



Применение интегрального преобразования Фурье при расчёте конструкций



Артём КОСАУРОВ

Artem P. KOSAUROV

Use of Fourier Integral Transform in Calculation of Structures
(текст статьи на англ. яз. – English text of the article – p. 55)

В работе представлен метод получения системы линейных уравнений, описывающей конечный элемент в стержневой системе.

При решении используется интегральное преобразование Фурье и обобщённые функции. Граничные условия на концах конечного элемента определяются из теоремы Винера–Пэли–Шварца. Применение метода при расчёте балочных, вантовых и экстрадозных мостов позволяет задавать любые виды нагрузок без замены их какими-либо эквивалентными.

Ключевые слова: мост, пролётное строение, железобетонная конструкция, метод конечных элементов, обобщённые функции, дифференциальное уравнение балки Тимошенко, интегральное преобразование Фурье, теорема Винера–Пэли–Шварца.

Косауров Артём Петрович – аспирант кафедры «Мосты и тоннели» Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), Москва, Россия.

Абсолютное большинство расчётов балочных, вантовых и экстрадозных мостов производится с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Метод этот основан на разбиении рассчитываемой конструкции на некоторое число малых, но конечных по размерам элементов – конечных элементов (КЭ) и замене дифференциальных уравнений, описывающих ее напряженно-деформированное состояние системой алгебраических линейных уравнений.

Несмотря на свои широкие возможности, МКЭ обладает рядом недостатков [1, с. 39]:

- 1) Для каждого конечного элемента нужно составлять свою матрицу жёсткости.
- 2) Распределенные нагрузки необходимо заменять эквивалентными обобщенными узловыми силами.
- 3) Сосредоточенные силы нужно прикладывать в узлах.
- 4) Приходится проводить дополнительные расчёты для получения значений изгибающего момента и поперечной силы на границах конечного элемента.
- 5) Необходимо разбивать конструкцию на мелкие конечные элементы с целью обеспечения точности расчёта.

В случае, если рассчитываемую конструкцию можно заменить стержневой системой, данные недостатки можно устранить. Для этого следует получить систему линейных уравнений, описывающую конечный элемент, при помощи интегрального преобразования Фурье, финитных обобщенных функций [4, 6] и теоремы Винера–Пэли–Шварца. Подробности метода представлены в диссертации Е. Н. Курбацкого [5].

В своей работе Е. Н. Курбацкий использовал метод при построении конечного элемента для балки на упругом основании без учёта продольной силы и поперечного сдвига.

В статье рассмотрен пример нахождения типового конечного элемента железобетонной балки пролетного строения моста:

- с учётом продольной силы и влияния сдвига;
- без учёта продольной силы.

I.

Получим систему уравнений, описывающую конечный элемент, изображенный на рис. 1. Для этого необходимо использовать дифференциальное уравнение балки Тимошенко, которое учитывает влияние продольной силы и сдвига на прогиб [5]:

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} + P_i \frac{d^2 u}{dx^2} = q(x) + \frac{k}{GA} EI \frac{d^3 Q_x}{dx^3}, \quad (1)$$

где G – модуль деформации;

A – площадь поперечного сечения;

k – безразмерный коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения [7]. Для прямоугольного сечения:

$$k = \frac{12 + 11\nu}{10(1 + \nu)}. \quad (2)$$

Уравнение (1) следует представить в финитных обобщенных функциях. Для этого

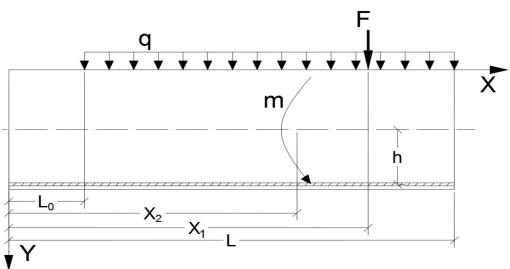


Рис. 1.

запишем функцию прогиба и функцию поперечной силы:

$$U(x) = u(x)[H(x) - H(x-l)]; \quad (3)$$

$$\bar{Q}(x) = Q(x)[H(x) - H(x-l)], \quad (4)$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда.

