УДК 625.12.625.14

К методу оценки состояния железнодорожного полотна

Константин ВОЛОСОВ
Konstantin A. VOLOSOV

Сергей ВАКУЛЕНКО
Sergey P. VAKULENKO

Наталья ВОЛОСОВА
Natalia K. VOLOSOVA

***Вакуленко Сергей Петрович** – кандидат технических наук, профессор, директор ИУИТ Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), Москва, Россия.*
***Волосов Константин Александрович** – доктор физико-математических наук, профессор МИИТ, Москва, Россия.*
***Волосова Наталья Константиновна** – студентка МИИТ, Москва, Россия.*

On Estimation of Railway Track State
(текст статьи на англ. яз. – English text of the article – p. 30)

Построение аппаратного комплекса диагностики железнодорожного пути на основе анализа динамических процессов при движении поездного состава в РФ не имеет ныне альтернативы. Аналогичные методы давно используются при эксплуатации летательных аппаратов и в других областях техники и машиностроения, медико-биологической сфере. Возможность упростить расчеты (провести их быстро и недорого) модельных задач позволяют изложенные в статье дополнения к теории основных моделей «балки Тимошенко» в разных ситуациях. Неоднородная система линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка точно приводится к последовательности двух вложенных классически смешанных задач – линейного неоднородного гиперболического уравнения и неоднородного уравнения Клейн-Гордона-Фока. Показано, что система имеет два масштаба (две базовые частоты). Объяснён эффект аномально быстрой осцилляции колебаний. Предложен полуаналитический – численный метод, позволяющий сравнить эффекты, вызванные различными краевыми условиями.

Ключевые слова: диагностика железнодорожного пути, принципы построения системы, балка Тимошенко, уравнения с частными производными, аномально быстрая осцилляция колебаний, сравнение эффектов.

В связи с развитием скоростных железнодорожных перевозок приобрело особое значение создание и функционирование высокотехнологичного комплекса контроля качества состояния пути непосредственно с движущегося состава. Теоретические основы такого метода контроля излагаются в работах [1–5] и цитируемых в них научных трудах. Экономический эффект от эксплуатации такого комплекса в РФ настолько велик, что в настоящий момент его трудно оценить. Затраты на проведение мониторинга за состоянием железнодорожного пути с подвижного состава несоизмеримы с затратами собственника путей на ликвидацию последствий схода с рельсов подвижного состава.

Разные методы диагностики трудно выявляемых дефектов должны не конкурировать, а дополнять друг друга. Методика и основы анализа разных аспектов интеграции такого комплекса в единую транспортную систему должна быть изложена в отдельной статье на базе работы [6].

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Основная наша цель – выявить неизвестные ранее математические свойства основных теоретических моделей балок (шпал), играющих большую роль в расчетах, связанных с анализом спектра колебаний при прохождении по рельсам подвижного состава, акцентировать внимание на эффекты в спектрах колебаний, которые указывают на появление трудно выявляемых дефектов, и изложить соображения авторов о принципах построения системы контроля.

Замечание 1. *Отметим, что опыт компьютерной обработки и анализа крупных объемов динамических данных со сложной трехмерной внутренней структурой накапливается, например, при применении различных видов томографии мозга, обработке данных нейровизуализации и биоинформатики в медико-биологической сфере. При этом используются методы математической статистики и сравнение с эталонами, что приводит к успеху. Здесь много схожих черт с нашей проблемой, хотя в ней исследуются волны и колебания в другом частотном диапазоне. В обоих случаях фигурирует априорная информация о строении объектов геометрии, физических, химических, биологических свойствах, которые играют большую роль.*

Замечание 2. *Известный математик, университетский коллега А. С. Братусь высказал поддержку идеи создания комплекса, осуществляющего слежение за состоянием пути с подвижного состава, на основе имеющихся в данный момент в нашем распоряжении технических средств, высоких технологий, вычислительных систем, системы ГЛОНАСС в следующей форме: «Математические расчеты течения жидкости в разветвленных сложных трубопроводах, широком диапазоне изменения температур и давлений по-прежнему остается сложной задачей. Привлечение для численных расчетов суперкомпьютеров и методов многопотоковой обработки данных требует больших затрат сил, энергетических и финансовых ресурсов». Не без самоиронии ученый замечает, что «если бы люди ждали, когда математики докажут все свои теоремы, связанные с возникающими задачами, то и водопровода сегодня не было бы...»*

Задача выявления дефектов и локализации их в пространстве, которые являются причиной изменений в спектре продольных, вертикальных и поперечных колебаний, возникающих при прохождении по рельсам подвижного состава, относятся в математике к классу «обратных». Многомерные «прямые» краевые задачи, с различными многообразными вариантами постановки краевых условий и различных распределений в пространстве сил, очень сложные. «Обратные» задачи такой сложности в настоящее время нет возможности решить. С нашей точки зрения, можно ограничиться расчетом одномерных, более простых «прямых» задач. Это можно сделать быстро и недорого на стандартном оборудовании. Математическое моделирование в этом случае позволяет выявить основные эффекты и получить подсказки, с помощью которых можно сделать вывод о появлении трудно выявляемых дефектов и локализовать их в пространстве, оценить степень опасности эксплуатации данного участка железнодорожного пути. Своевременное обнаружение дефектов помогает избежать аварий, утраты имущества, не говоря уже о потере здоровья и жизни людей.

