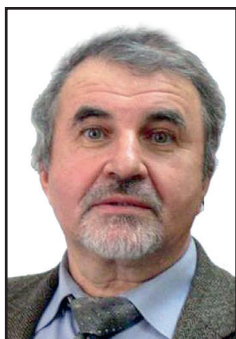




Математическая модель распространения эпидемии внутри железнодорожного купейного вагона



Александр БРАТУСЬ



Александра ОЧЕРЕТЯНАЯ

*Братусь Александр Сергеевич – Российский университет транспорта, Москва, Россия.
Очеретяная Александра Сергеевна – Российский университет транспорта, Москва, Россия*.*

В данной статье рассмотрен один из аспектов самой актуальной для 2020 года проблемы – распространения инфекций. В частности, в работе объектом распространения является железнодорожный вагон. Цель – описать распространение эпидемии в железнодорожном вагоне с помощью стохастической модели. Модель вагона представляется в виде сети. Процессы, происходящие на сети, считаются марковскими. В данной работе применено

два метода стохастического моделирования: моделирование на основе уравнений Колмогорова и алгоритм Гиллеспи. Уравнения Колмогорова используются для проверки применимости алгоритма Гиллеспи, который, в свою очередь, использован для расчётов модели вагона. Полученные данные были проанализированы, и на их основе можно сделать заключение о применимости модели на случай типичного пассажирского поезда.

Ключевые слова: транспорт, железнодорожный транспорт, SIS модель, стохастическое моделирование, железнодорожный вагон, распространение инфекций, марковский случайный процесс, уравнения Колмогорова, алгоритм Гиллеспи.

*Информация об авторах:

Братусь Александр Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования и системного анализа Института управления и цифровых технологий Российского университета транспорта, Москва, Россия, alexander.bratus@yandex.ru.
Очеретяная Александра Сергеевна – аспирант кафедры математического моделирования и системного анализа Института управления и цифровых технологий Российского университета транспорта, Москва, Россия, sandra.och@yandex.ru.

Статья поступила в редакцию 16.06.2020, принята к публикации 22.10.2020.

For the English text of the article please see p. 18.

ВВЕДЕНИЕ

В конце 2019 года и в начале 2020 года мир потрясли массовые заражения, вызванные новой коронавирусной инфекцией COVID-19. В связи с этим математические модели и моделирование процессов распространения инфекций могут быть использованы для построения устойчивых систем для прогнозирования и противодействия такого рода природным катаклизмам.

Первое упоминание об эпидемиологической модели было сформулировано Даниэлем Бернулли в 1760 году с целью оценки влияния вакцинации от оспы на ожидаемую продолжительность жизни человека. Однако отсутствие глобальных работ в эпидемиологическом моделировании сохранялось вплоть до начала XX столетия. В 1927 году Уильям Огилви Кермак и Андерсон Грэй Маккендрик вывели знаменитую предельную теорему, которая предсказывает в зависимости от потенциала передачи инфекции критическую долю уязвимых групп населения, которая должна быть превышена в случае возникновения эпидемии¹. За этим последовала работа Мориса Бартлетта, который исследовал модели и данные для выявления факторов, определяющих устойчивость болезни в больших популяциях. Первая знаковая книга по математическому моделированию эпидемиологических систем была опубликована Норманом Бейли, что частично привело к признанию важности моделирования в области общественного здравоохранения. Учитывая разнообразие инфекционных заболеваний, изучаемых с середины 1950-х годов, было разработано впечатляющее многообразие эпидемиологических моделей [1].

Одним из основных каналов распространения инфекций, вызывающих заболевания, является транспорт. Исследования показали, что авиаперевозки [2; 3] и водный транспорт [4; 5] играют огромную роль в глобальных эпидемиях. В одной из последних работ по теме распространения COVID-19 было установлено, что первый случай, зарегистрированный в китайском Ухане в середине ноября 2019 года, быстро распространился на

остальной Китай через «авиаперевозки и высокоскоростные железнодорожные сети» [6].

В данной статье в качестве предмета исследования рассмотрен типичный вагон железнодорожного состава. В нашем случае — пассажирский вагон, используемый на сети ОАО «РЖД».

Цель данной работы — построение стохастической модели для описания распространения эпидемии в типичном купейном вагоне в зависимости от источника заражения.

Для реализации этой цели была разработана модель вагона, основанная на сетевом подходе, где узлами сети являются элементы купейного вагона, между которыми установлены рёбра согласно структуре вагона. Сеть реализована на языке Python с использованием пакета *NetworkX* [7].

События, происходящие на сети, базируются на марковских случайных процессах. Динамика распространения инфекций в вагоне реализована с помощью *метода* стохастического моделирования, а именно алгоритма Гиллеспи (англ. *Gillespie simulation*) [8]. Для проверки применимости данного алгоритма была разработана модель с ограничениями в явном виде на основе особого вида дифференциальных уравнений — уравнений Колмогорова.

В результате численных расчётов были получены зависимости, показывающие, что на распространение эпидемии в вагоне поезда влияют не только количество изначально заражённых и скорость заражения, но и расположение инфицированных пассажиров.

Кроме того, были предложены меры, которые могли бы позволить замедлить динамику распространения инфекции по вагону в виде изоляции заражённого купе.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящий момент существует два основных подхода к моделированию эпидемий: детерминированный [9, с. 157–182] и стохастический [10, с. 8–11]. Детерминированные модели не учитывают перемещение по вагону, что оказывает первоочередное влияние на распространение инфекции. Однако при этом результаты расчётов в рамках этих моделей позволяют выявить основные закономерности — произойдёт ли эпидемия, как долго она продлится и насколько будет велика.

¹ См., напр., Breda, D., Diekmann, O., de Graff, W. F., Pugliese, A., Vermiglio, R. On the formulation of epidemic models (an appraisal of Kermack and McKendrick). *Journal of Biological Dynamics*, 2012, Vol. 6, Iss. 2, pp. 103–117. DOI: 10.1080/17513758.2012.716454.





Рис. 1. Схема купейного вагона на сайте ОАО «РЖД». Источник: <https://www.rzd.ru/>.