Тогда уравнение (1) принимает следующий вид [2, 3]:

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 U}{dx^4} + P_i \frac{d^2 U}{dx^2} = & EI \frac{d^4 u}{dx^4} [H(x) - H(x-l)] + \\ & + P_i \frac{d^2 u}{dx^2} [H(x) - H(x-l)] - \\ & - EIn \frac{d^3 Q_x}{dx^3} [H(x) - H(x-l)] + Q(x)\delta(x) - \\ & - Q(x)\delta(x-l) + M(x)\delta'(x) - M(x)\delta'(x-l) + \\ & + EI\phi(x)\delta''(x) - EI\phi(x)\delta''(x-l) + \\ & + EIl u(x)\delta'''(x) - EIl u(x)\delta'''(x-l) + \\ & + P(\phi(x)\delta(x) - \phi(x)\delta(x-l) + \\ & + u(x)\delta'(x) - u(x)\delta'(x-l)) - \\ & - EIn(Q(x)\delta'(x) - Q(x)\delta'(x-l) + \\ & + Q'(x)\delta'(x) - Q'(x)\delta'(x-l)), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{где } n = \frac{k}{GA}. \quad (6)$$

В уравнении (5) используется свойство дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-t)dx = f(t). \quad (7)$$

Воздействие преднапрягаемой арматуры на балку представим в виде изгибающих моментов m , приложенных в точке обрыва арматуры и продольной сжимающей силы P .

Обозначим правую часть уравнения (5), представляющую собой обобщенную нагрузку $S(x)$, а $\frac{P_i}{EI} = K_i^2$, тогда:

$$\frac{d^4 U}{dx^4} + K_i^2 \frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{S(x)}{EI}. \quad (8)$$

Применим преобразование Фурье к обеим частям уравнения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d^4 U}{dx^4} + K_i^2 \frac{d^2 U}{dx^2} \right] e^{inx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(x)}{EI} e^{inx} dx. \quad (9)$$

Получим [2]:

$$\tilde{U}(v)[v^4 - K^2 v^2] = \frac{\tilde{S}(v)}{EI}, \quad (10)$$

где $\tilde{U}(v)$ – изображение Фурье функции $U(x)$;

$\tilde{S}(v)$ – изображение Фурье обобщенной нагрузки $S(x)$;





v – параметр преобразования Фурье.

Для составления системы уравнений рассматриваемого нами конечного элемента надо найти изображение Фурье обобщенной нагрузки [2, 3]:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(v) = & q \left(\frac{e^{ivl} - e^{ivl_0}}{iv} \right) + Fe^{ivx_1} + m(-iv)e^{ivx_2} + \\ & + Q(0) - Q(l)e^{ivl} + M(0)(-iv) - M(l)(-iv)e^{ivl} + \\ & + EI\phi(0)(-iv)^2 - EI\phi(l)(-iv)^2e^{ivl} + EIU(0)(-iv)^3 - \\ & - EIU(l)(-iv)^3e^{ivl} + P_1(\phi(0) - \phi(l)e^{ivl} + \\ & + u(0)(-iv) - u(l)(-iv)e^{ivl}) - nEI(Q(l)v^2e^{ivl} - \\ & - Q(0)v^2 + qiv(e^{ivl} - e^{ivl_0}) + \frac{F}{a}iv(e^{iv(x_1+a)} - e^{iv(x_1-a)})). \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку в данном методе учитывается влияние сдвига, то сосредоточенные силы следует представить распределенными нагрузками, действующими в окрестностях точек приложения соответствующих сосредоточенных сил. Длину участков принимают равной половине высоты сечения балки на данном участке. Это необходимо делать только в том слагаемом уравнения (11), которое отвечает за учёт сдвига под действием сосредоточенной силы, а именно:

$$\frac{F}{a}iv(e^{iv(x_1+a)} - e^{iv(x_1-a)}). \quad (12)$$

Из уравнения (10) получим:

$$\tilde{U}(v) = \frac{1}{EI} \frac{\tilde{S}(v)}{v^4 - K^2v^2}. \quad (13)$$

Теорема Винера–Пэли–Шварца для обобщенных функций позволяет найти неизвестные, поскольку, согласно ей, функция $U(v)$ должна быть целой и, следовательно, числитель, представляющий собой сумму целых функций, будет содержать в себе нули знаменателя [4, 6].

