g \phi_1.$$

Помимо вертикального перемещения центра масс перетекающей жидкости необходимо учесть его горизонтальное смещение. Используя рассуждения, описанные выше, получим значения кинетической  $T_{жгор}$  и потенциальной  $\Pi_{жгор}$  энергий горизонтального перемещения центра масса перетекающего жидкого груза:

$$T_{жгор} = 2 \frac{\rho_{ж} L_{ц}^2 R \sin \beta_{нал} \phi_1}{2} \left( \frac{2}{3} R \cos \beta_{нал} \dot{\phi}_1 \right)^2; \quad (8)$$

$$\Pi_{жгор} = 2 \rho_{ж} L_{ц}^2 R \sin \beta_{нал} \phi_1 g \frac{2}{3} R \cos \beta_{нал} \phi_1.$$

Подставив выражения (8) в уравнение (1), получим выражения для включения в исходную систему дифференциальных уравнений (2):

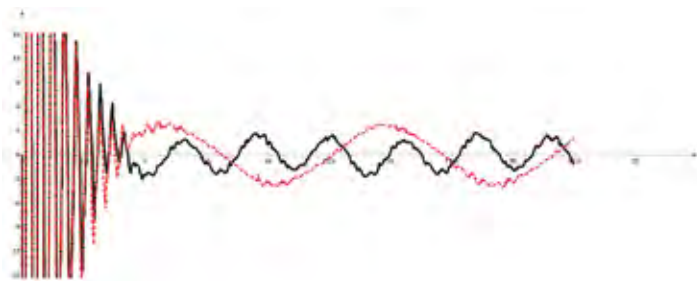


Рис. 4. Пример графика изменения сил, действующих на опоры котла цистерны: чёрный график – изменения сил без учёта движения жидкого груза, красный (пунктир) – изменения сил на опорах котла цистерны с учётом движения жидкого груза (составлено авторами).

Таблица 1

Коэффициенты вертикальной динамики (расчёты авторов)

Скорость, км/ч	Уровень заполнения котла цистерны жидким грузом							
	95 %		80 %		70 %		50 %	
	$k_{д1}$	$k_{д2}$	$k_{д1}$	$k_{д2}$	$k_{д1}$	$k_{д2}$	$k_{д1}$	$k_{д2}$
20	0,003	0,004	0,006	0,004	0,012	0,004	0,022	0,004
40	0,014	0,017	0,01	0,017	0,015	0,017	0,017	0,016
60	0,041	0,045	0,033	0,041	0,033	0,046	0,029	0,042
80	0,124	0,132	0,1	0,124	0,087	0,126	0,079	0,131
100	0,26	0,287	0,217	0,279	0,22	0,27	0,197	0,264

$k_{д1}$  – коэффициент вертикальной динамики с учётом колебаний жидкого груза;

$k_{д2}$  – коэффициент вертикальной динамики без учёта колебаний жидкого груза.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 T_{\text{ж}}}{\partial \varphi_1^2} = \frac{8}{9} \rho_{\text{ж}} L_{\text{ц}}^2 R^3 \sin \beta_{\text{нал}} \cos^2 \beta_{\text{нал}} (\dot{\varphi}_1^2 + \varphi_1 \ddot{\varphi}_1); \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Pi_{\text{ж}}}{\partial \varphi_1} = \frac{8}{3} L_{\text{ц}}^2 \rho_{\text{ж}} R^2 \sin \beta_{\text{нал}} \cos \beta_{\text{нал}} g \varphi_1.$$

Таким образом, подставив выражения (4), (7) и (9), получим общую систему дифференциальных уравнений колебаний оболочки котла цистерны с учётом динамики жидкого груза (10).

