УДК 656.001.57
DOI: https://doi.org/10.30932/1992-3252-2020-18-06-20

Развитие теории макросистем как необходимое условие повышения качества транспортного моделирования

Агуреев Игорь Евгеньевич *– Тульский государственный университет (ТулГУ), Тула, Россия*.*

Игорь АГУРЕЕВ

Рассматриваются вопросы развития теории транспортных макросистем с учётом основных достижений, полученных в работах А. Дж. Вильсона, Ю. С. Попкова, А. В. Гасникова, Е. В. Гасниковой и других авторов. Транспортная макросистема считается сложной многокомпонентной системой, для которой применимы термодинамические аналогии (состояние равновесия, информационная энтропия как функция параметров состояния, наличие основных феноменологических схем заполнения состояний элементами и т.д.). Для дальнейшего развития теории развития технологий транспортного моделирования и достижения сформулированной таким образом цели статьи предложено учитывать несколько обстоятельств, которые отражают современные тенденции развития транспортных систем: многообразие транспортных систем, динамический характер функционирования, множество различных элементов, которые могут подчиняться разным схемам заполнения состояний. Для реализации указанной программы используются различные методы: введённое автором уравнение транспортного процесса, что позволяет довольно легко перейти к квазидинамическим постановкам задач транспортного моделирования, а также общее формальное представление системы в виде совокупности элементов, которая определена на основании анализа многих работ отечественных авторов. В заключение обсуждаются вопросы дальнейшего развития теории транспортных макросистем в динамической постановке.

Ключевые слова: транспортная система, теория макросистем, транспортное моделирование, математическая модель, классификация транспортных систем.

*Информация об авторе:
Агуреев Игорь Евгеньевич – доктор технических наук, заведующий кафедрой автомобилей и автомобильного хозяйства Тульского государственного университета (ТулГУ), Тула, Россия, agureev-igor@yandex.ru.

Статья поступила в редакцию 19.03.2020, принята к публикации 24.04.2020.

For the English text of the article please see p. 14.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие теории макроскопических систем как систем с большим количеством стохастических элементов имеет отношение, прежде всего, к статистической физике. Классические и квантовые системы, состоящие из большого числа молекул, атомов, ионов, элементарных частиц, могут рассматриваться в рамках молекулярно-кинетического или термодинамического подходов. Особенностью физических систем является возможность существования детерминированных макроскопических состояний для системы в целом при стохастическом поведении частиц.

Использование молекулярно-кинетической аналогии для описания транспортных систем впервые было предложено, по-видимому, в работах А. Дж. Вильсона [1–5]. В них было использовано представление о том, что многие закономерности физических макросистем можно обнаруживать в сложных системах различной природы. В предисловии к книге [1] Ю. С. Попков указывал на системы обмена и распределения экономических ресурсов. По сути дела, любая транспортная система на уровне города, региона проявляет некоторые свойства, которые позволяют считать её «макроскопической». Отметим, что в англоязычной научной литературе теория макроскопических систем относится исключительно к системам физическим [6]. Советская и современная российская трактовка этого термина имеет два значения. В первом – это те же физические системы [7], а во втором – действительно сложные системы, участвующие в транспорте и распределении ресурсов. Именно второму классу систем посвящены наиболее известные труды академика РАН Ю. С. Попкова [9–13]. В западной литературе аналогом этого термина является понятие «городская система» [8], однако оно не охватывает весь спектр транспортных систем, рассматриваемых в рамках макроскопического подхода.

Одним из наиболее существенных вкладов А. Дж. Вильсона в теорию транспортных систем является энтропийный подход, смысл которого заключается в максимизации функции, отвечающей за наиболее вероятное (равновесное) состояние элементов в макроскопической системе [1]. Эта функция может быть построена на основе, например, информационной энтропии, и её конкретный вид зависит от того, какого типа состояния и элементы имеются в системе, а также, главным образом, от способа заполнения элементами возможных состояний. В результате может быть получена постановка задачи, в которой определяется равновесие системы, состоящей из хаотически действующих элементов.