Стохастические модели позволяют учитывать неопределённость, они более точны, но при этом громоздки и сложны в реализации. Однако данный подход всё чаще используется в связи с развитием вычислительных возможностей [11].

Существует множество классических детерминированных моделей, описывающих динамику распространения эпидемий. Одной из них является SIS модель [9, с. 157–163; 10, с. 6–7], которая основана на делении людей на две группы: $S(t)$ – восприимчивые к заболеванию особи в момент времени t (от англ. *susceptible*); $I(t)$ – инфицированные переносчики болезни в момент времени t (от англ. *infected*). При этом общее количество человек ($N = S(t) + I(t)$) зафиксировано. Данная модель наиболее точно подходит для анализа распространения инфекции в вагоне поезда, так как человек в среднем проводит около суток в таком виде транспорта. Этого времени недостаточно, чтобы полностью выздороветь, однако его хватит на то, чтобы заразиться. Предполагается, что скорость заражения β пропорциональна размеру групп S и I , тогда как скорость выздоровления γ – только размеру группы I . Тогда процесс перехода из одной группы в другую описывается с помощью системы дифференциальных уравнений (1):

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \gamma I(t) - \beta S(t)I(t); \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t). \end{cases} \quad (1)$$

Чтобы учесть связь между людьми, детерминированная SIS модель в данной работе модифицирована и сведена к стохастической. В качестве системы выбирается вагон поезда. Состоянием в текущий момент времени считается количество человек, которые могут быть либо в группе S , либо I согласно заранее купленным местам. Предполагается, что скорость заражения восприимчивой особи S зависит от коэффициента заражения τ и количества зара-

жённых соседей k . Оказавшись в замкнутом пространстве с большим процентом больных людей, можно вероятнее заразиться, чем, если бы это был всего один инфицированный. Скорость выздоровления человека из группы I зависит только от коэффициента выздоровления γ . Если инфицированная особь заражает восприимчивую, то не имеет значения, каким образом её заразили до этого. Состояние системы в будущем зависит только от её текущего состояния. Таким образом, задача сводится к марковскому случайному процессу с непрерывным временем и конечным числом состояний. Допущением данной модели является то, что не учитываются переходы между вагонами, поэтому система замкнута, и количество человек равно $N = S + I$. Поэтому если система в момент времени t находилась в состоянии с количеством человек (S, I) , то возможны следующие переходы (2–3) [10, с. 8–11]:

$$(S, I) \cdot \tau \cdot k \cdot (S-1, I+1), \quad (2)$$

$$(S, I) \cdot \gamma \cdot (S+1, I-1). \quad (3)$$

В данной работе рассматриваются поезда дальнего следования, поэтому предполагается, что в большинстве случаев будут выбираться купейные вагоны для более комфортной поездки.

Рассмотрим типичный купейный вагон. Схема взята в разделе выбора билетов с сайта ОАО «РЖД» [12]. Билеты продаются на места с 1 по 36. На места 37 и 38 билетов в продаже нет. Это места проводника.

Таким образом, каждый вагон состоит из элементов: девять купе, место проводника, два туалета и два тамбура. Модель строится из следующих предположений и допущений. Если заражённый пассажир находится в купе, то с высокой вероятностью он заразит всех своих соседей. Поэтому считается, что купе либо в группе S , либо в группе I . Необходимо выделить общую зону, по которой передвигается проводник, контактирующий со всеми пассажирами, и сами пассажиры, которые

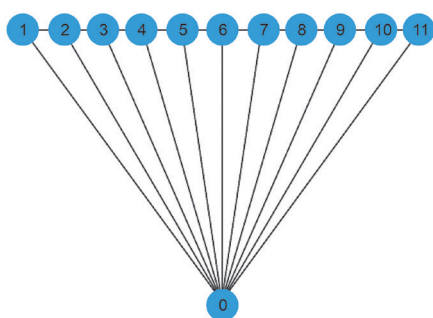


Рис. 2. Вид сети, где 0 – общая зона, 1, 11 – тамбуры, 2–10 – купе. (Составлено авторами).

идут в тамбур или туалет. Пассажиры для своих целей выходят в тамбур и могут там сталкиваться. Следовательно, тамбуры можно выделить в качестве отдельных зон.

Таким образом, вагон поезда можно представить в виде сети (рис. 2), где узлами являются общая зона (0), тамбуры (1, 11) и купе (2–10), а рёбра установлены между каждым купе и общей зоной, между соседними купе, между крайними купе и тамбурами, а также между тамбурами и общей зоной.

Каждый из N узлов может иметь один из двух статусов (S или I). То есть, элемент сети либо заражён, либо нет. Таким образом, получается 2^N возможных состояний. Состояние узла меняется со временем. Как отмечалось ранее, задача сводится к марковскому случайному процессу с непрерывным временем и конечным числом состояний. Таким образом, в любой момент предполагается, что единственными факторами, которые могут повлиять на вероятность изменения статуса узла, являются его текущее состояние и статусы его ближайших соседей. Поток событий переводит систему из одного состояния в другое. Время между событиями распределено экспоненциально [13, с. 112–132]. Скорость заражения восприимчивого узла (интенсивность перехода) зависит только от того, сколько заражено соседей. Заражённая вершина восстанавливается со скоростью, которая не зависит от статуса любого соседа.

Пусть система находится в состоянии $S_1 = ABCDEFGHIJKL$ (рис. 3), где вершины $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L$ могут принимать один из двух статусов (S или I).

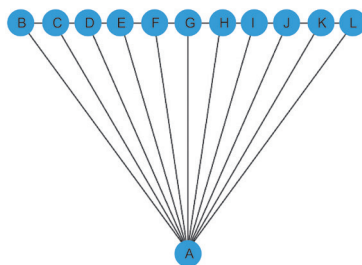


Рис. 3. Система в состоянии $S_1 = ABCDEFGHIJKL$. (Составлено авторами).