Должны выполняться условия:

$$S(v_j) = 0, j = 1, 3, 4; \quad (14)$$

$$S'(v_j) = 0, j = 2, \quad (15)$$

где v_j – корни выражения

$$v^4 - K^2v^2 = 0. \quad (16)$$

Найдем эти корни (рис. 2):

$$v_{1,2} = 0, v_3 = K, v_4 = -K. \quad (17)$$

Подставляя найденные корни в уравнение (11), получим систему, состоящую из четырех уравнений и описывающую один конечный элемент, изображенный на рис. 1:

$$\begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & C_{1,4} & C_{1,5} & C_{1,6} & C_{1,7} & C_{1,8} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & C_{2,4} & C_{2,5} & C_{2,6} & C_{2,7} & C_{2,8} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & C_{3,4} & C_{3,5} & C_{3,6} & C_{3,7} & C_{3,8} \\ C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} & C_{4,5} & C_{4,6} & C_{4,7} & C_{4,8} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q(0) \\ Q(l) \\ M(0) \\ M(l) \\ \phi(0) \\ \phi(l) \\ u(0) \\ u(l) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & G_{1,3} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & G_{2,3} \\ G_{3,1} & G_{3,2} & G_{3,3} \\ G_{4,1} & G_{4,2} & G_{4,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ F \\ m \end{bmatrix}; \quad (18)$$

$$C_{1,1} = 1 + nEIv_j^2$$

$$C_{2,1} = 2nEIv_j$$

$$C_{1,2} = -e^{ivl} - nEIv_j^2e^{ivl}$$

$$C_{2,2} = -ile^{ivl} - 2nEIv_je^{ivl} - nEIv_j^2ile^{ivl}$$

$$C_{1,3} = -iv$$

$$C_{2,3} = -i$$

$$C_{1,4} = ive^{ivl}$$

$$C_{2,4} = ie^{ivl} - lve^{ivl}$$

$$C_{1,5} = -EIv^2 + P$$

$$C_{2,5} = -2EIv$$

$$C_{1,6} = EIv^2e^{ivl} - Pe^{ivl}$$

$$C_{2,6} = 2EIve^{ivl} + EIv^2ile^{ivl} - Pile^{ivl}$$

$$C_{1,7} = Eliv^3 - Piv$$

$$C_{1,7} = 3Eliv^2 - Pi$$

$$C_{1,8} = -Eliv^3e^{ivl} + Pive^{ivl}$$

$$C_{1,8} = -3Eliv^2e^{ivl} + Ellv^3e^{ivl} + Pie^{ivl} - Plve^{ivl}$$

$$G_{1,1} = \left(\frac{e^{ivl} - e^{ivl_0}}{iv} \right) + nEIiv(e^{ivl} - e^{ivl_0})$$

$$G_{2,1} = i \frac{e^{ivl} - e^{ivl_0}}{v^2} - i \frac{ile^{ivl} - il_0e^{ivl_0}}{v} + nEI(ie^{ivl} - lve^{ivl} - ie^{ivl_0} + l_0ve^{ivl_0}) \quad (19)$$

$$G_{1,2} = e^{ivx_1}$$

$$G_{2,2} = ix_1e^{ivx_1}$$

$$G_{1,3} = -ive^{ivx_2}$$

$$G_{2,3} = -ie^{ivx_2} + vx_2e^{ivx_2}.$$

Различие между первым, третьим и четвертым уравнениями состоит только в множителе v_j .