Цитированные в данной статье научные публикации связаны с анализом моделей балок, которые используются в работах по железнодорожной тематике. Их можно условно, полагаем, разделить на две большие части. Наше выделение двух циклов объясняется тем, что в первом цикле шпалы рассматриваются как балки, лежащие на балласте, а рельс моделируется силой, приложенной в точках. Во втором цикле как балка рассматривается рельс, а шпалы моделируются как силы, приложенные в точках. Этот цикл затронут нами в пункте 5.

В первом цикле публикаций, указанных в библиографии статей [2, 4, 5], приведены численные исследования динамики взаимодействия состава с шпалами, которые рассматриваются как балки. Краевые условия разного типа и функции $f(x, t)$ – источников, которые позволяют моделировать разные ситуации разрушения полотна, неравномерность распределения напряжений и динамических характеристик в шпалах, то есть возникающие дополнительные поперечные силы. В них показано, что наличие пустот под шпалами и разрушение полотна существенно влияют на распределение динамических нагрузок, а следовательно, и на спектр колебаний.

Многие расчеты, как наши, так и других авторов, подтверждают, что возникновение дефекта ведет к появлению дополнительных резонансов и дисперсия в окрестности главных максимумов увеличивается. Подобные этому повторяющиеся признаки могут стать основой метода выявления трудно распознаваемых дефектов, они позволяют локализовать участок пути за счет сравнения фиксируемого спектра поперечных, вертикальных и продольных колебаний с соответствующими эталонными спектрами, полученными ранее на исправном участке.

В качестве примера один из простых спектров колебаний и зависимость ускорения от частоты и наличия различных дефектов приведены на рис. 1. Нижняя кривая на нём отражает идеальную ситуацию, когда отсутствуют дефекты. Анализ этих и других подобных кривых позволяет сделать вывод, что существует два главных, базовых резонанса, появление которых объясняется в данной работе существованием нескольких вычисленных ниже базовых частот. Итак, существует два резонанса. Первый резонанс значительно сильнее выражен. Верхняя кривая соответствует случаю, когда имеются две подвешенные шпалы. Появляется дополнительный резонанс и дисперсия в окрестности главных максимумов увеличивается. Суммируя результаты других вариантов численного математического моделирования, можно сделать вывод, что обнаружен важный эффект: с увеличением числа шпал, «висящих» на рельсе, то есть лишенных опоры, дисперсия в окрестности частот главных резонансов увеличивается и появляются дополнительные резонансы на более высоких частотах.

Аналогичные кривые спектров при прочих дефектах имеются в других упоминавшихся работах.

Сложность проблемы заключается в том, что эффекты от разных дефектов нелинейно отражаются в спекторе колебаний и нет им однозначного соответствия. Разные дефекты могут вызывать похожие максимумы. Но можно оценить степень опасности дефекта по интегральным оценкам спектра в сравнении с эталонным спектром на этом же участке.

Замечание 3. *При численном моделировании специалистами используются неявные разностные схемы и вариационный метод Ритца для краевых задач. При аналитическом построении решения методом разложения в ряды Фурье [7] авторы сетуют на то, что для расчета варианта решения с достаточной точностью необходимо суммировать 32000 слагаемых. То есть ряд Фурье сходится медленно и расчеты идут дольше.*

Замечание 4. *Вычислительные эксперименты по решению прямых многомерных задач были описаны в ряде указанных работ и в цитируемых в них статьях. Большое разнообразие свойств, геологических, географических, связанных с инфраструктурой окружающего пространства и как следствие многообразие возможных краевых условий делает динамические математические «прямые» модели малоэффективными. Решение «обратных» задач такой сложности является еще более трудной проблемой.*

Замечание 5. *Новым элементом в данной работе, с точки зрения математической физики и механики балок, является факторизация уравнений с частными производными модели «балки Тимошенко». Если читатель знает о работах, где реализована подобная факторизация, то просим сообщить авторам. Молодое поколение, не зная аналитических операторных методов, сразу бросается к компьютеру.*

Процедура факторизации дает возможность объединить большое количество задач, которые отличаются значениями параметров (из-за различия значений физических констант) и рядом слагаемых в них, величину и влияние которых на решение можно регулировать с помощью безразмерных параметров и краевых условий. Формулы получаются компактные, легко обозримые (всего шесть интегральных слагаемых) и позволяющие сравнить влияние различных краевых условий. Получение численных результатов сводится к вычислению интегралов с помощью классических формул.

В данной работе доказано, что модель балки, методом факторизации [12] приводится к последовательности классических задач для неоднородного линейного гипер-

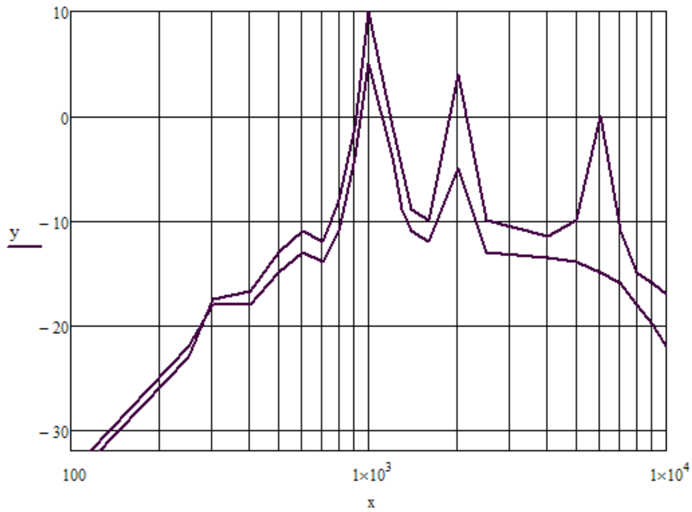

Рис. 1. Ускорение рельса (db/g) от частоты колебаний (Гц).

