НАУЧНАЯ СТАТЬЯ
УДК 629.4.064.5
DOI: https://doi.org/10.30932/1992-3252-2021-19-2-3

Мир транспорта. 2021. Т. 19. № 2 (93). С. 19–24

Модель трогания тяжёлого состава

Игорь ПОПОВ

Игорь Павлович Попов
Курганский государственный университет, Курган, Россия.
✉ *ip.popow@yandex.ru.*

АННОТАЦИЯ

Режим трогания с места для наземного транспортного средства является наиболее тяжёлым. Это обусловлено тем, что сила трения покоя значительно превосходит силу трения движения. Для поездов этот режим представляет настолько серьёзную проблему, что иногда приходится принимать специальные меры, такие как использование песка в зоне контакта бандажа колеса с рельсом или вспомогательного локомотива. Эффективным способом трогания поезда с места является выбор зазоров в сцепках. При этом вагоны приводятся в движение последовательно, и инертная масса, а также сила трения покоя непосредственно в момент трогания минимальны.

Этот способ, однако, имеет два существенных недостатка – малую фиксированную величину зазоров в сцепках, что ограничивает эффективность способа, и ударный характер передачи импульса, что отрицательно сказывается на состоянии конструктивных элементов поезда. Указанных недостатков можно избежать, если использовать упруго деформируемые сцепки.

Целью работы является показать преимущество трогания поезда с упругими сцепками по сравнению с традиционным путём его математического описания и анализа. Трогание состава с упругими сцепками значительно легче, чем недеформируемого. При этом чем больше число вагонов, тем больше преимущество первого перед вторым. Смягчение режима трогания состава с места, по существу, обусловливается заменой одновременного трогания секций на поочерёдное. Этот процесс актуален для инерционных сил. Применительно к силе трения покоя механизм будет подобным, то есть преодолевается не вся сила трения покоя одновременно, а поочерёдно преодолеваются её малые части. Для исключения продольных колебаний состава после достижения максимального растяжения сцепки следует механически блокировать возможность её гармонического сжатия с последующей выборкой упругой деформации, например, с использованием демпфирующих устройств.

В качестве дополнительного положительного эффекта от использования упругих сцепок можно рассматривать исключение передачи ударных нагрузок на двигатели локомотива.

<u>Ключевые слова:</u> *транспорт, железная дорога, поезд, трогание, сцепки, трение, перемещение, скорость.*

<u>Для цитирования:</u> *Попов И. П. Модель трогания тяжёлого состава // Мир транспорта. 2021. Т. 19. № 2 (93). С. 19–24. DOI: https://doi.org/10.30932/1992-3252-2021-19-2-3.*

Полный текст статьи на английском языке публикуется во второй части данного выпуска.
The full text of the article in English is published in the second part of the issue.

ВВЕДЕНИЕ

Сила трения покоя значительно превосходит силу трения движения. Это приводит к тому, что режим трогания для наземного транспортного средства является наиболее тяжёлым [1–4]. Для поездов этот режим представляет настолько серьёзную проблему, что иногда приходится принимать специальные меры, такие как использование песка в зоне контакта бандажа колеса с рельсом или вспомогательного локомотива [5–7]. Эта проблема усугубляется в связи с устойчивой тенденцией повышения массы и длины поездов.

Эффективным способом трогания поезда является выбор зазоров в сцепках. При этом вагоны приводятся в движение поочерёдно, и инертная масса, а также сила трения покоя непосредственно в момент трогания минимальны [8; 9].

Этот способ, однако, имеет два существенных недостатка – малую фиксированную величину зазоров в сцепках, что ограничивает эффективность способа и ударный характер передачи импульса, что отрицательно сказывается на состоянии конструктивных элементов поезда.

Указанных недостатков можно избежать, если использовать упруго деформируемые сцепки [10].

В литературе представлены результаты теоретических исследований элементов конструкций, использующих гибкие и упругие компоненты [11–13].

В связи с этим представляет интерес динамика всего поезда в режиме трогания с места.