Если вести речь о транспортных системах, то в них присутствует как детерминированное, так и хаотическое (точнее неопределённое) поведение участников транспортных процессов. Как было сказано в указанной выше работе [1, с. 8], «как бы ни была высока степень централизации, экономическая система обмена столь сложна, что случайные *(неуправляемые) факторы в ней всегда остаются*». Однако, общим свойством таких макросистем является их способность по аналогии с физическими преобразовывать хаотические действия элементов в некоторый детерминированный процесс.

Если указывать основные результаты работ А. Дж. Вильсона, то следует упомянуть:

1) разработку большого числа различных транспортных моделей, учитывающих расщепление по видам поездок, типам коммуникаций и маршрутам;

2) разработку различных моделей межрегионального обмена (по сути, тех, что мы называем сейчас «транспортно-логистическими системами»);

3) распространение энтропийного метода на неравновесные состояния транспортных систем;

4) использование понятия «систем с максимальной полезностью» для макроскопических систем и др. [1–5].

Вклад Ю. С. Попкова в дальнейшее развитие теории макросистем определяется систематическим изложением аппарата феноменологических схем (статистик Бозе–Эйнштейна, Ферми–Дирака, Больцмана) в рамках транспортно-распределительных, экономических, демографических систем, полным исследованием свойств стационарных их состояний,

Таблица 1

Элементы и состояния транспортной макросистемы (примеры) (составлена автором)

№	Элементы	Состояния
1	Транспортное средство (ТС)	a. Элемент i находится в транспортном районе j; b. Элемент i находится в транспортном районе j и зоне транспортного района k; c. Элемент i находится в перегоне j улично-дорожной сети (УДС); d. Элемент i находится в ТС j; e. Элемент i находится на маршруте j; f. Элемент i находится на остановочном пункте j и т.д.
2	Маршрутное ТС	
3	Немаршрутное ТС	
4	Водитель ТС	
5	Пассажир	
6	Пешеход	
7	Маршрут	

Примечание: Некоторые состояния невозможны для отдельных элементов.

численным методом решения задач равновесия, обобщением результатов на случай динамического поведения транспортных макросистем [9–13].

Отметим, что в настоящее время сложился огромный пласт транспортных задач, которые явно или неявно используют основные результаты теории транспортных макросистем. Среди них следует отметить работы [14–20], которые мы выделяем с целью лишь указать на широкий круг решаемых теорией макросистем задач, но ни в коей мере не претендуем на полноту библиографии данной темы. При этом возникает актуальность в новых условиях цифрового транспорта переосмыслить наследие процитированных работ и наметить пути развития технологий транспортного моделирования. Это и является целью настоящей статьи.

КРАТКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ МАКРОСИСТЕМЫ

Рассмотрим обобщённую транспортную макросистему с непрерывным временем t, содержащую Y однотипных элементов с некоторым видом поведения из множества $B(t) = \{\beta_d(t), \beta_s(t)\}$. Пусть каждый элемент может иметь состояние из ρ классов $K_1, ..., K_\rho$. Классификация состояний такова, что эти классы не пересекаются.

Обозначим $\sigma^1, ..., \sigma^\rho$ – множества состояний, где $\sigma^i \in K_i$. Будем далее полагать, что множества состояний – дискретные для $\beta_s(t)$ (или непрерывные для $\beta_d(t)$) и содержат конечное число элементов (или бесконечное соответственно).

В настоящем разделе ограничимся случаем однородной макросистемы, элементы которой могут принимать состояния только одного класса. Например, под классом состояний можно понимать «расположение в транспортном районе–зоне» (стоке–источнике элементов системы). Данный класс состояний может применяться для элементов с типом поведения $\beta_s(t)$. Другим примером понятия «класс состояния» может быть «средняя скорость транспортного потока в перегоне», применяемого для элементов типа «транспортное средство» или «транспортный поток» с детерминированным типом поведения $\beta_d(t)$. Такому классу соответствует непрерывное (бесконечное) множество состояний, детерминированным образом связанное с множествами состояний других классов. Таким образом, системы с детерминированным видом поведения в рамках принятого определения не могут быть однородными, так как связаны одновременно с несколькими классами состояний.