болического уравнения (ЛГУсЧП) и неоднородного линейного уравнения Клейна-Гордона-Фока (ЛурКГФ), и показано, что в задаче имеют место два базовых масштаба, две характерные скорости, две базовые частоты.

Задачи для неоднородного линейного гиперболического уравнения и неоднородного линейного уравнения Клейна-Гордона-Фока изучены в цикле работ В. М. Бабича [9] и других учёных, ссылки на работы которых приведены в справочниках [10, 11]. Математик Адамара «предложил замечательно простую и точную конструкцию (фундаментальное решение)» [9, с. 1]. Нами найдена возможность использовать конструкции Адамара в модели «балки Тимошенко», т.е. появилась возможность решать задачи Коши для неоднородных уравнений в частных производных второго порядка. Бабич [9] рассмотрел случай движущихся с переменной скоростью источников высокочастотных колебаний для уравнений ЛГУсЧП и ЛурКГФ, а также влияние большого параметра на колебания в функции источника – диссипации последнего уравнения. Фундаментальные решения и функции Грина для большого количества разных классических задач, связанных с ЛГУсЧП и ЛурКГФ, приведены в [10–11].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения, описывающие колебания в модели «балки Тимошенко», имеют вид системы [2, с. 15–38]:

$$
\begin{gathered}
E\,I\frac{\partial^2\vartheta(x,t)}{\partial x^2}+k\,AG\left[\frac{\partial Z(x,t)}{\partial x}-\vartheta(x,t)\right]-\\
-mr^2\frac{\partial^2\vartheta(x,t)}{\partial t^2}+P\,\vartheta(x,t)=0\,,\\
\frac{\partial}{\partial x}\left\{k\,AG\left[\frac{\partial Z(x,t)}{\partial x}-\vartheta(x,t)\right]\right\}-\\
-m\frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial t^2}=f(x,t).
\end{gathered}
\qquad (1)
$$

Здесь $Z(x, t)$, $\Theta(x, t)$ – функции отклонения срединной линии и угла поворота сечения соответственно;

E – модуль упругости на сжатие [$Н/м^2$];

I – приведенный момент инерции сечения [$м^4$];

k – безразмерный коэффициент Тимошенко;

A – площадь поперечного сечения [$м^2$];

G – модуль упругости на сдвиг [$Н/м^2$];

$m = I\rho/r^2$ – распределенная плотность;

ρ – удельная плотность [$кг/м$],

P – продольная сила, приложенная к балке.

Отметим, что между размерностями функций $Z(x, t)$, $\Theta(x, t)$ справедливо соотношение $[\Theta(x, t)] = [Z(x, t)]\ /[м]$. Для системы (1) в цитируемых работах рассматриваются смешанные краевые задачи в разных ситуациях.

3. РАСЩЕПЛЕНИЕ СИСТЕМЫ (1)

Покажем, что смешанные задачи для системы (1) имеют точное решение.

Теорема 1. Пусть дана математическая модель «балки Тимошенко» (1). Тогда одна из функций явно выражается через другую:

$$Z(x,t)=\begin{bmatrix}-h(t)+\left[k\,AG-P\right]\Phi(x,t)+\\ +mr^2\dfrac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial t^2}-E\,I\dfrac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial x^2}\end{bmatrix}/(k\,AG), \tag{2}$$

$$\vartheta(x,t)=\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x}.$$

Здесь $h(t)$ – произвольная непрерывно-дифференцируемая функция.

Для определения функции $\Phi(x,t)$ надо решить задачу с краевыми условиями и начальными условиями для неоднородного линейного уравнения четвертого порядка с частными производными:

$$\begin{aligned}&m[k\,AG-P]\frac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial t^2}+k\,AG\,P\frac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial x^2}+\\ &+m^2r^2\frac{\partial^4\Phi(x,t)}{\partial t^4}-m(E\,I+k\,AGr^2)\frac{\partial^4\Phi(x,t)}{\partial x^2\partial t^2}+\\ &+k\,AG\,E\,I\frac{\partial^4\Phi(x,t)}{\partial x^4}=F_0(x,t).\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $F_0(x,t)=-k\,AG\,(mh^{''}(t)+f(x,t))$.

Доказательство. Краевые условия для системы (1) могут быть первого, второго или третьего рода. Так как первое уравнение системы (1) неоднородное, а функция $f(x,t)$ содержит сумму обобщенных дельта-функций Дирака в неподвижных и подвижных точках $x=v_0(t)t$, то процедура вывода уравнения четвертого порядка отличается от вывода в случае однородного второго уравнения системы (1).

Второе уравнение нельзя дифференцировать. Продифференцируем первое уравнение системы (1) по переменной x и выразим вторую переменную $\dfrac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial x^2}$. Сделаем замену $\vartheta(x,t)=\dfrac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x}$ и получим

$$\begin{aligned}&k\,A\,G\frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial x^2}+[P-k\,AG]\frac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial x^2}-\\ &-mr^2\frac{\partial^4\Phi(\chi,\tau)}{\partial x^2\partial t^2}+E\,I\frac{\partial^4\Phi(x,t)}{\partial x^4}=0.\end{aligned} \tag{4}$$

Интегрируем (4) дважды по переменной x и получим формулу (2).