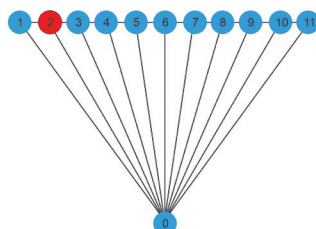


Рис. 4. Состояние $S_1 = SSISSSSSSSSS$, где синим цветом отмечены вершины в группе S , а красным (вершина 2) – в группе I . (Составлено авторами).

Например, известно, что в первом (рис. 2, вершина 2) купе находятся заражённые пассажиры, а во всех остальных частях вагона заражённых нет, следовательно, система находится в состоянии $S_1 = SSISSSSSSSSS$.

Рассмотрим переход из состояния $S_1 = SSISSSSSSSSS$ в состояние $S_4 = SSIHSSSSSSS$. Заметим, что за один шаг можно изменить статус только одной вершины. То есть чтобы перейти из состояния S_1 в состояние S_4 , сначала нужно попасть в состояние $S_2 = SSIHSSSSSSSSS$, либо в состояние $S_3 = SSIHSSSSSSSSS$. Обратим внимание на переход из S_1 в S_3 . Статус меняет третье купе (рис. 2, вершина 4) с S на I . Согласно сети, представленной на рис. 2, третье купе имеет связь со вторым и четвёртым купе, а также с общей зоной. Поскольку заражено первое купе, то интенсивность перехода из S_1 в S_3 равна согласно (2): $0 \cdot \tau = 0$, то есть, несмотря на то, что заражено первое купе, оно не оказывает прямого влияния на третье купе. При этом интенсивность перехода из S_3 в S_4 равна $2 \cdot \tau$, так как у второго купе два заражённых соседа. Переход из состояния S_1 в состояние S_4 представлен на рис. 5.

При этом из состояния S_2 в состояние S_1 можно перейти согласно (3) с интенсивностью γ .

Таким образом, составляется размеченный граф состояний, где вершины – это



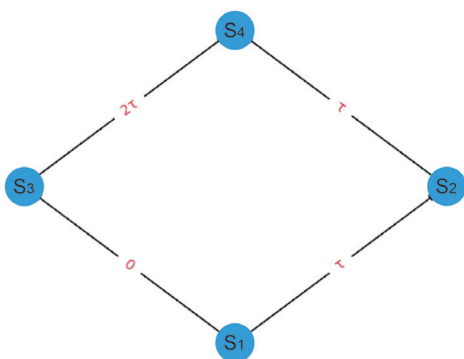


Рис. 5. Переход из состояния $S_1 = SSISSSSSSS$ в состояние $S_4 = SSIISSSSSS$, где $S_2 = SSIISSSSSS$ и $S_3 = SSISISSSSS$. (Составлено авторами).

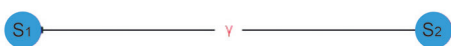


Рис. 6. Переход из состояния $S_2 = SSIISSSSSS$ в состояние $S_1 = SSISSSSSSS$ с интенсивностью γ . (Составлено авторами).

возможные состояния всей системы, а рёбра — интенсивности перехода. По размеченному графу состояний строится непосредственно математическая модель.

Каждая из N вершин может иметь два возможных статуса. Система имеет 2^N состояний. Пусть X_i — вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_i . Для любого момента времени сумма всех вероятностей равна $\sum_{i=0}^n X_i = 1$.

По графу состояний выписываются уравнения Колмогорова. В левой части ставятся производные вероятности каждого S_i состояния — $\dot{X}_i$. В правой части — сумма произведений интенсивностей переходов на вероятности состояний, в которые можно попасть из текущего состояния, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного S_i состояния [13, с. 112–132].

Решением системы уравнений будут вероятности X_i нахождения в каждом состоянии S_i в каждый момент времени t . По полученным вероятностям вычисляется среднее число инфицированных элементов I , равное сумме произведений числа больных k на полученные вероятности X_i с чис-

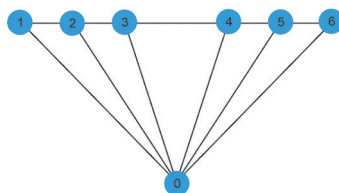


Рис. 7. Вид сети при $N = 7$, где 0 — общая зона, а 1–6 — купе. (Составлено авторами).

лом больных k . Так как система замкнута, то число восприимчивых элементов $S = N - I$.

В случае $N = 12$ число уравнений равно $2^{12} = 4096$. Рассмотрим случай с той же сетью для $N = 7$ и $2^7 = 128$ уравнений, то есть случай с шестью купе и одной общей зоной, чтобы произвести анализ полученных результатов.

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для данной постановки задачи на языке программирования Python были проведены расчёты для системы из 128 уравнений Колмогорова. Входные данные — начальные состояния системы, коэффициенты τ и γ . Предполагая в момент времени $t_0 = 0$ начальное состояние S_1 , вероятность X_1 принимается равной единице, все остальные — нулю. Выходные данные — количество заражённых I и восприимчивых S .

Если инфицирована вершина 0 (рис. 7), а все остальные имеют статус S , то начальное состояние системы $S_1 = ISSSSSS$. Примем скорость выздоровления $\gamma = 0,0001$, коэффициент заражения $\tau = 1$.

Динамика развития эпидемии (рис. 8) согласуется с классической SIS моделью [10, с. 6–7]. Результаты интерпретируются следующим образом. При наличии одного заражённого I , скорости выздоровления $\gamma = 0,0001$ и коэффициенте заражения $\tau = 1$ эпидемия будет развиваться таким образом, что спустя время потенциально заразится вся сеть. В примерах, представленных далее, сравнивается время, за которое вероятно может заразиться весь вагон.