Итак, однородная система имеет одно множество состояний элементов σ, подмножества которого $\sigma_1, ..., \sigma_m$ таковы, что их объединение совпадает с σ, а пересечение любых пар – пустое.

Элементы макросистемы могут случайно и независимо друг от друга попадать в любое состояние из подмножеств $\sigma_1, ..., \sigma_m$. Относительно каждого фиксированного подмножества σ_n для элемента есть две возможности: попасть в любое состояние из σ_n с априорной вероятностью a_n и не попасть с вероятностью $(1 - a_n)$.

Рассмотрим в качестве примера некоторое множество элементов транспортной макросистемы автомобильного (городского) транспорта, способных находиться в соответствующих состояниях (табл. 1), и содержащее основные элементы и состояния, которые могут дополняться в зависимости от содержания поставленной задачи. Постановка задачи, в которой присутствуют все элементы (и соответствующие им множества состояний), вряд ли целесообразна, да и возможна в принципе с точки зрения её разрешимости. Более рациональный путь – формулировка частных случаев, которые содержат не более 2–3 элементов. Например, можно рассмотреть решение задачи о загрузке маршрутов транспортными средствами с учётом наполняемости. Тогда в постановке задачи будут использоваться элементы 2, 5, 7 и соответствующие возможные состояния *{d, e, f}*.

Теория макросистем имеет основные этапы построения, которые укажем в соответствии с работой Ю. С. Попкова [8]:

1) вводятся термины и понятия, феноменологическая схема;

2) вводится базовое понятие «вероятность макросостояния» как величина $\mathrm{P(N)} = \Pi_{n=1}^{m} \bullet \mathrm{P}_n \bullet (\mathrm{N}_n)$, которая выражается через вероятности состояний отдельных элементов $n = 1, ..., m$;

3) для определения функции *P(N)* рассматривается механизм заполнения состояний в σ_n, в зависимости от типа состояний (ферми-, эйнштейн- или больцман-состояние), а на этой основе определяется функция *P(N)* и далее – физическая и информационная энтропии;

4) полученные вероятностные характеристики позволяют учитывать особенности феноменологической схемы однородной изолированной макросистемы, состоящие в не равновероятном выборе элементами системы соответствующих состояний в подмножествах $\sigma_n(\mathrm{n} \in \overline{1,m})$;

5) делается вывод о том, что обобщённая энтропия для макросистемы имеет единственный максимум, «острота» которого с ростом числа элементов в системе возрастает;

6) устанавливается распределение элементов однородной системы по подмножествам близких состояний, которое может быть связано, например, с расходованием различных ресурсов, наличием и действием «ценовых функций» транспортной сети и т.д., то есть выполняется решение конкретных задач, связанных чаще всего с определением равновесия макросистемы. Примером является классическая задача о загрузке улично-дорожной сети [20], в которой используется энтропийный подход при учёте распределения дальности поездок [1].

Среди основных недостатков традиционной теории следует указать в целом недостаточное внимание к неравновесным состояниям систем в совокупности с рассмотрением транспортных процессов в динамике.

КВАЗИДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНОЙ МАКРОСИСТЕМЫ

Отметим, что повышение точности транспортного моделирования может быть достигнуто за счёт комплексного использования различных мер, направленных на уменьшение влияния фактора «трудноизмеримости» параметров состояния транспортной системы:

1) использование методов для построения качественных матриц корреспонденций;

2) использование данных, хранящихся в базах интеллектуальных транспортных систем;

3) развитие теоретического аппарата для решения задач теории транспортных макросистем в неравновесной и/или динамической постановке;

4) использование новых задач расщепления, которые бы шире развивали понятие расщепления по видам поездок, способам передвижения и др., предложенных А. Дж. Вильсоном.

Для осуществления такого направления развития требуется новое описание модели «транспортной системы». В работе [21] на основе подробного анализа структуры термина «транспортная система» предложен подход, который даёт возможность описания транспортных и транспортно-логистических систем на основе уравнения транспортного процесса, учитывающего интенсивности произвольного числа операций входящего в структуру транспортного процесса любого числа транспортных средств. Такие возможности для получения информации создаются современными технологиями (IoT, Big Data).