Функция $h(t)$ возникает при интегрировании. Одну из констант интегрирования положим равной нулю. Таким образом, одна из функций в системе (1) выражена через другую – формулу (2). После дифференцирования (2) по переменной t и подстановки во второе уравнение (1) следует уравнение (3).

4. ПРИМЕНЕНИЕ ФАКТОРИЗАЦИИ К УРАВНЕНИЮ (3)

Большой вклад в развитие операторных методов внесли В. П. Маслов, М. В. Карасев, В. Г. Данилов, ссылки на работы которых приведены в [8].

В [8] и цитируемых в них работах содержатся примеры применения метода факторизации в разных задачах.

Целью процедуры факторизации является представление уравнения (3) в виде $L_1\circ\left[\,L_2\;Y(x,t)\right]=F_0(x,t)$.

Конкретные линейные операторы L_1, L_2, $i=1,2$ в случае модели (1) определены ниже.

Проведем процедуру обезразмеривания уравнения (3). Обозначим через $x=x_0\chi$, $t=t_0\tau$ и ψ характерный размер, время и характерное значение функции $\Phi(x,t)$ соответственно. Сделаем замену

$$\Phi(x,t)=\Theta\left(\frac{x}{x_0},\frac{t}{t_0}\right)/\psi\,.$$

Обозначим гиперболический оператор Даламбера с параметром μ, который определяет базовую скорость волн и базовую частоту:

$$\Pi_\mu=\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}. \tag{5}$$

Из последующего анализа выясняется, что существуют два безразмерных параметра

$$\mathrm{a}^2=\frac{E\,t_0^2}{x_0^2\,\rho},\;\mu^2=\frac{AGk\,r^2\,t_0^2}{I\,x_0^2\,\rho}. \tag{6}$$

Теорема 2. Пусть дано уравнение (3) и определены параметры (6). Тогда для построения решения уравнения в безразмерном виде необходимо решить последовательно две стандартные смешанные задачи, а именно: для линейного гиперболического уравнения с частными производными

$$\begin{aligned}&\Pi_a\;Y(\chi,\tau)=F_1(\chi,\tau),\\ &F_1(\chi,\tau)=M_0\,(a^2-\mu^2)\,\psi\,[t_0^2\,E\,I\,h^{''}(t_0\tau)+\\ &+(a\,r\,x_0)^2\;f(x_0\chi,t_0\tau)]/(E\,I\,\mu^2)\end{aligned} \tag{7}$$

и смешанную задачу для уравнения Клейна-Гордона-Фока

$$\Pi_\mu\, \Theta(\chi,\tau) - x_0^2\, \mu^4\, \Theta(\chi,\tau)/(r^2(a^2-\mu^2)) =$$
$$= -x_0^2\, \mu^4\, Y(\chi,\tau)/(M_0\, r^2(a^2-\mu^2)). \qquad (8)$$

Здесь $M_0 = const \neq 0$.

Во втором варианте метод факторизации дает демонстрируемый далее результат.

Теорема 3. Пусть дано уравнение и два безразмерных параметра (6). Тогда для построения решения уравнения (3) в безразмерном виде необходимо решить последовательно две стандартные смешанные задачи, а именно: для уравнения Клейна-Гордона-Фока

$$\Pi_\mu\, Y(\chi,\tau) - x_0^2\, \mu^4\, Y(\chi,\tau)/(r^2(a^2-\mu^2)) =$$
$$= F_2(\chi,\tau),$$
$$F_2(\chi,\tau) = x_0^2\, \mu^4\, c_0\, \psi [E\, I\, t_0^2\, h''(t_0\tau) +$$
$$+ (a\, r\, x_0)^2\, f(x_0\,\chi, t_0\,\tau)]/(a^2\, r^4(\mu^2-a^2)) \qquad (9)$$

и смешанную задачу для линейного гиперболического уравнения

$\Pi_a \Theta(x, \tau) = a^2 r^2 (a^2-\mu^2)\, Y(x, \tau)/(\mu^2 c_0 E\, I)$.(10)

Здесь $c_0 = const \neq 0$.

Доказательство теорем 2, 3. Рассмотрим уравнение Клейна-Гордона-Фока для функции $\Theta(x, \tau)$ с неопределенными постоянными коэффициентами M_0, $c_0\, P$, j_0 Найдем вторую производную по переменной τ:

$$\frac{\partial^2 \Theta(\chi,\tau)}{\partial \tau^2} = c\;\; P\, \frac{\partial^2\, \Theta(\chi,\tau)}{\partial\, \chi^2} -$$
$$- M_0\, \Theta(\chi,\tau) + Y(\chi,\tau)]/\, j_0\, .$$

При этом $Y(x, \tau)$ – функция, которая определяется задачей для уравнения (7) или (9).