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + C_1 (2z_1 - z_2 - z_3) + \\ + 4\rho_{\text{ж}} R \sin \beta_{\text{нал}} L_{\text{ц}} (\dot{z}_1^2 + z_1 \ddot{z}_1) + \\ + 8\rho_{\text{ж}} R \sin \beta_{\text{нал}} g L_{\text{ц}} z_1 = 0 \\ J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1 L_{\text{ц}} (2\varphi_1 L_{\text{ц}} - z_2 + z_3) + \\ + \frac{8}{9} \rho_{\text{ж}} L_{\text{ц}}^4 R \sin \beta_{\text{нал}} (\dot{\varphi}_1^2 + \varphi_1 \ddot{\varphi}_1) + \\ + \frac{8}{3} L_{\text{ц}}^2 \rho_{\text{ж}} R \sin \beta_{\text{нал}} g \varphi_1^2 + \\ + \frac{8}{9} \rho_{\text{ж}} L_{\text{ц}}^2 R^3 \sin \beta_{\text{нал}} \cos^2 \beta_{\text{нал}} (\dot{\varphi}_1^2 + \varphi_1 \ddot{\varphi}_1) + \\ + \frac{8}{3} L_{\text{ц}}^2 \rho_{\text{ж}} R^2 \sin \beta_{\text{нал}} \cos \beta_{\text{нал}} g \varphi_1 = 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 + C_1 (-z_1 - \varphi_1 L_{\text{ц}} + z_2) + \\ + C_2 (1 + f_{\text{тр}} \text{sign}(\Delta_3, \dot{\Delta}_3)) (2z_2 - \eta_1(t) - \eta_2(t)) = 0 \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + C_2 (1 + f_{\text{тр}} \text{sign}(\Delta_4, \dot{\Delta}_4)) (2\varphi_2 L_1 - \eta_1(t) - \eta_2(t)) = 0 \\ m_3 \ddot{z}_3 + C_1 (-z_1 + \varphi_1 L_{\text{ц}} + z_3) + \\ + C_2 (1 + f_{\text{тр}} \text{sign}(\Delta_5, \dot{\Delta}_5)) (2z_3 - \eta_3(t) - \eta_4(t)) = 0 \\ J_2 \ddot{\varphi}_3 + C_2 (1 + f_{\text{тр}} \text{sign}(\Delta_6, \dot{\Delta}_6)) (2\varphi_3 L_1 - \eta_3(t) - \eta_4(t)) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

## Решение

Полученная система дифференциальных уравнений (10) решалась численным методом Рунге–Кутты в программной среде Mathcad [16]. В качестве неровностей задавалась аппроксимирующая функция неровности пути, предложенная в литературе [4]:

$$\eta(t) = b_1 \sin\left(\frac{\pi v}{L_p} t\right) + b_2 \sin\left(\frac{3\pi v}{L_p} t\right).$$

В результате численного интегрирования системы дифференциальных уравнений были получены значения сил на опорах котла цистерны.

На рис. 4 приведён пример графика, построенного для случая движения вагона со скоростью 20 км/ч и степенью заполнения 80 %. На графике видно, что при установившихся режимах движения амплитуда сил с учётом движения жидкого груза увеличилась примерно на 60 %, а также увеличился период колебаний в три раза.

## ОБСУЖДЕНИЕ

Некоторые результаты численной реализации предложенного подхода представлены на рис. 4 и в табл. 1. Полученные результаты достаточно хорошо согласуются с результатами, полученными методом математического моделирования с применением программного комплекса «Универсальный механизм» [12; 13]. Следует отме-





тять, что при низких скоростях движения и, как следствие, низких частотах возмущающих воздействий, влияние жидкого груза оказывается максимальным. Это достаточно хорошо прослеживается по результатам, представленным в табл. 1. В частности, при скорости 20 км/ч и степени заполнения 50 % заметно существенное влияние жидкого груза.

Верификация полученных решений с использованием различных исходных данных показала удовлетворительную сходимость результатов с применением других подходов.

## ВЫВОДЫ

В результате использования предложенного подхода была получена система дифференциальных уравнений. Система уравнений имеет нелинейный характер. Ввиду сложности получения аналитического решения данной системы был применён численный метод решения дифференциальных уравнений Рунге–Кутты 4-го порядка.

Данный подход позволяет оценить влияние перевозимого жидкого груза в вагонах-цистернах, в частности, определить влияние уровня заполнения котла цистерны жидким грузом на динамические качества при различных параметрах котла цистерны и упругих элементов всего вагона.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Богомаз Г. И. Динамика железнодорожных вагонов-цистерн. – Киев: Наукова думка, 2004. – 223 с. [Электронный ресурс]: [https://www.studmed.ru/bogomaz-g-i-dinamika-zheleznodorozhnyh-vagonov-cistern\\_741466e810b.html](https://www.studmed.ru/bogomaz-g-i-dinamika-zheleznodorozhnyh-vagonov-cistern_741466e810b.html). Доступ 19.02.2021.
2. Черкашин Ю. М. Динамика наливного поезда // Тр. ЦНИИ МПС. – М.: Транспорт, 1975. – Вып. 543. – 136 с.
3. Сергеев К. А., Григорьев П. С., Козлов М. П., Суворова К. Е. Напряжённо-деформированное состояние цилиндрической оболочки котла цистерны при колебаниях на периодической неровности пути // Наука и техника транспорта. – 2020. – С. 66–70. [Электронный ресурс]: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42854183>. Доступ 19.02.2021.
4. Вершинский С. В., Данилов В. Н., Хусидов В. Д. Динамика вагона: Учебник для вузов жд. трансп. / Под ред. С. В. Вершинского. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Транспорт, 1991. – 360 с.