Целью работы является математическое описание «лёгкого» трогания поезда с упругими сцепками.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Расчёт механической системы в составе массивных локомотивов, вагонов и упругих сцепок является достаточно громоздким [14; 15]. Для его минимизации принимаются следующие допущения: сила F, развиваемая локомотивом, – величина постоянная; массы локомотива и вагонов равны между собой и составляют m.

Локомотив и один вагон

Уравнение сил, приложенных к локомотиву, имеет вид:

$$F = m\frac{d^2x_1}{dt^2} + k(x_1 - x_2)\,, \tag{1}$$

где x_1, x_2 – перемещение, соответственно, локомотива и вагона;

k – коэффициент упругости сцепки [16].

Силы, приложенные к вагону, удовлетворяют уравнению:

$$0 = m\frac{d^2x_2}{dt^2} - k(x_1 - x_2).$$

Из последнего уравнения следует:

$$x_1 = \frac{m}{k}\frac{d^2x_2}{dt^2} + x_2\,. \tag{2}$$

Подстановка этого выражения в (1) даёт:

$$F = \frac{m^2}{k}\frac{d^4x_2}{dt^2} + m\frac{d^2x_2}{dt^2} + m\frac{d^2x_2}{dt^2} + kx_2 - kx_2 = \frac{m^2}{k}\frac{d^4x_2}{dt^2} + 2m\frac{d^2x_2}{dt^2}. \tag{3}$$

Тогда пусть:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = z\,. \tag{4}$$

И тогда (3) запишется в виде:

$$z'' + 2\frac{k}{m}z = \frac{kF}{m^2}\,. \tag{5}$$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 + 2\frac{k}{m} = 0\,.$$

Его корни равны:

$$r_{1,2} = \pm i\sqrt{2\frac{k}{m}}\,.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$z_1 = C_1\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t.$$

Частное решение в соответствии с (5) имеет вид:

$$z_2 = A.$$

Подстановка его в (5) даёт:

$$2\frac{k}{m}A = \frac{kF}{m^2}\,,\quad A = \frac{F}{2m}\,.$$

Общее решение уравнения (5) находится как:

$$z = z_1 + z_2 = C_1\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}\,.$$

В момент времени $t = 0$ сцепка не деформирована, следовательно, на вагон сила не действует и величина (4) равна нулю. Поэтому для $t = 0$ последнее выражение примет вид:

$$z(0) = 0 = C_1\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}0 + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}0 + \frac{F}{2m}\,,\quad C_1 = -\frac{F}{2m}\,.$$

С учётом этого:

$$z = -\frac{F}{2m}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t + \frac{F}{2m}\,. \tag{6}$$

В соответствии с (4):

$$v_2=\int z dt=-\frac{F}{2m}\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t-$$

$$-C_2\sqrt{\frac{m}{2k}}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{2m}t+C_3,$$

$$x_2=\int v_2 dt=\frac{F}{4k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t- \qquad (7)$$

$$-C_2\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{4m}t^2+C_3t+C_4.$$

С учётом (2), (4), (6) и (7):

$$x_1=-\frac{F}{2k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t+$$

$$+C_2\frac{m}{k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{2k}+\frac{F}{4k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t-$$

$$-C_2\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{4m}t^2+C_3t+C_4,$$

$$v_1=\frac{dx_1}{dt}=\frac{F}{2k}\sqrt{2\frac{k}{m}}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t+C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t-$$

$$-\frac{F}{4k}\sqrt{2\frac{k}{m}}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t-C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{2k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{2m}t+C_3,$$

$$a_1=\frac{dv_1}{dt}=\frac{F}{2k}2\frac{k}{m}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t-$$

$$-C_2 2\frac{k}{m}\frac{m}{k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t-\frac{F}{4k}2\frac{k}{m}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}t+$$

$$+C_2 2\frac{k}{m}\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}t+\frac{F}{2m},$$

