



# Модальный анализ круглых симметрических пластин с помощью обобщённого метода конечных разностей



*Алаа Эльдин Мансур – Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Александрия, Арабская Республика Египет\*.*

**Алаа Эльдин МАНСУР**

В настоящей работе рассматривается разрабатываемая упрощённая процедура (процедура полярных доменов) модального анализа круглых пластин на основе использования обобщённого (модернизированного) метода конечных разностей (далее – МКР).

Как правило, круглые пластины широко используются во множестве современных гражданских и промышленных сооружений, в проектировании машин и для многих других целей. Они формируют широкий спектр элементов: от тележек вагонов, поршней двигателей, амортизаторов и вплоть до плит перекрытия и крыш над зданиями, железнодорожными станциями и другими транспортными объектами круглой формы.

В настоящее время МКР является ведущим методом численных решений уравнений в частных производных (далее – УрЧП), не менее используемым, чем метод конечных элементов (далее – МКЭ). Это широко известный метод

математической дискретизации, который экономичен с точки зрения производства вычислений и прост для написания программ, менее требователен к доступным инструментам вычислений и их мощности. Это объясняется тем, что он основан на замене каждой производной алгебраическими разностными отношениями при классической постановке задачи. В некотором смысле конечно-разностная формулировка даёт возможность более прямого подхода к численному решению УрЧП, которым не обладает даже МКЭ, особенно в задачах с доменами полярных координат, учитывая криволинейные размеры.

Обобщённый подход в рамках МКР учитывает многие параметры, которые не рассматриваются при классическом подходе. Как следствие, использование классического подхода оказывает негативное влияние на точность (сходимость к точным значениям решения) и среднее значение распределения результатов, что корректируется обобщённым методом.

**Ключевые слова:** модальный анализ, обобщённый метод конечных разностей, численный метод (-ы), собственная модель, прикладная математика, круглая пластина (-ы).

\*Информация об авторе:

**Алаа Эльдин Мансур** – аспирант кафедры строительной и теоретической механики Национального исследовательского Московского государственного строительного университета, Москва, Россия / Александрия, Арабская Республика Египет, Alaa\_for\_all@hotmail.com.

Статья поступила в редакцию 13.03.2019, принята к публикации 10.06.2019.

**For the English text of the article please see p. 94.**

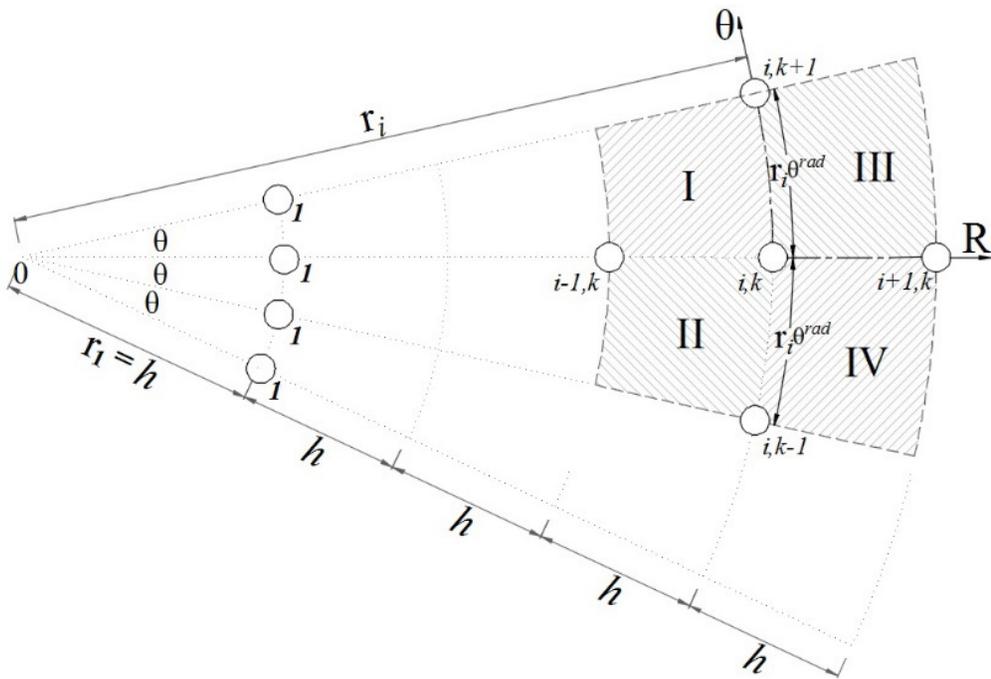


Рис. 1. Сектор пластины: показано размещение различных узлов, для которых проводятся расчёты.

## СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ

[2, с. 1–8, 3, с. 787–810, 4, с. 89–110]

Незатухающие свободные изгибные колебания круглых пластин являются в основном краевыми задачами дифференциальной математической физики, поскольку решение в случае свободно колеблющихся пластин сводится к однородным дифференциальным уравнениям вида:

$$D\nabla_r^2 \nabla_r^2 w(R, \theta, \tau) + m \cdot \frac{\partial^2 w(R, \theta, \tau)}{\partial \tau^2} = p_z^* \quad (1)$$

В большинстве случаев с круглыми пластинами (особенно симметричного строения) влияние вращательных сил инерции ( $P_z^*$ ) игнорируется. Мы можем исследовать решение уравнения (1) в форме:

$$D\nabla_r^2 \nabla_r^2 w(R, \theta, \tau) = -m \cdot \frac{\partial^2 w(R, \theta, \tau)}{\partial \tau^2}.$$

В этом случае решение уравнения ( $D\nabla_r^4 W(R, \theta) = 0$ ), являющегося однородным бигармоническим, может быть логически обобщено так, что:

$$D\nabla_r^2 \nabla_r^2 W(R, \theta) - \lambda \cdot W(R, \theta) = 0, \quad (2)$$

где  $\lambda_n = \frac{m \cdot \omega_n^2}{D}$  — значение собственных векторов для каждого ( $n$ ).