Стохастическая модель на основе уравнений Колмогорова проста в реализации и легко интерпретируема, однако при расширении сети с рассмотренного случая $N = 7$ до $N = 12$, приходится учитывать большее количество взаимодействующих факторов. Рассмотренная модель может быть использована для проверки результатов алгоритма

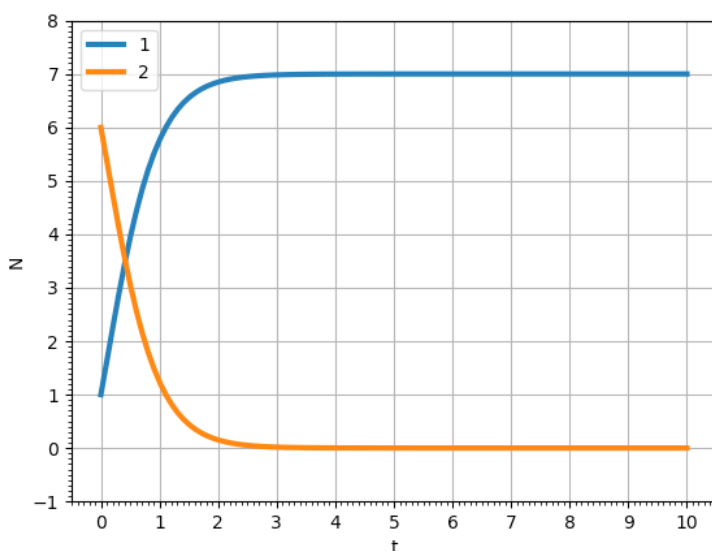


Рис. 8. Динамика развития эпидемии (расчёт для $N = 7$), начальное состояние $S_i = ISSSSSS$, скорость выздоровления $\gamma = 0,0001$, коэффициент заражения $\tau = 1$, по оси ординат – количество человек (N), по оси абсцисс – время (t), 1 – количество заражённых, 2 – количество подверженных заболеванию S . (Составлено авторами).

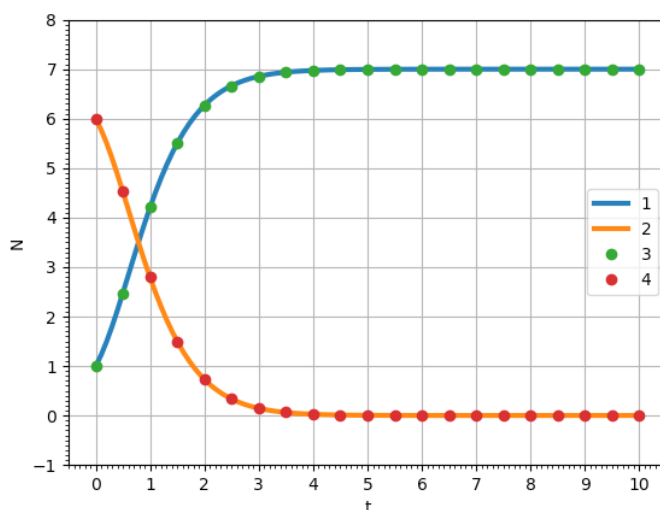


Рис. 9. Сравнение результатов алгоритма Гиллеспи и модели на основе уравнений Колмогорова при $N = 7$, вершина в статусе $I = 1$ и $S_i = SISSSSS$, скорость восстановления $\gamma = 0,0001$, коэффициент заражения $\tau = 1$, по оси ординат – количество человек (N), по оси абсцисс – время (t), 1 – количество заражённых I (уравнения Колмогорова), 2 – количество подверженных заболеванию S (уравнения Колмогорова), 3 – количество заражённых I (алгоритм Гиллеспи), 4 – количество подверженных заболеванию S (алгоритм Гиллеспи). (Составлено авторами).

Гиллеспи, который не имеет аналитического решения. В работе используется реализация данного метода для случая с сетями, разработанного группой авторов на языке программирования Python [10, с. 381–384; 14].

Суть метода заключается в следующем: вычисляется время до следующего события (заражение или восстановление одной из вершин) исходя из совокупной скорости

всех возможных событий. Время между событиями распределено экспоненциально, параметром является сумма всех скоростей восстановления и заражения. Затем отдельно вычисляется, какое именно произойдёт событие. Шаги повторяются до тех пор, пока есть заражённые и не достигнуто максимальное расчётное время. Для достижения точности результатов расчёты выполняются на итерационной



основе. Входные данные — элементы в группе I, коэффициенты τ и γ . Выходные данные — количество заражённых I и восприимчивых S.

Алгоритм Гиллеспи позволяет дискретно и стохастически моделировать систему с небольшим количеством элементов, потому что каждое событие явно моделируется. Данный метод широко используется в моделировании химических реакций [15] и распространении заболеваний, таких как ВИЧ [16].

Так как метод Гиллеспи учитывает все возможные изменения событий, его применение обосновано для систем ограниченных размерностей в силу больших вычислительных затрат. Для решения рассматриваемой задачи распространения эпидемии в вагоне поезда использование алгоритма, таким образом, является оправданным.

Сравним описанную ранее модель на основе уравнений Колмогорова с алгоритмом Гиллеспи при $N = 7$. Пусть изначально заражена первая вершина (рис. 7, вершина 1): вершина в статусе $I = 1$, $S_i = S$ (SSSSSS), скорость выздоровления $\gamma = 0,0001$, коэффициент заражения $\tau = 1$.

Решение на основе алгоритма Гиллеспи показывает хорошее совпадение с решением модели на основе уравнений Колмогорова (рис. 9), поэтому данный метод может быть применим для расширенной сети при $N = 12$ (рис. 2), что и является моделью поезда в данной статье.

РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 2 в качестве зон выделены купе (2–10), общая зона (0) и 2 тамбура (1, 11). Так как источником распространения инфекции является человек, изначально заражёнными могут быть общая зона (учитывается проводник) и купе. Рассмотрим и проанализируем случаи распространения инфекции.

Далее представлены случаи с отсутствием инфицированных пассажиров и одним заражённым в начальный момент времени (рис. 10). Принимаются скорость выздоровления $\gamma = 0,0001$ и коэффициент заражения $\tau = 0,5$.

Таким образом, эпидемия не распространяется при отсутствии инфицированных пассажиров (рис. 10а). Наибольший риск

развития эпидемии происходит через изначально заражённую общую зону (рис. 10б). Это связано с тем, что проводник, как правило, контактирует со всеми пассажирами. Кроме того, пассажиры передвигаются через общую зону. В рамках данной модели в случае заражения любого из купе развитие эпидемии будет протекать одинаково (рис. 10в). Это связано с тем, что предполагается, что люди большую часть времени проводят в своих купе, а в общественных местах (туалетах, тамбурах) бывают в среднем одинаковое время. Однако в последующих работах эти данные будут уточнены.