Представим описание модели транспортной системы, которая обобщает полученные в работе [21] результаты и предоставляет основу для использования в широком круге задач транспортного моделирования.

Транспортная система описывается в виде совокупности элементов:

1) логическая и пространственная связь между источниками и стоками транспорта (в более широком описании – ресурса некоторого вида);

2) временные характеристики связей (время начала и продолжительности действия каждой связи);

3) соответствующие провозные (пропускные) способности;

4) план транспортного процесса;

5) критерии эффективности функционирования систем (или наличие цели).

В соответствии с этим определением можно составить обобщённую структуру модели произвольной транспортной системы, которая должна включать в себя уравнения, определяющие:

1) граф дорожной сети;

2) матрицу связей как логических (булевых) функций времени;

3) провозные возможности системы (в качестве альтернативного описания здесь могут быть заданы уравнения для пропускных возможностей улично-дорожной сети или уравнения для интенсивностей потоков);

4) степень выполнения транспортного задания (уравнения транспортных процессов);

5) критерии эффективности или условия равновесия.

Количество транспортных средств и число маршрутов входят в такую модель как параметры. Тогда модель обобщённой транспортной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} \tilde{A} = \tilde{A}(t); \\ \tilde{n} = \tilde{n}(t), \quad \tau_0 \le t \le \tau_0 + \Delta\tau; \\ \Delta\tau = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta\tau_k; \\ \Delta\tau_k \in \{\Delta\tau_1; \Delta\tau_2; \ldots; \Delta\tau_n\}; \\ q_{ij} = q_{ij}(t); \\ \pi_v = \pi_v(t); \\ k = 1, \ldots, l. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь:

t – время, которое в модели является непрерывным с дискретными (выделенными) моментами, выбранными для расчёта или определения состояния системы;

τ_0 – время начала наблюдения системы;

$\Delta\tau$ – продолжительность работы транспортной системы (продолжительность существования, моделирования и т.п.);

$\Delta\tau_k$ – интервалы между точками расчёта (рассмотрения) системы;

k – индекс интервала времени;

$\rho = \rho(t)$ – матрица размерности $i \cdot j$ транспортных связей;

q_{ij} – транспортный поток (интенсивность потока; пропускная способность элемента сети; провозная возможность потока транспортных средств);

i, j – индексы узлов транспортной сети, между которыми измеряется величина q_{ij};

$\pi_\upsilon = \pi_\upsilon(t)$ – уравнение транспортного процесса, выражающее долю (степень) завершения поездки (перевозки);

υ – индекс транспортного средства.

Заметим, что система (1) не имеет в явном виде матрицы корреспонденций, множество маршрутов и т.п. Вместо этого может применяться матрица $\rho = \rho(t)$ совместно с потоками q_{ij}. Критерии эффективности, условия равновесия, оптимизации или иные экстремальные условия пока в систему (1) не включены, сделаем это позже.

Модель (1) должна для каждого конкретного случая приобретать завершённый вид, позволяющий производить вычисления или решение оптимизационной задачи. Поэтому для выбранной системы эти уравнения дополняются вспомогательными условиями (функции распределения; уравнения баланса; вариационные равенства и т.п.). Один из вариантов заключается в формулировке системы (1) в квазидинамической постановке и с учётом некоторой информации о расходовании ресурсов во время выполнения транспортных процессов.

Для линейного расходования ресурсов:

$$G_{pq}(x)=\sum_{i,j}^{m,n} t_{q_{ij}} x_{p_{ij}} = g_{pq}, q\in\overline{1,r}, \qquad (2)$$

где r — число типов ресурсов;

g_{pq} — запас ресурса q-го типа;

t_{qij} — параметр функции расходования;

ρ — индекс маршрута;

q — индекс типа ресурса.