$$x_2(0)=0=\frac{F}{4k}\cos\sqrt{2\frac{k}{m}}0-$$

$$-C_2\frac{m}{2k}\sin\sqrt{2\frac{k}{m}}0+\frac{F}{4m}0^2+C_3 0+C_4,$$

$$\frac{F}{4k}+C_4=0,\ C_4=-\frac{F}{4k},$$

$$v_2(0)=0=-C_2\sqrt{\frac{m}{2k}}+C_3,$$

$$v_1(0)=0=C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{k}-C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{2k}+C_3=$$

$$=C_2\sqrt{2\frac{k}{m}}\frac{m}{2k}+C_3,$$

$$\begin{cases}-C_2\sqrt{\dfrac{m}{2k}}+C_3=0\\ C_2\sqrt{\dfrac{m}{2k}}+C_3=0\end{cases},\ C_2=0,\quad C_3=0.$$

Окончательное решение:

$$x_1=-\frac{F}{4k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{4m}t^2+\frac{F}{4k},$$

$$x_2=\frac{F}{4k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{4m}t^2-\frac{F}{4k},$$

$$v_1=\frac{F}{2\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{2m}t,$$

$$v_2=-\frac{F}{2\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{2m}t,$$

$$a_1=\frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{2m},\ a_2=-\frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t+\frac{F}{2m}.$$

Характерный отрезок времени τ_2 (индекс «$_2$» означает количество составных частей поезда) для рассматриваемого случая определяется из условия максимального растяжения упругой сцепки. При этом:

$$a_1(\tau_2)-\frac{F}{2m}=0 \text{ или } \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\tau_2=0,$$

$$\sqrt{2\frac{k}{m}}\tau_2=\frac{\pi}{2},\ \tau_2=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

За время τ_2 локомотив пройдёт расстояние

$$x_1(\tau_2)=-\frac{F}{4k}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}+\frac{F}{4m}\frac{\pi^2}{4}\frac{m}{2k}+\frac{F}{4k}=\frac{F\pi^2}{32k}+\frac{F}{4k}$$

и разовьёт скорость

$$v_1(\tau_2)=\frac{F}{2\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}+\frac{F}{2m}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}=$$

$$=\frac{F}{2\sqrt{2km}}+\frac{F\pi}{4\sqrt{2km}}.$$

Уместно сравнить эти показатели с соответствующими величинами для недеформируемого состава:

$$a=\frac{F}{2m},\ v=\frac{F}{2m}t,\ x=\frac{F}{4m}t^2;$$

$$x(\tau_2)=\frac{F}{4m}\frac{\pi^2}{4}\frac{m}{2k}=\frac{F\pi^2}{32k},\ v(\tau_2)=\frac{F}{2m}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}=\frac{F\pi}{4\sqrt{2km}};$$

$$\frac{x_1(\tau_2)}{x(\tau_2)}=\frac{F\pi^2/(32k)+F/(4k)}{F\pi^2/(32k)}=1+\frac{32}{4\pi^2}\approx 1{,}81;$$

$$\frac{v_1(\tau_2)}{v(\tau_2)}=\frac{F/(2\sqrt{2km})+F\pi/(4\sqrt{2km})}{F\pi/(4\sqrt{2km})}=1+\frac{2}{\pi}\approx 1{,}64.$$

Отношение для кинетических энергий локомотива [17] составляет:

$$\frac{E_1(\tau_2)}{E(\tau_2)}=2{,}69.$$

Полученные соотношения наглядно демонстрируют, что трогание состава с упругими сцепками значительно легче, чем недеформируемого.

