



ЦОД в неустановившемся режиме работы



Марина ЗОТОВА

Marina A.ZOTOVA

Исследование неустановившегося (нестационарного) режима работы центра обработки данных. При этом центр с учетом определенных предположений и условий рассматривается как система массового обслуживания типа $M/M/1/\infty$. Численное интегрирование системы уравнений Колмогорова показывает, что стационарный режим достигается через 1,5 секунды после начала операции.

Ключевые слова: теория массового обслуживания, центр обработки данных, нестационарный режим, корпоративная сеть, запрос, входной поток, интегрирование, система уравнений Колмогорова.

Зотова Марина Александровна – технолог 1-й категории проектно-конструкторско-технологического бюро по системам информатизации ОАО «РЖД», аспирант кафедры «Вычислительная техника» Российской открытой академии транспорта Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), Москва, Россия.

Центр обработки данных (ЦОД), работающий в составе сложной системы – корпоративной сети, при предположении о том, что случайные потоки запросов имеют экспоненциальное распределение между моментами поступления запросов, а также при экспоненциальном распределении времени их обработки можно представить как автономно функционирующую систему массового обслуживания (СМО) типа $M/M/1/\infty$.

Условное $M/M/1/\infty$ означает пуассоновский входной поток, экспоненциальное распределение времени обслуживания, одно обслуживающее устройство, причем сама система – разомкнутая. Тогда смену состояний СМО есть основание представить графом, изображенном на рис. 1 (S_i , $i=0,1,2,3, \dots$ – состояние СМО, при котором в системе находится i запросов).

На рис. 1 символом λ обозначена интенсивность потока событий – моментов поступления запросов на обработку, в котором длительности интервалов между моментами наступления событий имеют экспоненциальное распределение с плотностью распределения вероятностей:

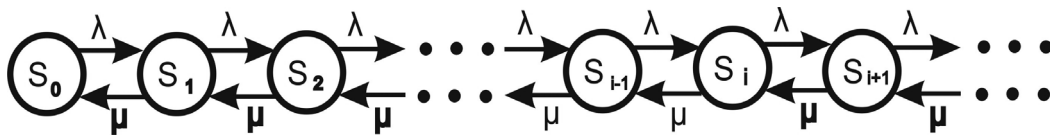


Рис. 1. Граф состояний СМО М/М/1/∞.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (1)$$

где λ – параметр распределения потока. Средний интервал входного потока – $1/\lambda$.

Символ μ обозначает интенсивность распределения времени обслуживания. Интенсивность имеет плотность распределения вероятностей:

$$f(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad (2)$$

где μ – параметр распределения (интенсивность обслуживания). Среднее время обслуживания – $1/\mu$.

В неустойчивом (нестационарном) режиме работы система массового обслуживания описывается системой дифференциальных уравнений Колмогорова [1, 2]:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t);$$

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -\lambda p_i(t) - \mu p_i(t) + \mu p_{i+1}(t) + \lambda p_{i-1}(t),$$

$$i = 1, 2, 3 \dots \quad (3)$$

Здесь $p_i(t)$ – вероятность нахождения СМО в состоянии S_i в момент времени t .

При $t \rightarrow \infty$ левые части уравнений Колмогорова стремятся к 0; другими словами, в установившемся (стационарном) режиме работы, когда $\lambda/\mu < 1$, система дифференциальных уравнений превращается в систему алгебраических уравнений:

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1;$$

$$0 = -\lambda p_i - \mu p_i + \mu p_{i+1} + \lambda p_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (4)$$

Здесь p_i – стационарная вероятность нахождения СМО в состоянии S_i .

Существует [1] решение системы уравнений (4):

$$p_0 = (1 - \lambda/\mu);$$

$$p_i = p_0 (\lambda/\mu)^i, \quad i > 0. \quad (5)$$

При решении системы дифференциальных уравнений (3) вероятности $p_i(t)$ при $t \rightarrow \infty$ должны стремиться к p_i , $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, что может служить проверкой правильности полученного результата.

Время, за которое производные от вероятностей состояний становятся равными 0, есть время, в течение которого ЦОД работает в неустойчивом режиме. Поэтому, решив систему уравнений (1) и построив графики изменения вероятностей состояний как функции времени, мы ответим на вопрос, насколько долго после включения ЦОД устанавливается стационарный режим.