Рассмотрим четыре случая, когда изначально имеются две заражённые зоны, чтобы проанализировать влияние начальных условий на развитие эпидемии. Так как в данной постановке расчёты показывают, что каждое купе в равной степени оказывает влияние на систему в целом, они выбираются произвольным образом. Пусть в первом случае была заражена общая зона и первое купе (рис. 2, вершины 0 и 2). Во втором случае рассмотрим два любых соседних купе, например, второе и третье (рис. 2, вершины 3 и 4). В третьем случае рассмотрим два заражённых купе, которые находятся в разных концах: первое и девятое (рис. 2, вершины 2 и 10). В четвёртом, пусть заражённые купе находятся на близком расстоянии, но не рядом: пятое и седьмое (рис. 2, вершины 6 и 8). Результаты представлены на рис. 11, скорость выздоровления $\gamma = 0,0001$ и коэффициент заражения $\tau = 0,3$.

Анализ показывает, что наиболее быстро эпидемия развивается, когда заражена общая зона и любое из всех купе (рис. 11а). В случае двух изначально заражённых купе имеет значение их расположение. Поэтому при двух заразных купе наиболее опасен для распространения тот случай, когда они находятся в двух разных концах. Это объясняется тем, что туалеты и тамбуры находятся на двух разных концах, и соответственно риск заразиться при контакте с крайними купе выше. Наиболее безопасна ситуация, когда два заражённых купе находятся рядом (рис. 11б). Последний случай, когда два купе находятся на маленьком расстоянии (рис. 11г), влечёт меньше последствий, чем, когда заражённые купе находятся в разных концах

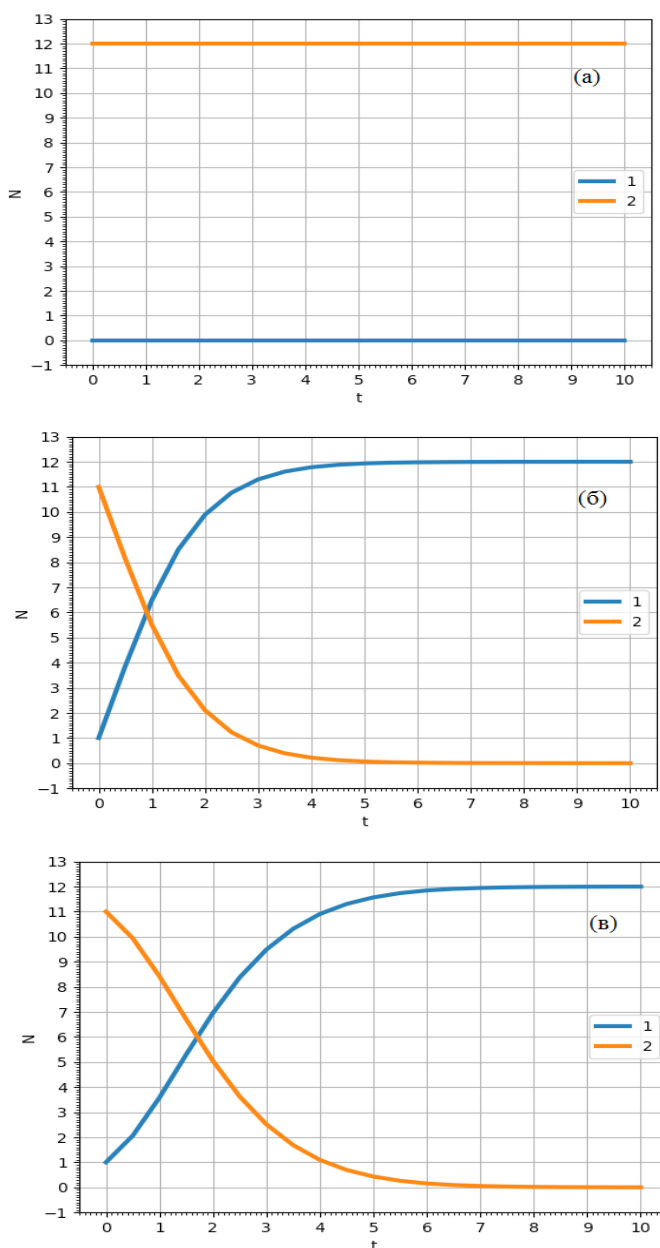


Рис. 10. Динамика развития эпидемии при отсутствии изначально инфицированных (а), при заражённой общей зоне (б), при одном заражённом купе (в), скорость выздоровления $\gamma = 0,0001$, коэффициент заражения $\tau = 0,5$, по оси ординат – количество человек (N), по оси абсцисс – время (t), 1 – количество заражённых I, 2 – количество подверженных заболеванию S. (Составлено авторами).

(рис. 11в). Однако данное расположение опаснее, чем, когда два заражённых купе находятся вблизи (рис. 11б).

Рассмотренные случаи являются репрезентативными и представляют обоснованную выборку случаев заражения. Данный подход может быть расширен как для случая большего числа заражённых, так и для большего числа зон общего пользования.

По результатам расчётов можно сделать вывод, что на развитие эпидемии влияет не только количество заражённых I, коэффициент заражения τ и скорость выздоровления γ , но и расположение изначально заражённых пассажиров. Разработанная модель позволяет учитывать расположение инфицированных пассажиров, что для поезда является ключевым фактором.