Локомотив и два вагона

Уравнения сил, приложенных, соответственно, к локомотиву и вагонам, имеют вид:

$$F=m\frac{d^2x_1}{dt^2}+k(x_1-x_2); \qquad (8)$$

$$k(x_1-x_2)=m\frac{d^2x_2}{dt^2}+k(x_2-x_3); \qquad (9)$$

$$k(x_2-x_3)=m\frac{d^2x_3}{dt^2}.$$

Из последнего уравнения следует:

$$x_2=\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}+x_3. \qquad (10)$$

Производная этого выражения равна:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}=\frac{m}{k}\frac{d^4x_3}{dt^4}+\frac{d^2x_3}{dt^2}.$$

Подстановка последних двух выражений в (9) даёт:

$$x_1=\frac{m}{k}\frac{d^2x_2}{dt^2}+2x_2-x_3=$$

$$\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4}+\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}+2\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}+2x_3-x_3=$$

$$=\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4}+3\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}+x_3. \qquad (11)$$

Производная этого выражения равна:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{m^2}{k^2}\frac{d^6x_3}{dt^6}+3\frac{m}{k}\frac{d^4x_3}{dt^4}+\frac{d^2x_3}{dt^2}.$$

Подстановка полученных выражений в (8) даёт:

$$\frac{F}{k}=\frac{m^3}{k^3}\frac{d^6x_3}{dt^6}+3\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4}+\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}+$$

$$+\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4}+3\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}+x_3-\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2}-x_3=$$

$$=\frac{m^3}{k^3}\frac{d^6x_3}{dt^6}+4\frac{m^2}{k^2}\frac{d^4x_3}{dt^4}+3\frac{m}{k}\frac{d^2x_3}{dt^2},$$

$$\frac{d^6x_3}{dt^6}+4\frac{k}{m}\frac{d^4x_3}{dt^4}+3\frac{k^2}{m^2}\frac{d^2x_3}{dt^2}=\frac{k^2F}{m^3}. \qquad (12)$$

Пусть:

$$\frac{d^2x_3}{dt^2}=z. \qquad (13)$$

Тогда (12) запишется в виде:

$$z''''+4\frac{k}{m}z''+3\frac{k^2}{m^2}z=\frac{k^2F}{m^3}. \qquad (14)$$

Характеристическое уравнение:

$$r^4+4\frac{k}{m}r^2+3\frac{k^2}{m^2}=0,$$

$$r_{1,2}^2=-2\frac{k}{m}\pm\frac{k}{m}=,\quad r_1^2=-3\frac{k}{m},\quad r_2^2=-\frac{k}{m},\quad r_{1,2}=\pm i\sqrt{3\frac{k}{m}},$$

$$r_{3,4}=\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$z_1=C_1\cos\sqrt{3\frac{k}{m}}t+C_2\sin\sqrt{3\frac{k}{m}}t+$$

$$+C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+C_4\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Частное решение имеет вид:

$$z_2=A.$$

Подстановка его в (14) даёт:

$$3\frac{k^2}{m^2}A=\frac{k^2F}{m^3},\quad A=\frac{F}{3m}.$$

Общее решение находится, как:

$$z=z_1+z_2=C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+$$

$$+C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+C_4\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{3m}. \qquad (15)$$

В соответствии с (13):

$$v_3=\int z\,dt=C_1\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_2\sqrt{\frac{m}{3k}}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+$$

$$+C_3\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t-C_4\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{3m}t+C_5; \qquad (16)$$

$$x_3=\int v_3\,dt=-C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t-$$

$$-C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t-C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{6m}t^2+C_5t+C_6. \qquad (17)$$

С учётом (10), (13), (15) и (17):

$$x_2=\frac{m}{k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{m}{k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+$$

$$+\frac{m}{k}C_3\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{m}{k}C_4\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{m}{k}\frac{F}{3m}-$$

$$-C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t-$$

$$-C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{6m}t^2+C_5t+C_6=$$

$$=\frac{2m}{3k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{2m}{3k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+$$

$$+\frac{F}{3k}+\frac{F}{6m}t^2+C_5t+C_6; \qquad (18)$$

$$v_2=\frac{dx_2}{dt}=-\frac{2m}{3k}\sqrt{\frac{3k}{m}}C_1\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+$$

$$+\frac{2m}{3k}\sqrt{\frac{3k}{m}}C_2\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3m}t+C_5= \qquad (19)$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_1\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_2\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3m}t+C_5;$$

$$a_2=\frac{dv_2}{dt}=-2C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-2C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3m}. \qquad (20)$$