Поскольку корни $v_{1,2}$ всегда равны нулю, то надо вместо множителя при q записы-

вать (20) для первого уравнения и (21) – для второго:

$$\lim_{v \rightarrow 0} (q \frac{e^{ivl} - e^{ivl_0}}{iv}) = q(l - l_0); \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 0} (qi \frac{e^{ivl} - e^{ivl_0}}{v^2} - qi \frac{ile^{ivl} - il_0e^{ivl_0}}{v}) = \\ = qi(\frac{l^2}{2} - \frac{l_0^2}{2}). \end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, система уравнений, описывающая один конечный элемент, имеет вид:

$$CU = - GN. \tag{22}$$

Сравним результаты расчёта балки, полученные с использованием программного комплекса Midas Civil, и данного метода. В качестве примера рассмотрим железобетонную преднапрягаемую балку длиной 50 м прямоугольного сечения 2х0,3 м на двух опорах, загруженную рас-
пределенной нагрузкой интенсивностью $q = 1 \text{ т/м}$ и сосредоточенной силой $F = 10 \text{ т}$, приложенной на расстоянии $x_1 = 0,25L$ от края балки.

На рис. 3 ось ординат соответствует расхождению в расчётах, выраженному в процентах, а ось абсцисс – усилию в продольной преднапрягаемой арматуре, выраженному в тоннах. В случае, если прогиб балки стремится к нулю, расхождение достигает значительных величин. На графике это видно на участке, где продольная сила 325 т. Однако следует учитывать, что во всех остальных случаях, когда прогиб составляет $u = L/2500 \div L/400$, расхождение оказывается не более полу-процента, что позволяет получать точные решения при расчёте реальных конструк-

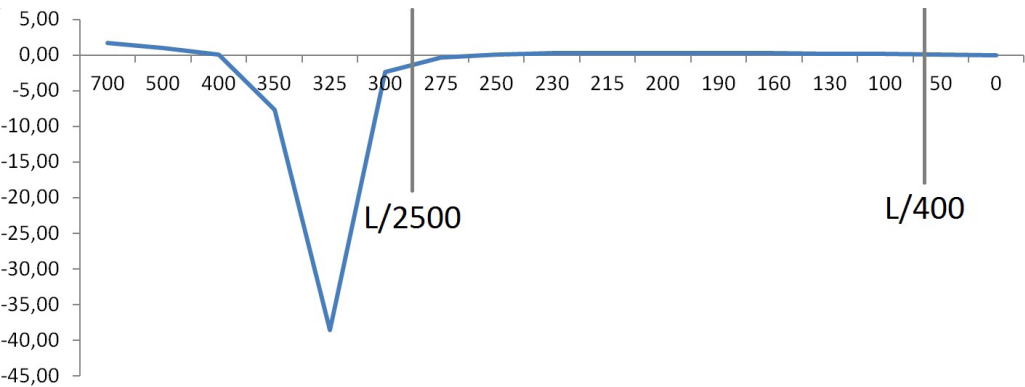


Рис. 3.

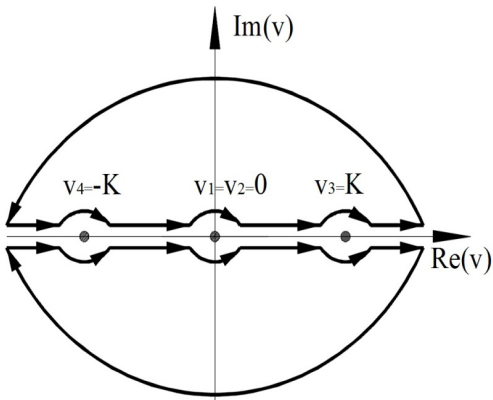


Рис. 2.

ций. Кроме того, следует отметить, что расхождение в изгибающем моменте и поперечной силе при любых значениях продольной силы дает ошибку менее процента.

II.

Когда нет необходимости учитывать продольную силу, система уравнений принимает значительно более простой вид.