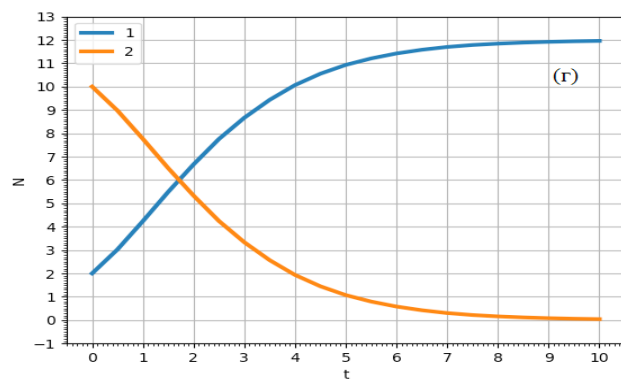
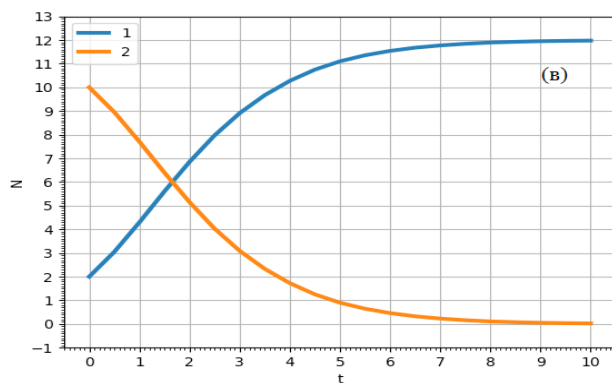
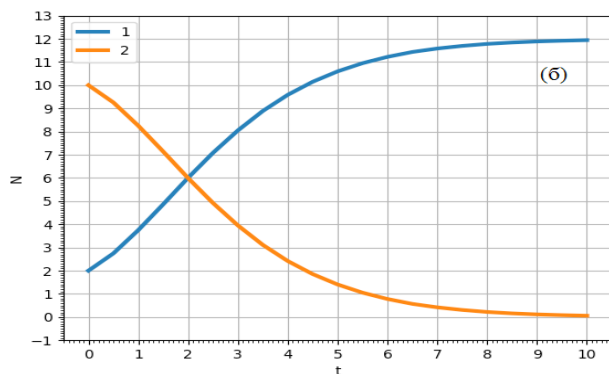
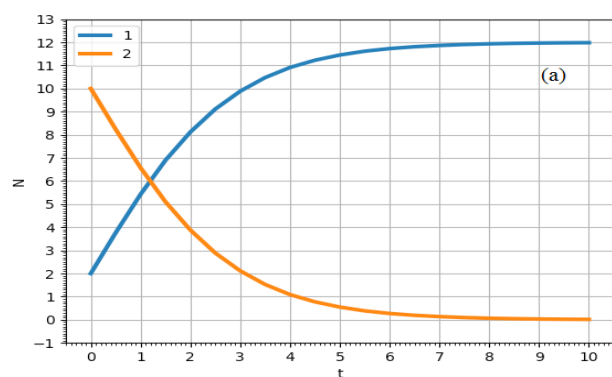


Рис. 11. Динамика развития эпидемии при заражённой общей зоной и первым купе (а), заражённых вторым и третьем купе (б), заражённых первым и девятым купе (в), заражённых пятым и седьмым купе (г), скорость выздоровления $\gamma = 0,0001$, коэффициент заражения $\tau = 0,3$, 1 – количество заражённых I, 2 – количество подверженных заболеванию S. (Составлено авторами).

Данная модель может быть расширена до рассмотрения поезда с учётом вагона-ресторана.

Численные расчёты показали (рис. 10б и рис. 11а), что наибольший риск заразиться имеет проводник, поэтому состоянию его здоровья нужно уделить внимание в первую очередь. Также особое внимание следует уделить местам общего пользования, проводить регулярную санитарную обработку.

Рассмотрим возможные меры, которые можно предпринять в случае обнаружения заразившихся пассажиров в вагоне в рамках данной модели. Пусть заражено одно из купе. П посадка полная, и нет возможности пересадить пассажиров на свободные места. В качестве одной из мер предотвращения распространения эпидемии в этом случае предлагается изолировать инфицированное купе от других пассажиров и оценить эффективность данного предположения. Инфицированные пассажиры имеют возможность выходить в общую зону, контактировать с проводником, соблюдая меры безопасности, и посещать туалеты в отличие от здоровых пассажиров время.

Пусть заражено первое купе (рис. 2, вершина 2), тогда с учётом наших предположений модель примет следующий вид (рис. 12).

Сравним динамику распространения эпидемии описанной ранее модели (рис. 2) с её модификацией (рис. 12) при скорости выздоровления $\gamma = 0,0001$ и коэффициенте заражения $\tau = 0,3$.

Изоляция заражённого купе (рис. 13) приведёт к замедлению распространения инфекции почти на 20 %. Таким образом, важный вывод состоит в том, что при обнаружении инфицированных в купе, необходимо его изолировать.

Рассмотрим далее зависимость расположения заражённого купе и количество изолированных купе от времени распространения инфекции. Предположим, что заражено первое купе (рис. 2, вершина 2), и для исключения опасных ситуаций вместе с первым купе изолируют и второе (рис. 2, вершина 3). Также по аналогии предположим, что заражено пятое купе (рис. 2, вершина 6). Для предотвращения распространения эпидемии в качестве мер профилактики изолируют заражённое пя-

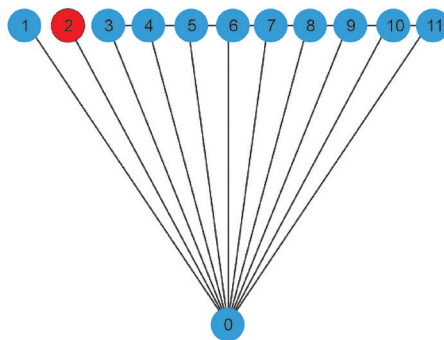


Рис. 12. Вид сети, где 0 – общая зона, 1, 11 – тамбуры, 2–10 – купе. Купе под номером 1 (вершина 2) инфицировано и изолировано от других. (Составлено авторами).

тое купе, или четвёртое (рис. 2 вершина 5) и пятое, или шестое (рис. 2, вершина 7) и пятое, или все три купе сразу. При этом второе купе, как четвёртое и шестое либо здоровы, либо предполагается, что в них отсутствуют пассажиры. Сравним полученные результаты, скорость восстановления $\gamma = 0,0001$, коэффициент заражения $\tau = 0,3$.