После вычисления четвёртых производных от функции $\Phi(x, t) = \Theta(x/x_0, t/t_0)/\psi$ получим

$$\frac{\partial^4\, \Phi(x,t)}{\partial t^4} = \frac{\partial^4\, \Theta(\chi,\tau)}{\partial\, \tau^4} \frac{1}{t_0^4\, \psi},$$
$$\frac{\partial^4\, \Phi(x,t)}{\partial\, x^4} = \frac{\partial^4\, \Theta(\chi,\tau)}{\partial\, \chi^4} \frac{1}{x_0^4\, \psi},$$
$$\frac{\partial^4\, \Phi(x,t)}{\partial\, x^2 \partial t^2} = \frac{\partial^4\, \Theta(\chi,\tau)}{\partial\, \chi^2\, \partial\, \tau^2} \frac{1}{x_0^2 t_0^2\, \psi}.$$

Подставляем в уравнение (3) – и в первом случае (для теоремы 2) имеем

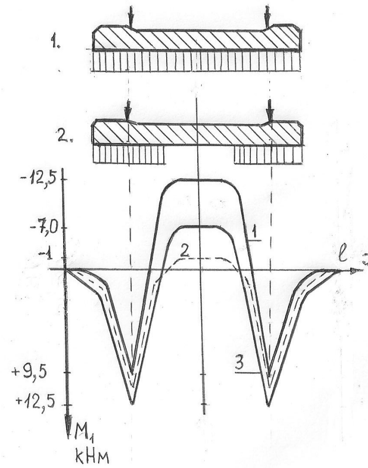

Рис. 2. Варианты реакции изгибного момента шпалы, лежащей на балласте.

$$j_0 = \frac{m c_0\, P\, x_0^2}{k\, A G t_0^2},\; c_0 = \frac{M_0\,(k\, AG\, r^2 - E\, I)}{(k\, AG\, P\, x_0^2)},$$
$$P = \frac{k\, AG\, E\, I}{(E\, I - k\, AG r^2)},\; m = \frac{I\, \rho}{r^2}. \qquad (11)$$

После введения параметров (6) следуют уравнения (7), (8).

Во втором случае (для теоремы 3) получаем

$$j_0 = \frac{m c_0\, P\, r^2\, x_0^2}{E\, I\, t_0^2},\; M_0 = 0,$$
$$P = \frac{k\, AG\; E\, I}{(E\, I - k\, AG r^2)},\; m = \frac{I\, \rho}{r^2}. \qquad (12)$$

После введения параметров (6) следуют уравнения (9), (10).

Далее надо задать краевые и начальные условия и проводить вычисления интегралов свёртки с правой частью и граничными условиями аналитическими и численными методами. Вычисления при значениях констант, относящихся к железнодорожному пути [2, 3], показывают, что отношение параметров (скоростей волн и частот) $\mu\, /\, a > 50$. Коэффициент $a^2 - \mu^2 < 0$.

В $f\,(x_0\chi,\, t_0\tau)$ входят дельта функции Дирака, поэтому интеграл с ними легко вычисляется. Характерен случай, описанный в теореме 2, когда на первом этапе решается смешанная задача (7) меньшим параметром a. Тогда вычисление решения первой задачи дает возможность получить огибающую низкочастотных колебаний. Вычисление интегралов свертки второй задачи (8) «набивает» полученную структуру высокочастотными колебаниями и мало меняет кривую огибающей низкочастотных колебаний. Таким образом, объясняется аналогия с амплитудно модулированной структурой, имеющей две базовые частоты, два масштаба [9].

В [11, с. 260] (пункт 4.1. 2–6) приведены формулы третьей краевой задачи для линейного гиперболического уравнения со скоростью *a* в случае стержня с упруго закрепленными концами с разными коэффициентами жесткости k_1, k_2 и начальными условиями $0 \le \chi \le l$.

Пусть заданы следующие начальные условия:

$$Y(\chi,0)=f_0(\chi),\quad \frac{\partial Y(\chi,\tau)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}=f_1(\chi) \qquad (13)$$

и краевые условия

$$\begin{aligned}&\frac{\partial Y(\chi,\tau)}{\partial\chi}\Big|_{\chi=0}-k_1\,Y(0,\tau)=g_1(\tau),\\ &\frac{\partial Y(\chi,\tau)}{\partial\chi}\Big|_{\chi=l}-k_2\,Y(l,\tau)=g_2(\tau).\end{aligned} \qquad (14)$$

Решение $Y(\chi,\tau)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned}Y(\chi,\tau)=&\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^l f_0(\xi)\,G(\chi,\xi,\tau)\,d\xi+\\ &+\int_0^l f_1(\xi)\,G(\chi,\xi,\tau)\,d\xi+\\ &+\int_0^\tau\int_0^l F_1(\xi,\tau)G(\chi,\xi,\tau-\theta)\,d\xi\,d\theta-\\ &-a^2\int_0^\tau g_1(\tau)G(\chi,0,\tau-\theta)\,d\theta+\\ &+a^2\int_0^\tau g_2(\tau)G(\chi,l,\tau-\theta)\,d\theta,\end{aligned} \qquad (15)$$

а функция Грина – по формуле

$$\begin{aligned}&G(\chi,\xi,\tau)=\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\begin{aligned}&\frac{1}{(\lambda_n\|u_n\|^2)}\sin(\lambda_n\,\chi+\phi_n)\times\\ &\times\sin(\lambda_n\,\xi+\phi_n)\sin(\lambda_n\,a\,\tau)\end{aligned}\right),\\ &\phi_n=\arctan\left(\frac{\lambda_n}{k_1}\right),\ \|u_n\|^2=\\ &=\frac{l}{2}+\left[\frac{(\lambda_n^2+k_1\,k_2)(k_1+k_2)}{2(\lambda_n^2+k_1^2)(\lambda_n^2+k_2^2)}\right],\end{aligned} \qquad (16)$$