Систему уравнений (3) можно решить численно, применив один из известных методов для систем дифференциальных уравнений. Наиболее зарекомендовавшим себя является метод Рунге–Кутты 4-го порядка [3, 4]. Выполним расчет для значений средних времен – времени интервалов во входном потоке и времени обслуживания, взятых из реальных измерений в корпоративной сети ОАО «РЖД». Примем $1/\lambda = 0,504$ с, $1/\mu = 0,03705$ с. Результаты решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова для указанных значений λ и μ приведены на рис. 2 (указаны только функции $p_0(t)$ и $p_1(t)$ – ради экономии площади). Вероятность отсутствия запросов в системе p_0 для установившегося режима работы вычисляется по формуле, взятой из [1]:

$$p_0 = 1 - \lambda/\mu. \quad (6)$$

Для принятых значений λ и μ вероятность равна 0,9264881. Как следует из рис. 2, кривая $p_0(t)$ при увеличении значения времени стремится к данному значению.

На рис. 3 приведены значения среднего числа запросов в системе. Средняя численность запросов в ЦОД $\bar{n}(t)$ вычислялась



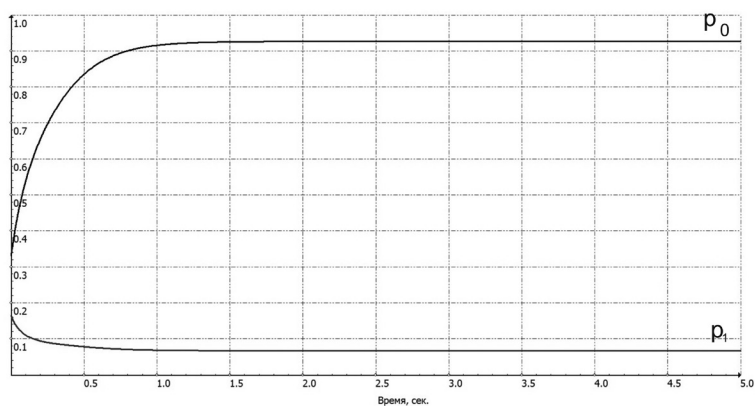


Рис. 2. Вероятности $p_0(t)$ и $p_1(t)$ как функции времени.

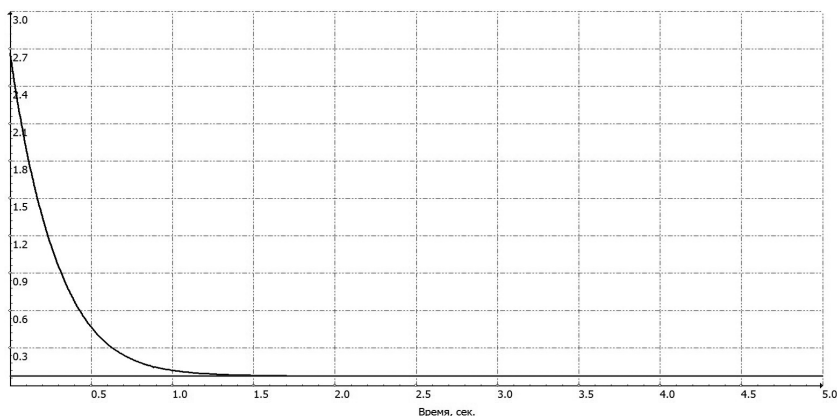


Рис. 3. Средняя численность запросов в системе как функция времени.

по формуле для среднего дискретной случайной величины:

$$\bar{n}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i(t). \quad (7)$$

В установившемся (стационарном) режиме работы средняя численность запросов в системе вычисляется по формуле из [1]:

$$\bar{n} = \frac{\lambda / \mu}{1 - \lambda / \mu} = \frac{0,03705}{0,96295} = 0,0385. \quad (8)$$

На рис. 3 прямая, параллельная оси t , представляет установившееся значение средней численности запросов в системе, равное 0,0385, к которому асимптотически стремится функция времени $\bar{n}(t)$.

Результаты, приведенные на рис. 2 и 3, показывают, что переходный процесс в ЦОД практически завершается уже после 1,5 секунды после начала интегрирования (включения ЦОД).

ВЫВОДЫ

Выполняя численное интегрирование уравнений (3) при различных начальных условиях, параметрах входного потока и времени обслуживания, можно получать оценки длительности достижения ЦОД установившегося режима работы и средних значений запросов в системе. Это позволит рассчитывать необходимые параметры устройств для хранения запросов, ждущих или находящихся в процессе обработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е. С. Исследование операций. — М.: Советское радио, 1972. — 552 с.
2. Jianjun Zhou, Bin Liu. The existence and uniqueness of the solution for nonlinear Kolmogorov equations. Journal of Differential Equations. Vol. 53, Iss. 11, 1 December 2012, pp. 2873–2915.
3. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на Фортране: Пер. с англ. — М.: Мир, 1977. — 584 с.
4. Агеев М. И., Алиев В. П., Марков Ю. И. Библиотека алгоритмов 16-506. — М.: Советское радио, 1975. — 176 с.