Для нелинейного расходования ресурсов соответствующее выражение выглядит как:

$$G_{pq}(x)=\phi_{pq}\left(x_{p_{11}},\ldots,x_{p_{ij}},\ldots,x_{p_{mn}}\right)=g_{pq}. \qquad (3)$$

Тогда уравнения (1) могут быть записаны в наиболее общем виде в зависимости от времени (для случая одного типа ресурса):

$$\begin{cases}\tilde{A}=\tilde{A}(t);\\ \rho=\rho(t),\ \ \tau_0\le t\le\tau_0+\Delta\tau;\\ \Delta\tau=\sum\limits_{k=1}^{l}\Delta\tau_k;\\ \Delta\tau_k\in\left\{\Delta\tau_1;\Delta\tau_2;\ldots;\Delta\tau_n\right\};\\ q_{ij}=q_{ij}(t),\ \ q(t)=\sum\limits_{i,j}^{m,n}q_{ij}(t);\\ \mathbf{G}_p(x)=\phi_p\left(x_{p_{11}}(t),\ldots,x_{p_{ij}}(t),\ldots,x_{p_{mn}}(t)\right)\le\mathbf{g}_p;\\ H\left(x^*(\Delta\tau_k)\right)\to\max;\\ k=1,\ldots,l.\end{cases} \qquad (1а)$$

Покажем связь между $G_p(x, t)$ и $\pi_\upsilon=\pi_\upsilon(t)$. Введём вектор $V(t) = (V_1, \ldots, V_a, \ldots, V_p)$, который группирует все транспортные средства (ТС) по маршрутам:

$V_a = \sum v(t)\big| v\in p_a.$

Для каждого ТС имеется индивидуальная функция расходования ресурса, зависящая от значения функции транспортного процесса. Для простоты примем, что все ТС однородны по типу, и тогда можно допустить наличие одной функции для всех ТС, зависящей от π_υ. Очевидно, что каждому компоненту вектора V можно поставить в соответствие величину текущего расхода ресурса $G_p(x,t)\to V\otimes\overline{\pi_p}(t)$.

Здесь $\overline{\pi_p}(t)$ является вектором доли выполненного транспортного процесса, осреднённой для всех ТС на каждом маршруте. Мерой соответствия является удельная величина индивидуального расхода ресурса:

$G_p(x,t) = g_{vp}\otimes V\otimes\overline{\pi_p}(t).$

Заметим, что компоненты вектора $g_{\upsilon p}$ зависят от маршрута. Ограничения g_p утверждают наличие предельных значений расходования ресурсов, которые могут достигаться на маршрутах в течение одного цикла работы транспортной системы. Конечно, могут быть выбраны и иные способы определения $G_p(x, t)$ через функции транспортного процесса. Это может быть темой отдельного рассмотрения.

Тогда (1а) запишем в окончательном виде:

$$\begin{cases}\tilde{A}=\tilde{A}(t);\\ \rho=\rho(t),\ \ \tau_0\le t\le\tau_0+\Delta\tau;\\ \Delta\tau=\sum\limits_{k=1}^{l}\Delta\tau_k;\\ \Delta\tau_k\in\left\{\Delta\tau_1;\Delta\tau_2;\ldots;\Delta\tau_n\right\};\\ q_{ij}=q_{ij}(t),\ \ q(t)=\sum\limits_{i,j}^{m,n}q_{ij}(t);\\ \pi_v=\pi_v(t),\ \ v=1,\ldots,n_v(t);\\ \mathbf{V}(t)=\left\{V_1,\ldots,V_P:V_\alpha=\sum v(t)\big|v\in p_\alpha\right\};\\ \mathbf{G}_p(x,t)=\mathbf{g}_{vp}\otimes\mathbf{V}\otimes\eth_p(t)\le\mathbf{g}_p;\\ H\left(\mathbf{V}^*(\Delta\tau_k)\right)\to\max;\\ k=1,\ldots,l.\end{cases} \qquad (1б)$$

Очевидно, что формула (1б) является более общей по сравнению с (1а), так как детальная информация о транспортных процессах всегда позволяет определить функцию расходования ресурсов. Обратное же не всегда возможно выполнить однозначно. В качестве экстремального условия здесь записана процедура максимизации энтропии, зависящая от конкретного типа состояний (феноменологической схемы макросистемы), принятого в системе. В качестве допущения обычно используется распределение Больцмана, что, конечно, требует отдельного обсуждения в каждом случае (см., например, [8, с. 77]). Безусловно, что экстремальное условие может быть записано и в ином виде, что не ограничивает общности (1б).