где λ_m – положительные корни трансцендентного уравнения $ctg(\lambda l)=(\lambda^2-k_1k_2)/(\lambda(k_1+k_2))$. Главный член выражения для приближенного положительного собственного значения имеет вид

$$\lambda=\frac{\sqrt{k_1+k_2+k_1\,k_2\,l}}{\sqrt{l}}. \qquad (17)$$

С другой стороны, в случае колебания стержня, один конец которого жестко закреплен, а второй свободен, имеем смешанную краевую задачу. В [11, с. 261] приведены формулы для линейного гиперболического уравнения со скоростью *a* в области $0 \le \chi \le l$. Пусть заданы начальные условия (13) и краевые условия

$$\frac{\partial Y(\chi,\tau)}{\partial\chi}\Big|_{\chi=0}=g_1(\tau),\quad \frac{\partial Y(\chi,\tau)}{\partial\chi}\Big|_{\chi=l}=g_2(\tau). \qquad (18)$$

Решение $Y(\chi,\tau)$ определяется по формуле, аналогичной (15), где четвертое слагаемое

$$+a^2\int_0^\tau g_1(\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,\tau-\theta)\right]\Big|_{\xi=0}d\theta.$$

Функция Грина в этом случае имеет вид

$$G(\chi,\xi,\tau)=\frac{2}{l\,a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda_n}\sin(\lambda_n\,\chi)\times\\ &\times\sin(\lambda_n\,\xi)\sin(\lambda_n\,a\,\tau)\end{aligned}\right). \qquad (19)$$

где положительные $\lambda_n=\varpi(2n+1)/(2l)$. Сравнивая последнее выражение с (16), находим очевидное различие в генерируемых частотах.

На рис. 2 приведено распределение ответного изгибного момента монолитной шпалы, лежащей на балласте [5]. Положительное направление оси ординат ориентировано вниз, чтобы привести графики в соответствие с физическим смыслом и изображениями 1 и 2. Первой кривой сплошной, верхней кривой соответствует идеальная опора шпалы без дефекта, при равномерной нагрузке на полотно (изображение 1). Нижней кривой 3 отвечают расчётные проектные значения момента, когда 80% нагрузки распределяются на оба конца шпалы, а середина шпалы лишена опоры. Кривая 2 соответствует изображению 2, когда 100% нагрузки распределяется на оба конца шпалы, а середина шпалы лишена опоры.

Из рис. 2 следует, что максимальный момент имеет место в окрестности крепления шпалы к рельсу и минимум в центре шпалы [5]. Эти данные приводим с целью показать какого вида функции $f_0(\chi), f_1(\chi)$

можно выбирать и выбирались нами в качестве начальных условий при модельных расчётах по формуле (13).

Объясним смысл рис. 3 [5]. Для этого обратим внимание на изображение 2 на рис. 2, где середина шпалы не имеет опоры на балласт. Примем условно эпюру момента правой части опоры шпалы за сто процентов. На рис. 3 кривыми 1, 2 и 3, 4 показано распределение, когда правая часть шпалы имеет опору нуль, 20, 80 и 100 процентов соответственно. Нуль процентов опоры означает, что правая сторона шпала не опирается на полотно, а висит на рельсе. Видно, что различие краевых условий на 20 процентов и более уже существенно меняет характеристики, что сразу отражается на спектре колебаний.

Так как для уравнения задача линейная, то можно разделить при математическом моделировании краевые и начальные условия между составляющими, последовательно решаемыми задачами, например (7) и (8). То есть положить в первой задаче (7) нулевые краевые условия и решать задачу Коши. В этом случае последние два слагаемых в (15) обращаются в нуль. Тогда для уравнения (8) можно положить равными нулю начальные условия и решать краевую задачу по формулам, аналогичным (15), которые приведены в [11, с. 263].

Дополнительный интерес к формулам решения задач для уравнения КГФ возникает, когда безразмерный параметр в функции диссипации (стока) $K^2 = x_0^2\mu^4/(r^2(a^2-\mu^4))>>1$ большой. Вычисления значения K^2 при физических характеристиках, соответствующих обсуждаемой железнодорожной тематике, в уравнениях (8) и (9) показывают, что имеет место именно подобный случай. И тогда реальна *аномально* быстрая осцилляция решений [9, с. 26].

Фундаментальное решение (функция Римана) для уравнения

$$\Pi_\mu\Theta(\chi,\tau)+K^2\Theta(\chi,\tau)=\delta(\chi,\tau) \qquad (20)$$

имеет вид

$$\Theta(\chi,\tau)=\frac{1}{2}J_0(K\sqrt{\tau^2-\chi^2})\theta(\tau^2-\chi^2). \qquad (21)$$

Здесь j_0 – функция Бесселя, $\delta(\chi,\tau)$ – дельта-функция Дирака, Θ – тетта-функция Хевисайда, равная единице при $\tau^2>\chi^2$ и нулю при $\tau^2<\chi^2$. В [9] показано, что расстояние между ближайшими корнями – показатель *быстроты* осцилляций функций. При ограниченных значениях τ и χ и $\tau^2-\chi^2 \geq const > 0$ это расстояние имеет порядок $1/K$, что следует из асимптотики функции Бесселя. Причем уровень осцилляции резко увеличивается в окрестности характеристик $\tau = \pm K$.