В рамках рассматриваемой модели изоляция более одного купе не ведёт к существенным улучшениям. Таким образом, главное – изолировать именно инфицированных пассажиров. В случае возникновения подобных ситуаций это существенно снизит нагрузку на проводников, которые находятся в зоне риска, прежде всего, доставит меньший дискомфорт другим пассажирам и приведёт к лучшему контролю ситуации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена модель распространения эпидемии в железнодорожном вагоне.

Детерминированная SIS модель в данной работе модифицирована и сведена к стохастической на основе марковских случайных процессов с непрерывным временем и конечным числом состояний. Для описания распространения эпидемии внутри вагона железнодорожного состава был выбран граф.

Для упрощённого случая с шестью купе и одной общей зоной ($N = 7$) была составлена и решена система с $2^7 = 128$ уравнений на языке программирования Python.

Модель на основе уравнений Колмогорова была использована для проверки ре-



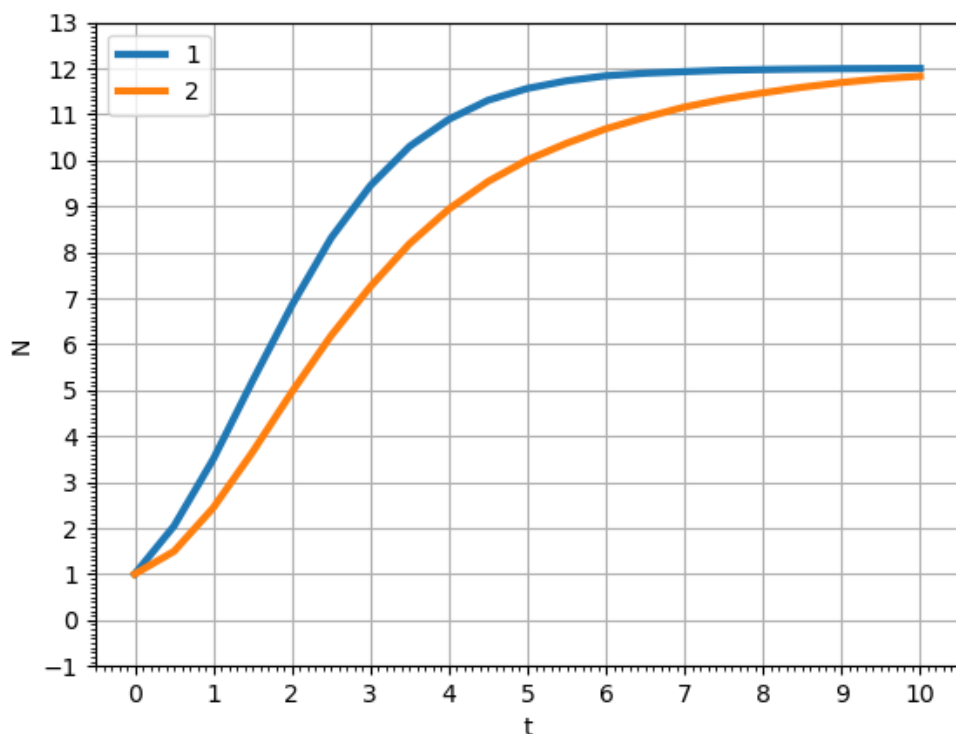


Рис. 13. Сравнение результатов распространения эпидемии в вагоне, работающем в обычном режиме и при изолированном заражённом купе, скорость восстановления $\gamma = 0,0001$, коэффициент заражения $\tau = 0,3$, по оси ординат – количество человек (N), по оси абсцисс – время (t), 1 – количество заражённых I при обычном функционировании вагона, 2 – количество заражённых I при изоляции инфицированного купе. (Составлено авторами).

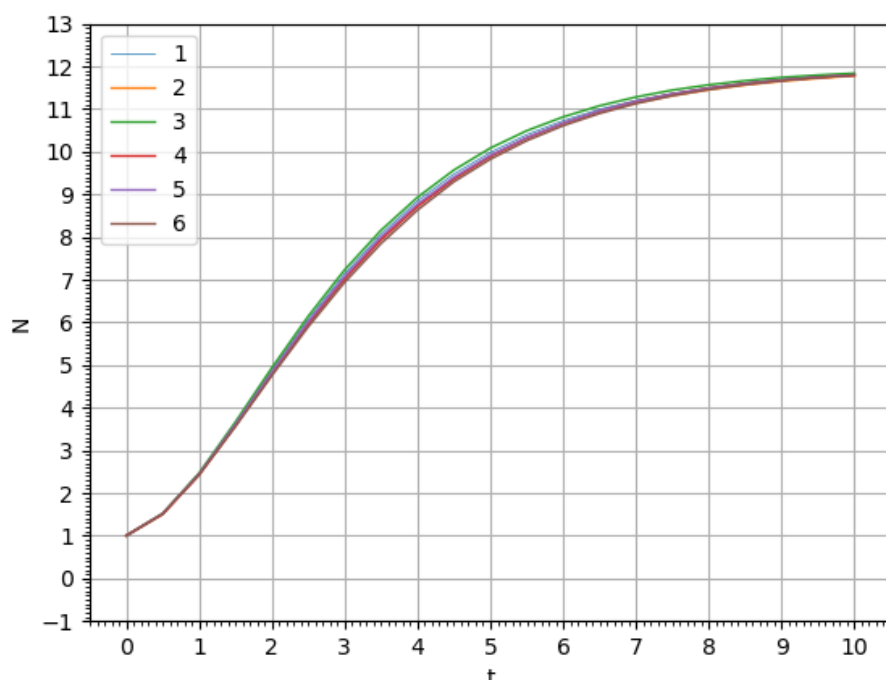


Рис. 14. Сравнение результатов распространения эпидемии в вагоне при разной степени изоляции, скорость восстановления $\gamma = 0,0001$, коэффициент заражения $\tau = 0,3$, по оси ординат – количество человек (N), по оси абсцисс – время (t), 1 – количество заражённых I при изоляции заражённого первого купе, 2 – количество заражённых I при изоляции заражённого первого и второго купе, 3 – количество заражённых I при изоляции заражённого пятого купе, 4 – количество заражённых I при изоляции заражённого пятого купе и четвёртого купе, 5 – количество заражённых I при изоляции заражённого пятого купе и шестого купе, 6 – количество заражённых I при изоляции заражённого пятого купе и соседних купе. (Составлено авторами).