Таким образом, настоящая формулировка утверждает существование последо-

вательности равновесных состояний транспортной системы (с ферми-; эйнштейн- или больцман-состояниями), определённой на обобщённом графе $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}(t)$ и имеющей пропускные или провозные возможности $q_{ij} = q_{ij}(t)$, ресурсы, которые расходуются в соответствии с $\pi_{\upsilon} = \pi_{\upsilon}(t)$, определяющими функции $G_p(x, t)$, и в общем случае являющиеся нелинейными. Данная формулировка соответствует квазидинамическому описанию системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщение моделей типа (1) может происходить в направлении динамической теории транспортных макросистем, когда будет учитываться неравновесная динамика транспортных систем. Заметим, что очень часто гипотеза равновесия транспортных процессов может быть поставлена под сомнение. Например, в часы пик или во время дорожных инцидентов в потоке возникают неравновесные структуры, которые приводят к существенным отличиям результатов моделирования с помощью прогнозных или оптимизационных моделей от реальной картины распределения потоков.

Динамическая теория может быть построена на основе следующих основных положений.

1) Для модели транспортной системы вводится фазовое пространство «обобщённые координаты–обобщённые импульсы». Размерность пространства зависит от условий конкретных задач. Предполагается, что в фазовом пространстве существует функция распределения элементов по «координатам» и «импульсам», которая зависит от времени.

2) Устанавливается существование обобщённого кинетического уравнения (уравнения типа Больцмана), если для рассматриваемой макросистемы постулируется справедливость термодинамического подхода (возможность описания макроскопического состояния системы несколькими параметрами, состоящими из большого количества элементов).

3) Предполагается, что определённая таким образом макросистема осуществляет временную эволюцию, которая может быть охарактеризована изменением степени хаотичности с помощью энтропии неравновесного процесса. Энтропия выражается через введённую выше функцию распределения.

4) Изменение степени хаотичности системы является одним из основных понятий динамической теории транспортных систем, которое в явном виде отсутствует в традиционной теории макросистем. Для внешне замкнутых систем устанавливается аналог H-теоремы Больцмана, которая утверждает, что при временной эволюции к равновесному состоянию энтропия системы возрастает и остаётся неизменной при его достижении.

5) Для открытых транспортных макросистем, находящихся в условиях непрерывного взаимодействия с системами более высокого уровня, постулируется наличие аналога понятия «энергия», возможность изменения степени хаотичности в процессе эволюции и применение аппарата физики открытых систем, в частности *S*-теоремы Климонтовича [22].

6) Для учёта динамики в макросистемах вводится понятие «активная частица», и тогда возникают возможности применения результатов соответствующей теории [23]. В частности, для транспортных систем это даёт возможность более полно учитывать вероятностные особенности поведения таких частиц, в роли которых может выступать любой элемент в табл. 1.