С учётом (11), (17), (18) и (20):

$$x_1=-2C_1\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-2C_2\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\frac{F}{3m}\frac{m}{k}+$$

$$+2\frac{2m}{3k}C_1\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+2\frac{2m}{3k}C_2\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+$$

$$+\frac{2F}{3k}+\frac{2F}{6m}t^2+2C_5t+2C_6+$$

$$+C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t+C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+$$

$$+C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t-\frac{F}{6m}t^2-C_5t-C_6=$$

$$=-C_1\frac{m}{3k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_2\frac{m}{3k}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t+C_3\frac{m}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+$$

$$+C_4\frac{m}{k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{k}+\frac{F}{6m}t^2+C_5t+C_6;$$

$$v_1=\frac{dx_1}{dt}=C_1\sqrt{\frac{m}{3k}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t-$$

$$-C_2\sqrt{\frac{m}{3k}}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t-C_3\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+$$

$$+C_4\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+\frac{F}{3m}t+C_5; \qquad (21)$$

Таблица 1

Количество секций поезда	$\frac{x_1(\tau)}{x(\tau)}$	$\frac{v_1(\tau)}{v(\tau)}$	$\frac{E_1(\tau)}{E(\tau)}$
2	1,81	1,64	2,69
3	2,6	2,22	4,93

$$a_1 = C_1 \cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - C_3 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}.$$

В соответствии с (20):

$$a_2(0) = -2C_1 + \frac{F}{3m} = 0, \; C_1 = \frac{F}{6m}.$$

В соответствии с (15):

$$z(0) = 0 = \frac{F}{6m} + C_3 + \frac{F}{3m}, \; C_3 = -\frac{F}{2m}.$$

В соответствии с (18):

$$x_2(0) = \frac{2m}{3k}C_1 + \frac{F}{3k} + C_6 = 0,$$

$$\frac{F}{9k} + \frac{F}{3k} + C_6 = 0, \; C_6 = -\frac{4F}{9k}.$$

В соответствии с (16), (19), (21):

$$v_1(0) = -C_2\sqrt{\frac{m}{3k}} + C_4\sqrt{\frac{m}{k}} + C_5 = 0;$$

$$v_3(0) = -C_2\sqrt{\frac{m}{3k}} - C_4\sqrt{\frac{m}{k}} + C_5 = 0, \; C_4 = 0;$$

$$v_2(0) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3m}{k}}C_2 + C_5 = 0, \; C_2 = 0, \; C_5 = 0.$$

Окончательное решение:

$$x_1 = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 + \frac{5F}{9k};$$

$$x_2 = \frac{F}{9k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 - \frac{F}{9k};$$

$$x_3 = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{6m}t^2 - \frac{4F}{9k};$$

$$v_1 = \frac{F}{6\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t;$$

$$v_2 = -\frac{F}{3\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m}t;$$

$$v_3 = \frac{F}{6\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \frac{F}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}t;$$

$$a_1 = \frac{F}{6m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m};$$

$$a_2 = -\frac{F}{3m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \frac{F}{3m};$$

$$a_3 = \frac{F}{6m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t - \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{F}{3m}.$$

Характерный отрезок времени τ_3 для рассматриваемого случая определяется из условия максимального растяжения упругой сцепки.

При этом:

$$a_1(\tau_3) - \frac{F}{3m} = 0 \text{ или } \frac{F}{6m}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\tau_3 + \frac{F}{2m}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0;$$

$$\frac{1}{3}\cos\sqrt{3}\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 + \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0.$$

Решение последнего уравнения имеет вид:

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\tau_3 = 0,427\pi, \; \tau_3 = 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

За время τ_3 локомотив пройдёт расстояние:

$$x_1(\tau_3) = -\frac{F}{18k}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} - $$

$$-\frac{F}{2k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} +$$

$$+\frac{F}{6m}\left(0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 + \frac{5F}{9k} =$$

$$= \frac{F}{k}\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{18}\cos\sqrt{3}\cdot 0,427\pi - \\ -\frac{1}{2}\cos 0,427\pi + \frac{1}{6}(0,427\pi)^2 + \frac{5}{9}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{F}{k}\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{18}\cos\sqrt{3}\cdot 0,427\pi - \frac{1}{2}\cos 0,427\pi + \\ +\frac{1}{6}(0,427\pi)^2 + \frac{5}{9}\end{array}\right] = 0,78\frac{F}{k}$$