зультатов алгоритма Гиллеспи, реализованного также на языке Python. Согласованность результатов позволила расширить сеть до случая с $N = 12$, что соответствует практически эксплуатируемым вагонам в составах, эксплуатируемых на сети ОАО «РЖД».

Полученные результаты позволили проанализировать распространение эпидемии при различных начальных условиях и заключить, что на скорость её развития влияет расположение изначально заражённых пассажиров. Показано, что наибольший риск при распространении эпидемии представляют проводники и нерегламентированное использование общественных мест. Предложены меры в случае нахождения одного инфицированного купе в виде изоляции от других пассажиров. Данная мера показала улучшение динамики распространения инфекции на 20 %. Численные расчёты свидетельствуют о том, что нет необходимости изолировать более чем одно купе при таком раскладе.

Данные результаты можно использовать при реальных перевозках, и отслеживать пассажиров, которые могут быть источниками распространения инфекций с помощью обработки данных с камер видеонаблюдения. Эти данные необходимы для модификации метода, использованного в работе, чтобы определить влияние каждого из купе. Например, в работе [17] авторы проводили исследования влияния общественного городского транспорта на распространение инфекции COVID-19 в Сингапуре по транспортным картам. Данные с транспортных карт использовались для составления математической модели и определения пассажиров, которых необходимо изолировать на ранней стадии для предотвращения распространения эпидемии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Choisy, M., Guégan, J.-F., Rohanil, P. Mathematical Modeling of Infectious Diseases Dynamics. Encyclopedia of Infectious Diseases: Modern Methodologies by Tibayrenc. M. John Wiley & Sons, Inc., 2007, pp. 379–403.
2. Barrat, A., Barthélemy, M., Colizza, V., Vespignani, V. The role of the airline transportation network in the prediction and predictability of global epidemics. PNAS, 14 February, 2006, Vol. 103 (7), pp. 2015–2020. DOI: www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.051052103.

3. Balcan, D., Colizza, V., Gonçalves, B., Hu, H., Ramasco, J. J., Vespignani, A. Multiscale mobility networks and the spatial spreading of infectious diseases. PNAS, 22 December, 2009, Vol. 106 (51), pp. 21484–21489. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.0906910106>.

4. Mari, L., Bertuzzo, E., Righetto L. [et al]. Modelling cholera epidemics: the role of waterways, human mobility and sanitation. J. R. Soc. Interface, 2012, Vol. 9 (67), pp. 376–388. DOI: 10.1098/rsif.2011.0304.

5. Gatto, M., Mari, L., Bertuzzo, E., Casagrandi, R., Righetto, L., Rodriguez-Iturbe, I., Rinaldo, A. Generalized reproduction numbers and the prediction of patterns in waterborne disease. PNAS, 27 November, 2012, Vol. 109 (48), pp. 19703–19708. DOI: 1073/pnas.1217567109.

6. Wu, J. T., Leung, K., Leung, G. M. Now casting and forecasting the potential domestic and international spread of the 2019-ncov outbreak originating in Wuhan, China: A modelling study. The Lancet, 29 February, 2020, Vol. 395 (10225), pp. 689–697. DOI: 10.1016/S0140-6736(20)30260-9.

7. Hagberg, A. A., Schult, D. A., Swart, P. J. Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX. Proceedings of the 7th Python in Science Conference (SciPy 2008). Eds.: G. El Varoquaux, Travis Vaught, Jarrod Millman, Pasadena, CA, USA, August 2008, pp. 11–15.

8. Gillespie, D. T. A general method for numerically simulating the stochastic time evolution of coupled chemical reactions. Journal of Computational Physics, Vol. 22 (4), December, 1976, pp. 403–434.

9. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. — М.: Физматлит, 2010. — 400 с.

10. Kiss, I., Miller, J., Simon, P. Mathematics of Epidemics on Networks: from Exact to Approximate Models. Springer Math, 2007, 413 p.

11. Deng, Xiaomin; Wang, Xiaomeng. The Application of Gillespie Algorithm in Spreading. 3rd International Conference on Mechatronics Engineering and Information Technology (ICMEIT 2019), April 2019, pp. 688–695. DOI: 10.2991/icmeit-19.2019.110.

12. Официальный сайт ОАО «РЖД». [Электронный ресурс]: <https://www.rzd.ru/>. Доступ 15.06.2020.

13. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология: Учеб. пособие. — 5-е изд., стер. — М.: Наука; Главная редакция физико-математической литературы, 1980. — 208 с.

14. EoN (Epidemics on Networks): a fast, flexible Python package for simulation, analytic approximation, and analysis of epidemics on networks. [Электронный ресурс]: <https://joss.theoj.org/papers/10.21105/joss.01731>. Доступ 19.06.2020.

15. Gillespie, D. T. Exact stochastic simulation of coupled chemical reactions. Journal of Computational Physics, 01 December, 1977, Vol. 81 (25), pp. 2340–2361. DOI: 10.1021/j100540a008.

16. Kamina, K. M., Mwalili, S., Wanjoya, A. The Modeling of a Stochastic SIR Model for HIV/AIDS Epidemic Using Gillespie's Algorithm. International Journal of Data Science and Analysis, 2019, Vol. 5, No. 6, pp. 117–122. DOI: 10.11648/j.ijdsa.20190506.12.

17. Mo, Baichuan; Feng, Kairui; Shen, Yu; Tam, Clarence; Li, Daqing; Yin, Yafeng; Zhao, Jinhua. Modeling Epidemic Spreading through Public Transit using Time-Varying Encounter Network. [Электронный ресурс]: <https://arxiv.org/pdf/2004.04602.pdf>. Доступ 19.06.2020.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 20-04-60157 «Интегративный подход к математическому моделированию механизмов патогенеза и развития пандемии инфекции коронавируса».