В заключение отметим, что приведённая модель (1) была апробирована для участка улично-дорожной сети с учётом суточной динамики придомовых территорий как одного из основных центров генерации транспортных средств [24].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вильсон А. Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем. – М.: Наука, 1978. – 247 с.
2. Wilson, A. G. A statistical theory of spatial distribution models. Transportation Research, 1967, Vol. 1, Iss. 3, pp. 253–269. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-1647(67)90035-4.
3. Wilson, A. G. Complex Spatial Systems. The Modelling Foundations of Urban and Regional Analysis. 1st ed., London, 2000, 184 p. DOI: https://doi.org/10.4324/9781315838045.
4. Dearden, J., Wilson, A. Exploring urban retail phase transitions – 1: an analysis system. Working paper. CASA Working Papers (140). Centre for Advanced Spatial Analysis (UCL), UK, London, July, 2008. [Электронный ресурс]: https://discovery.ucl.ac.uk/id/eprint/15193/1/15193.pdf. Доступ 21.02.2020.
5. Wilson, A. G. The «Thermodynamics» of City: Evolution and Complexity Science in Urban Modelling. Complexity and Spatial Networks, Advances in Spatial Science. Springer-Verlag, Berlin, Heidlberg, 2009, pp. 11–31. [Электронный ресурс]: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-01554-0_2. Доступ 21.02.2020.
6. Ouwerkerk, C. Theory of Macroscopic Systems. A Unified Approach for Engineers, Chemists and Physicists. Springer-Verlag, 1991, 245 p. [Электронный ресурс]: https://archive.org/details/theoryofmacrosco0000ouwe/page/n3/mode/2up/. Доступ 21.02.2020.
7. Аминов Л. К. Термодинамика и статистическая физика. Конспекты лекций и задачи. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2015. – 180 с.
8. Purvis, B., Mao, Yo., Robinson, D. Entropy and its Application to Urban Systems. Entropy, 2019, Vol. 21, p. 56. DOI: 10.3390/e21010056.
9. Popkov, Yu. S. Macrosystems theory and it applications. Berlin, Springer-Verlag, 1995. [Электронный ресурс]: https://link.springer.com/book/10.1007/BFb0032256/. Доступ 21.02.2020. DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0032256/.
10. Попков Ю. С. Теория макросистем: Равновесные модели. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 320 с.
11. Попков Ю. С. Макросистемные модели пространственной экономики. – М.: Комкнига, 2008. – 240 с.
12. Попков Ю. С. Математическая демоэкономика: макросистемный подход. – М.: Ленанд, 2013. – 560 с.
13. Левитин Е. С., Попков Ю. С. Аксиоматический подход к математической теории макросистем с одновременным поиском априорных вероятностей и стационарных значений стохастических потоков // Труды ИСА РАН. – 2014. – Т. 64. – № 3. – С. 35–40.
14. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / А. В. Гасников и др. – М.: МЦНМО, 2013. – 427 с.
15. Boyce, D. Forecasting Travel on Congested Urban Transportation Networks: Review and Prospects for Network Equilibrium Models. Networks and Spatial Economics, Springer, June 2007, Vol. 7 (2), pp. 99–128. DOI: 10.1007/s11067-006-9009-0.
16. Гасников А. В., Гасникова Е. В., Мендель М. А., Чепурченко К. В. Эволюционные выводы энтропийной модели расчёта матрицы корреспонденций // Математическое моделирование. – 2016. – Т. 28. – С. 1–16.
17. Имельбаев Ш. С., Шмульян Б. Л. Моделирование стохастических коммуникационных систем // А. Дж. Вильсон. Энтропийные методы моделирования сложных систем. – М.: Наука, 1978. – С. 170–233.
18. Гасникова Е. В. О возможной динамике в модели расчёта матрицы корреспонденций // Введение в математическое моделирование транспортных потоков. – М.: МЦНМО, 2013. – С. 248–270.
19. Нестеров Ю. Е., Шпирко С. В. Стохастическое транспортное равновесие // Введение в математическое моделирование транспортных потоков. – М.: МЦНМО, 2013. – С. 314–324.
20. Швецов В. И., Алиев А. С. Математическое моделирование загрузки транспортных сетей. – М.: УРСС, 2003. – 61 с.
21. Агуреев И. Е. Описание автомобильных транспортных систем в условиях развития цифровых технологий // Техника, технологии, ресурсы: приоритетные направления развития и практические разработки: Монография. – Нижний Новгород: НОО «Профессиональная наука», 2018. [Электронный ресурс]: http://scipro.ru/conf/monographengineering.pdf. Доступ 21.02.2020.
22. Климонтович Ю. Л. Введение в физику открытых систем. – М.: Янус-К, 2002. – 284 с.
23. Олемской А. И. Синергетика сложных систем: феноменологическая и статистическая теория. – М.: Красанд, 2009. – 384 с.
24. Агуреев И. Е., Юрченко Д. А. Постановка задачи о загрузке УДС города с учётом данных функционирования придомовых стоянок автомобилей // Вестник Сибирского государственного автомобильно-дорожного университета. – Т. 16. – № 6 (70). – С. 670–679.

Настоящая работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 19–48–710015\19 р_а.