и разовьёт скорость:

$$v_1(\tau_3) = \frac{F}{6\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} +$$

$$+\frac{F}{2\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{F}{3m}\cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} =$$

$$= \frac{F}{\sqrt{km}}\left(\begin{array}{l} \frac{1}{6\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\cdot 0,427\pi + \\ +\frac{1}{2}\sin 0,427\pi + \frac{1}{3}0,427\pi\end{array}\right) = \frac{F}{\sqrt{km}}.$$

Уместно сравнить эти показатели с соответствующими величинами для недеформируемого состава:

$$a = \frac{F}{3m}; \; v = \frac{F}{3m}t; \; x = \frac{F}{6m}t^2;$$

$$x(\tau_3) = \frac{F}{6m}\left(0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 = 0,3\frac{F}{k};$$

$$v(\tau_3) = \frac{F}{3m}\cdot 0,427\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,45\frac{F}{\sqrt{mk}};$$

$$\frac{x_1(\tau_3)}{x(\tau_3)} = 2,6;$$

$$\frac{v_1(\tau_3)}{v(\tau_3)} = 2,22.$$

Отношение для кинетических энергий локомотива составляет:

$$\frac{E_1(\tau_3)}{E(\tau_3)} = 4,93.$$

ВЫВОДЫ

Применение упруго деформируемых сцепок решает проблему трогания тяжёлого поезда.

В табл. 1 сведены перемещения, скорости и кинетические энергии локомотива для моментов максимального растяжения упругой сцепки, отнесённые к соответствующим параметрам недеформируемого состава.

Полученные соотношения наглядно демонстрируют, что трогание состава с упругими сцепками значительно легче, чем недеформируемого. При этом чем больше число вагонов, тем больше преимущество первого перед вторым.

Смягчение режима трогания состава, по существу, обусловливается заменой одновременного трогания секций на поочерёдное. Выше этот процесс описан для инерционных сил. Применительно к силе трения покоя механизм будет подобным, то есть преодолевается не вся сила трения покоя одновременно, а поочерёдно преодолеваются её малые части.

Полученные выражения для перемещений, скоростей и ускорений локомотива и вагонов имеют гармонические составляющие. Для исключения продольных колебаний состава после достижения максимального растяжения сцепки следует механически блокировать возможность её гармонического сжатия с последующей выборкой упругой деформации, например, с использованием демпфирующих устройств.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Попов И. П. Инертно-ёмкостной накопитель энергии для маневрового тепловоза // Мир транспорта. − 2019. – Т. 17. − № 3. − С. 82–87. DOI: https://doi.org/10.30932/1992-3252-2019-17-3-82-87.

2. Митин Э. В., Сульдин С. П., Калякулин С. Ю. Расчёт на прочность легкового прицепа общего назначения в режимах трогания с места и поворота // Автомобильная промышленность. − 2019. − № 3. − С. 33−36.

3. Коблов Р. В., Егоров П. Е., Новачук Я. А. Новое прочтение механизма образования силы тяги локомотива // Мир транспорта. − 2016. − Т. 14. − № 5 (66). − С. 6−18. [Электронный ресурс]: https://mirtr.elpub.ru/jour/article/view/1047/1323. Доступ 25.12.2020.

4. Черепанов Л. А., Тарасов Д. А. Исследование работы сцепления при трогании автомобиля с места // Транспортные системы. − 2020. − № 2 (16). − С. 10–15. DOI: 10.46960/62045_2020_2_10.

5. Новосельцев П. В., Гордеева А. А., Купцов Ю. А. Эксперимент с проскальзыванием колёсных пар локомотива // Мир транспорта. − 2017. − Т. 15. − № 3 (70). − С. 104−110. [Электронный ресурс]: https://mirtr.elpub.ru/jour/article/download/1218/1494. Доступ 25.12.2020.