5. Iwnicki, S. D., Stichel, S., Orlova, A., Hecht, M. Dynamics of railway freight vehicles. *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 2015, Vol. 53, Iss. 7, pp. 995–1033. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423114.2015.1037773>.

6. Bepalko, S., Grigorev, P., Ibodullov, Sh., Turajonov, K., Numonov, A. Mathematical model of oscillations of a railway tank car with partial filling under shunting collision. 2020 IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2020, Vol. 883, p. 012134. [Электронный ресурс]: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/883/1/012134>. Доступ 19.02.2021.

7. Bepalko, S. V., Grigoriev, P. S., Ruzmatov, M. I., Ibodullov, Sh. R. A study method for possible breakdown of boiler tank for dangerous goods in an emergency collision. *E3S Web of Conferences*, 2020, Vol. 224, p. 01045. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202022401045>.

8. Ranganathan, R., Yang, Y. S. Impact of Liquid Shift on the Braking Characteristics of Partially Filled Tank Vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 1996, Vol. 26, No. 3, pp. 223–240. DOI: 10.1080/00423119608969310.

9. Высоцкий М. С., Плещачевский Ю. М., Шимановский А. О. Динамика автомобильных и железнодорожных цистерн. – Минск: Белавтотракторостроение, 2007. – 320 с.

10. Шимановский А. О., Плещачевский Ю. М., Высоцкий М. С. Перспективы исследований динамики цистерн для транспортировки жидких грузов // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2007. – № 1. – С. 38–42.

11. Путько А. В., Шимановский А. О. Моделирование нагруженности элементов конструкции цистерн // Проблемы механики железнодорожного транспорта: безопасность движения, динамика, прочность подвижного состава, энергосбережение: Тез. докл. XII Междунар. конф., 28–30.05.2008 г. – Днепропетровск: ДНУЖТ, 2008. – С. 142.

12. Универсальный механизм: программы, руководство пользователя, презентации. Веб-сайт: [Электронный ресурс]: <http://www.umlub.ru/pages/index.php?id=3>. Доступ 19.02.2021.

13. Бороненко Ю. П., Житков Ю. Б. Особенности динамики вагона-цистерны с жидким грузом // *Известия ПГУПС*. – 2017. – № 4. – С. 597–604. [Электронный ресурс]: <https://cyberleninka.ru/article/n/osobennosti-dinamiki-vagona-tsisterny-s-zhidkim-gruzom/pdf>. Доступ 19.02.2021.

14. Mantriota, G. Directional stability of articulated tank vehicles: A simplified model. *Heavy Vehicle Systems, Int. J. of Vehicle Design*, 2003, Vol. 10, Iss. 1/2, pp. 144–165. DOI: 10.1504/IJHVS.2003.002438.

15. Лавренко Д. Т. Математическая модель пространственных колебаний вагонов-цистерн // *Збірник праць ДонІЗТ*. – 2008. – № 14. – С. 126–136. [Электронный ресурс]: <https://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskaya-model-prostranstvennyh-kolebaniy-vagonov-tsistern/pdf>. Доступ 19.02.2021.

16. Maxfield, B. *Essential PTC Mathcad Prime 3.0: A Guide for New and Current Users*. Elsevier Inc., 2014, 564 p. ISBN: 978-0-12-410410-5.

### Информация об авторах:

**Григорьев Павел Сергеевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры электропоездов и локомотивов Российского университета транспорта, Москва, Россия, [grigorev.p@gmail.com](mailto:grigorev.p@gmail.com).

**Коржин Сергей Николаевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры вагонов и вагонного хозяйства Российского университета транспорта, Москва, Россия, [korjin@miit.ru](mailto:korjin@miit.ru).

**Ибодуллов Шерзод Рустамович** – аспирант кафедры механики и математического моделирования Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан, [sherzod\\_uztu@inbox.ru](mailto:sherzod_uztu@inbox.ru).

**Чан Фу Тхуан** – доктор технических наук, первый заместитель председателя Общества вьетнамских граждан в Российской Федерации, Хошимин, Вьетнам, [tranphuthuan@yahoo.com](mailto:tranphuthuan@yahoo.com).

Статья поступила в редакцию 19.02.2021, одобрена после рецензирования 20.04.2021, принята к публикации 23.04.2021.