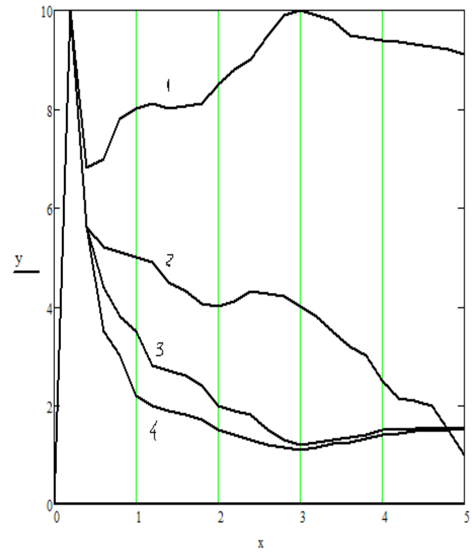

Рис. 3. Распределение динамического момента на левой части шпалы.

В цитируемой работе [9] доказано, что расстояние между соседними корнями на прямой $\tau = \chi$ имеет порядок O ($1/K^2$), что говорит об аномально быстрой осцилляции. Этот эффект присутствует и в обсуждаемой задаче.

5. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КАЧЕНИЯ КОЛЕСА ПО РЕЛЬСУ С ВОЛНООБРАЗНЫМ ИЗНОСОМ

Во втором цикле работ как балка исследователями рассматривается сам железнодорожный рельс с волнообразным износом. Изучается динамика в системе координат, движущейся с *постоянной* скоростью. Отмечается, что ещё одним источником колебаний являются горизонтальные и вертикальные неровности правого и левого рельсов. В «бесшовном» пути места сварки имеют большую твердость и изнашивается меньше, чем сам рельс, при этом создаются трамплины.

В [7] дельта-функция Дирака оценивается в точке, движущейся с постоянной скоростью, потому что для построения решения в этой работе используется переход в соответствующую систему координат и затем решение разлагается в ряды Фурье. Заметим, что на практике обеспечить равномерное движение колесной пары трудно. Смотри замечание 1.

В работе [7] выведено уравнение, описывающее установившиеся вертикальные колебания рельса. Обозначенное в нём через $y(x, t)$ направленное вверх поперечное отклонение рельса, который имеет изгибную жесткость $E\,I$ и поддерживается однородным основанием с жесткостью u и вязкостью r, лежит в основе представленной формулы:

$$E\,I\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}+$$
$$+r\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}+u\;y(x,t)=F(x,t). \qquad (22)$$

В нашем случае функция $F(x, t)$ в отличие от [7] содержит дельта-функцию Дирака, которая задает положение сосредоточенной силы, приложенной в точке $x = v(t)t$, движущейся с переменной скоростью $v(t)$. Решение задачи допускает анализ движения с переменной скоростью. При моделировании можно задавать разные законы изменения скорости и анализировать их влияние на спектр колебаний. Заметим, что в [7] через m обозначена линейная плотность распределенной массы рельса и балласта.

Теорема 4. Пусть дана смешанная задача с краевыми условиями для уравнения (22). Тогда решение имеет вид

$$y(x, t) = Z(x, t)\exp(rt/(2m)), \qquad (23)$$

где функция $Z(x, t)$ является точным решением смешанной задачи для линейного стандартного гиперболического уравнения четвертого порядка

$$m\frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 Z(x,t)}{\partial x^4}+K\;\;Z(x,t)=$$
$$=\exp(-rt/(2\rho))F(x,t). \qquad (24)$$

Здесь $a^2 = E\,I,\ K = (4u\rho-r^2)/(4m^2)$.

Доказательство. В отличие от [7] частота колебаний рельса определяется решением сопряженной задачи на собственные значения λ_m для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка $\phi^{(IV)}(x)-\lambda^4\phi(x) = 0$ с соответствующими граничными условиями [11, с. 533]. Функция Грина имеет вид

$$G(x,\xi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\phi_m(x)\phi_n(\xi)}{\|\phi_n\|^2\sqrt{a^2\lambda_n^4+K}}\sin(t\sqrt{a^2\lambda_n^4+K})\right),$$
$$\phi(x)=C_1\exp(-x\lambda)+C_2\exp(x\lambda)+$$
$$+C_3\cos(x\lambda)+C_4\sin(x\lambda),$$
$$\|\phi_n\|^2=\int_0^l\phi_n^2\,dx= \qquad (25)$$
$$=\frac{l\phi_n^2}{4}+l\left[\phi_n''\right]^2/(4\lambda_n^4)-l\phi_n'(l)\phi_n''''(l)/(2\lambda_n^4).$$

Здесь константы C_i, $i = 1,...,4$ определяются из граничных условий. Норма собственной функции вычисляется по формуле Крылова. Отсюда следует частота колебаний $\sqrt{a^2\lambda_n^4+K}, n=1,2,...$ При значениях ρ = 78 [кг/мм], u = 34 10⁶ [Н/м²], $E\ I$ = 4 10⁶ [Н/м²], r = 2 10⁴[Н с/м²] из [7] получим значение параметра K>600. Следовательно, и в этом случае имеет место эффект аномально быстрой осцилляции.