6. Коновалов П. Ю., Булавин Ю. П., Волков И. В. Улучшение противобуксовочных свойств транспортных машин на основе модернизации пневмопривода песочной системы // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. − 2021. − № 1 (81). − С. 8–19. DOI: 10.46973/0201-727X_2021_1_8.

7. Демин В. А. Актуальные задачи развития транспортно-логистических систем // Мир транспорта. − 2018. − Т. 16. − № 6 (79). − С. 14−19. [Электронный ресурс]: https://mirtr.elpub.ru/jour/article/view/1543. Доступ 25.12.2020.

8. Шимановский А. О., Сахаров П. А. Влияние зазоров в автосцепных устройствах на продольные силы в межвагонных соединениях однородного поезда // Механика машин, механизмов и материалов. − 2019. − № 2 (47). − С. 42–50.

9. Краснов О. Г. Методика определения интегрального распределения сил, действующих на путь // Мир транспорта. − 2019. − Т. 17. − № 4 (83). − С. 6−21. DOI: 10.30932/1992-3252-2019-17-4-6-21.

10. Упырь Р. Ю., Давыдова Н. В., Хурэлбаатар Ц. Возникновение и оценка динамического взаимодействия груза и вагона // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. − 2018. − № 1 (57). − С. 8–15. DOI: 10.26731/1813-9108.2018.1(57).8-15.

11. Huo, Junzhou; Wu, Hanyang; Zhu, Dong; Sun, Wei; Wang, Liping; Dong, Jianghui. The rigid–flexible coupling dynamic model and response analysis of bearing–wheel–rail system under track irregularity. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2018, Vol. 232, Iss. 21, pp. 3859–3880. DOI: 10.1177/0954406217745336.

12. Lu, Yao-hui; Zeng, Jeng; Wu, Ping-bo; Guan, Qing-hua. Modeling of Rigid-Flexible Coupling System Dynamics for Railway Vehicles with Flexible Bogie Frame. Fourth International Conference on Innovative Computing, Information and Management (ICICIC), 2009, pp. 1355–1360. DOI: 10.1109/ICICIC.2009.265.

13. Ling, Liang; Xiao, Xinbiao; Xiong, Jia-yang; Zhou, Li; Wen, Ze; Jin, Xue-song. A 3D Model for Coupling Dynamics Analysis of High-Speed Train/Track System. Journal of Zhejiang University SCIENCE A, 2014, Vol. 15, pp. 964–983. DOI: https://doi.org/10.1631/jzus.A1400192.

14. Пудовиков О. Е., Муров С. А. Моделирование режима регулировочного торможения длинносоставного поезда // Мир транспорта. − 2015. − Т. 13. − № 2 (57). − С. 28−33. [Электронный ресурс]: https://mirtr.elpub.ru/jour/article/view/262/473.

15. Попов И. П. Применение символического (комплексного) метода для расчёта сложных механических систем при гармонических воздействиях // Прикладная физика и математика. − 2019. − № 4. − С. 14–24. DOI: 10.25791/pfim.04.2019.828.

16. Попов И. П. Дифференциальные уравнения двух механических резонансов // Прикладная физика и математика. − 2019. − № 2. − С. 37–40. DOI: 10.25791/pfim.02.2019.599.

17. Попов И. П. Условно-ортогональные механические мощности // Оборонный комплекс − научно-техническому прогрессу России. − 2019. − № 4 (144). − С. 15–17. [Электронный ресурс]: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41450991. Доступ 25.12.2020. ●

Информация об авторе:

Попов Игорь Павлович *− старший преподаватель кафедры технологии машиностроения, металлорежущих станков и инструментов Курганского государственного университета, Курган, Россия, ip.popow@yandex.ru.*

Статья поступила в редакцию 10.01.2021, одобрена после рецензирования 21.04.2021, принята к публикации 23.04.2021.