Дифференциальное уравнение прогиба балки:

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} = q(x) + \frac{k}{GA} EI \frac{d^3 Q_x}{dx^3}. \tag{23}$$

После преобразования Фурье получим:

$$\tilde{U}(v)[v^4] = \frac{\tilde{S}(v)}{EI}; \tag{24}$$

$$\tilde{U}(v) = \frac{1}{EI} \frac{\tilde{S}(v)}{v^4}; \tag{25}$$

$$v^4 = 0. \tag{26}$$

Изображение Фурье обобщенной нагрузки (27):





$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -il & -i & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2nEI & l^2 - 2nEI & 0 & -2l & -2EI & 2EI & 0 & 0 \\ 0 & il^3 - 6nEIil & 0 & -3il^2 & 0 & 6EIil & 6Eli & -6Eli \end{bmatrix}; \quad (30)$$

$$G = \begin{bmatrix} (1-l_0) & 1 & 0 \\ i(\frac{l^2}{2} - \frac{l_0^2}{2}) & ix_1 & -i \\ (-\frac{l^3}{3} + \frac{l_0^3}{3}) - 2nEI(1-l_0) & -x_1^2 & 2x_2 \\ i(-\frac{l^4}{4} + \frac{l_0^4}{4}) - 3inEI(l^2 - l_0^2) & -ix_1^3 & 3ix_2^2 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}(v) = & q(\frac{e^{ivl} - 1}{iv}) + Fe^{ivx_1} + m(-iv)e^{ivx_2} + \\ & + Q(0) - Q(l)e^{ivl} + M(0)(-iv) - M(l)(-iv)e^{ivl} + \\ & + EI\phi(0)(-iv)^2 - EI\phi(l)(-iv)^2 e^{ivl} + \\ & + Elu(0)(-iv)^3 - Elu(l)(-iv)^3 e^{ivl} - nEI(Q(l)v^2 e^{ivl} - \\ & - Q(0)v^2 + qiv(e^{ivl} - 1)). \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{Найдем корни уравнения:} \quad v_{1,2,3,4} = 0. \quad (28)$$

Должны выполняться условия:

$$\tilde{S}(v_1) = 0, \quad \dot{\tilde{S}}(v_2) = 0, \quad \ddot{\tilde{S}}(v_3) = 0, \quad \ddot{\tilde{S}}(v_4) = 0. \quad (29)$$

Матрицы C и G принимают следующий вид: (30), (31).

Данная модель удобна прежде всего тем, что нет надобности каждый раз подставлять в матрицы C и G значения $v_{1,2,3,4} = 0$, как в системе уравнений (18). Преимуществом модели является и то, что матрица C получается разреженной.

ВЫВОДЫ

1. Применение полученных систем уравнений при расчёте балочных, вантовых и экстрадозных мостов позволяет задавать любые виды нагрузок без необходимости замены их эквивалентными нагрузками.

2. Используемый метод не требует дополнительного разбиения конструкции на конечные элементы с целью получения точного решения в случае, если момент инерции постоянен.

3. Матрица C — эквивалент матрицы жёсткости в методе конечных элементов

неизменна для всех конечных элементов в случае, когда нет продольной нагрузки. Если же её учёт необходим, то в матрицу нужно подставить значения найденных корней уравнения

$$v_{1,2} = 0, v_3 = \sqrt{\frac{P_i}{EI}}, v_4 = -\sqrt{\frac{P_i}{EI}}.$$

4. В методе построения системы линейных уравнений, ориентированной на конечный элемент в стержневой системе, за неизвестные принимаются перемещение, угол поворота сечения, изгибающий момент и поперечная сила на концах конечного элемента. Это позволяет сразу найти точное значение данных переменных без необходимости проведения дополнительных расчётов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carroll W. F. A primer for finite elements in elastic structures / Carroll W. F. Weaver & Johnston. — 1998. — P. 512.
2. Dean G. D. Advanced Engineering Mathematics / CRC Press. — 1997. — P. 656.
3. Osgood B. The Fourier Transform and its Applications / Stanford University. — 2009. — P. 428.
4. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: 1979. — 320 с.
5. Курбацкий Е. Н. Метод решения задач строительной механики и теории упругости, основанный на свойствах изображений Фурье финитных функций / Дис... док. техн. наук. — М., 1995. — 205 с.
6. Лазарян В. А., Конашенко С. И. Обобщенные функции в задачах механики. — Киев: Наукова думка, 1974. — 189 с.
7. Тимошенко С. П. Прочность и колебания элементов конструкций. — М.: Наука, 1975. — 704 с. ●

Координаты автора: **Косауров А. П.** — artkp14@mail.ru.

Статья поступила в редакцию 14.03.2016, принята к публикации 16.06.2016.