ВЫВОДЫ

Многие отечественные и зарубежные учёные и практики на разных этапах развития транспортной области внесли существенный вклад в разработку и внедрение локальных методов диагностики дефектов железнодорожного полотна. Сегодня, когда высокие технологии проникают во все сферы жизни, любые локальные и интегральные методы диагностики состояния пути и его компонент должны дополнять друг друга. Интегральный метод, сторонниками введения которого в практику являются авторы данной работы, выявляет трудно выявляемые дефекты или дает информацию об их скрытом существовании и позволяет оценить степень опасности эксплуатации данного участка железнодорожного пути. Если бы такой метод применялся, то тяжелую аварию, подобную аварии в московском метро 15 июля 2014 года, удалось бы предотвратить. Методы исследования деталей, узлов и целых сложных конструкций волнами в различном диапазоне частот давно используют при эксплуатации аппаратов в разных областях техники и машиностроения. В большинстве этих методов присутствует внешний источник колебаний, а в предлагаемом методе в качестве такового выступают колебания с частотами, генерируемыми самим движущимся объектом.

1) Анализ результатов математического моделирования позволяет сделать следующий вывод:

а) дефекты железнодорожного полотна отражаются более или менее явно в одном из спектров вертикальных, продольных или поперечных колебаний в широком диапазоне частот;

б) в окрестности главного и других резонансов наличие дефектов увеличивает дисперсию;

2) На основе этого факта можно построить программно-аппаратный комплекс контроля состояния железнодорожного полотна с подвижного состава.

По нашему мнению, в общих чертах этот комплекс может быть построен следующим образом.

Конкретный перегон железнодорожного пути разбивается на участки (i-1,.., n), учитывающие расположение мостов, переходов, тоннелей и других инженерных сооружений, а также геологическую структуру и другие особенности инфраструктуры, которые могут оказывать влияние на спектр колебаний. На исправном перегоне создается эталонная база спектров вертикальных, продольных или поперечных колебаний с привязкой к местоположению i-го участка с помощью датчиков на рекомендованной специалистами скорости.

На каждом i-м участке выделяется (j = 1,..., m) эталонных контрольных точек, для которых устанавливаются частоты резонанса и рассчитываются их характеристики спектра.

При эксплуатации железнодорожного пути со временем образуются дефекты. При движении состава на данном перегоне проводится запись аналогичных данных. Интервалы времени между проверками должны указать специалисты по эксплуатации. Вычисляются дисперсии в окрестности главного резонанса и сравниваются с эталонными значениями. Данные можно передавать на крупных станциях (возможно использование системы ГЛОНАСС) для детальной обработки с использованием различных методов математической статистики в вычислительных центрах. При превышении критических значений на выявленный, локализованный участок, высылается бригада ремонтников, уточняющих дефекты другими локальными методами диагностики и разрабатывающих план ремонта.

Другие специалисты могут предположить дополнительные сценарии построения такой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Timoshenko S. P. Method of analysis of statical and dynamical stresses in rail / in «Proc. 2nd Int. Congr. for Appl.Mech.» Zurich., 1927, pp. 407–418.

2. Zhu J. Y., Ahmed A. K., Rakheja S., Khajepour A. Development of a vehicle- track model assembly and numerical method for simulation of wheel – rail dynamic interaction due to unsupported sleepers. Vhicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility, 48, V. 12, pp. 1535–1552.

3. Круглов В. М., Хохлов А. А., Саврухин А. В., Неклюдов А. Н. Метод оценки состояния железнодорожного пути // Мир транспорта.– 2012.– № 5.– С. 4–7.

4. Kang Y. S., Yang S. C., Lee H. S., Kim Y. B., Jang S. Y., Kim E. A Study of Track and train Dynamic Behavior of Transithior Zone Between Concrete Slab Track and Ballasted Track. Korea Railroad Research Institute, Uiwang, South Korea, Sampyo E&C, Seoul, Seoul, South Korea. 2007.

5. Sakdirat Kaewenruen, Alex A. Remennikov, Akira Aikawa. A numerical study to evaluate dynamic responses of voided concrate railway steepers to impact loading. Paper N88, Proceeding od Acousties 2011. 2–4 November 2011, Gold Coast, Australia.

6. Вакуленко С. П., Ларин О. Н., Лёвин С. Б. Теоретические аспекты механизмов взаимодействия в транспортных системах // Мир транспорта.– 2014.– № 6.– С. 14–27.

7. Белоцерковский П. М., Пугина Л. В. Качение колеса по рельсу с волнообразным износом // Прикладная математика и механика.– 2008.– Т. 72, вып. 3.– С. 421–430.

8. Danilov V. G., Maslov V. P., Volosov K. A. Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes. Kluver Academic publishers. Dordrecht. Boston. London, 1995.– 316 p.

9. Бабич В. М. Анзац Адамара, его аналоги, обобщения, приложения // Алгебра и анализ.– 1991.– Т. 3, вып. 5.– С. 1–37.

10. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения.– М.: Международная программа образования,1996.– 496 с.

11. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики.– М.: Физико-математическая литература, 2001.– 575 с.

12. Волосова Н. К., Вакуленко С. П., Волосов К. А. К теории метода контроля качества состояния железнодорожного пути с движущегося состава. On the theory of method of quality control of the railroad track from a moving train. The Internatopnal conference on Quasilinear Equations, Inverse Problems and Their Applications. Moscow Institute of Pfysical and Technjlogy, Dolgoprudny. 30.11–2.12. 2015.

Координаты авторов: **Вакуленко С. П.** – k–gdsu@mail.ru, **Волосов К. А.**, **Волосова Н. К.** – konstantinvolosov@yandex.ru.

Статья поступила в редакцию 30.12.2015, принята к публикации 26.03.2016.

МИР ТРАНСПОРТА, том 14, № 3, С. 20–35 (2016)

Вакуленко С. П., Волосов К. А., Волосова Н. К. К методу оценки состояния железнодорожного полотна