Как правило, уравнение (2) представляет собой характеристическое уравнение, которое описывает свободно колеблющуюся круглую пластину, в которой каждый модальный вектор ( $\lambda$ ) соответствует соответствующей собственной частоте ( $\omega_n$ ).

## ЧИСЛЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЁННОГО МКР

Используя бигармонический оператор Лапласа, который построен в полярной системе координат в виде [1, с. 51; 6, с. 23–27]:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \cdot$$

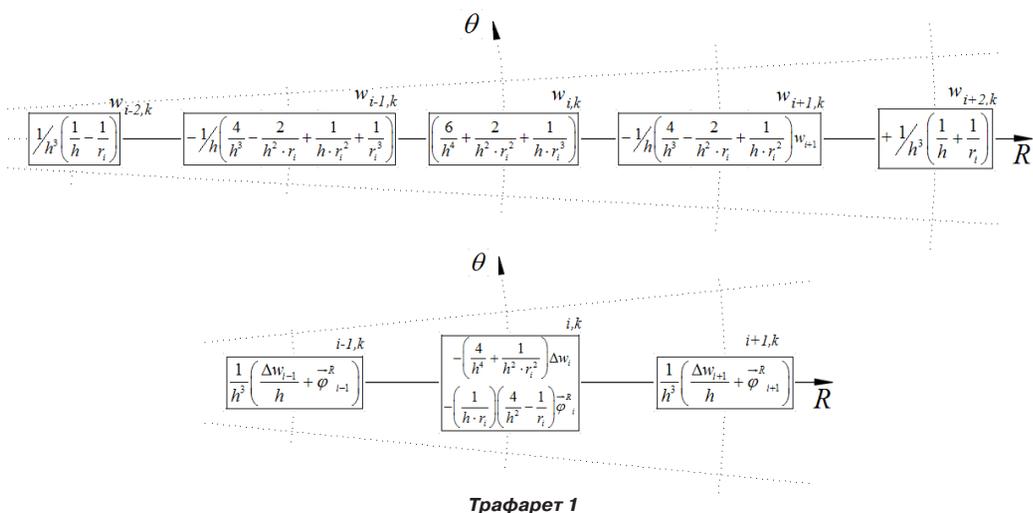
$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right),$$

согласно [1, с. 51; 5, с. 119–120] для симметричных тонких круглых пластин, предыдущий оператор можно упростить так, что:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r_i} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r_i^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r_i^3} \cdot \frac{\partial w}{\partial r}.$$

Предлагаемая численная аппроксимация для решения бигармонического уравнения для каждого узла в сетке области





Трафарет 1

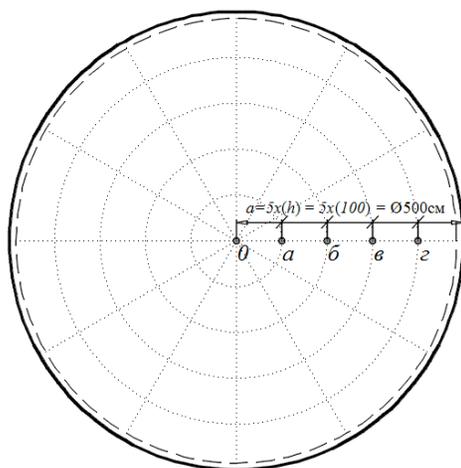


Рис. 2. Сетчатая пластина, поддерживаемая по периметру шарнирами.

интегрирования может быть классифицирована по его положению так, что:

а) Для промежуточного узла аппроксимация принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^3} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{r_i} \right) w_{i-2,k} - \frac{1}{h} \left( \frac{4}{h^3} - \frac{2}{h^2 \cdot r_i} + \frac{1}{h \cdot r_i^2} + \frac{1}{r_i^3} \right) w_{i-1,k} - \\ & - \left( \frac{4}{h^4} + \frac{1}{h^2 \cdot r_i^2} \right) \Delta w_i + \left( \frac{6}{h^4} - \frac{2}{h^2 \cdot r_i^2} + \frac{1}{h \cdot r_i^3} \right) w_i - \\ & - \frac{1}{h} \left( \frac{4}{h^3} - \frac{2}{h^2 \cdot r_i} + \frac{1}{h \cdot r_i^2} \right) w_{i+1,k} + \frac{1}{h^3} \left( \frac{1}{h} + \frac{1}{r_i} \right) w_{i+2,k} + \\ & + \frac{\Delta w_{i-1} + \Delta w_{i+1}}{h^4} + \frac{\varphi_{i-1}^R + \varphi_{i+1}^R}{h^3} - \left( \frac{1}{h \cdot r_i} \right) \left( \frac{4}{h^2} - \frac{1}{r_i} \right) \varphi_i^R = \boxed{\lambda \cdot w_{i,k}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Это может быть изображено с помощью трафарета следующим образом (Трафарет 1).

б) Для узлов, расположенных поблизости от центра полярной сетки, аппроксимация будет иметь вид:

$$\nabla^2 \nabla^2 w_1 = \frac{1}{h^4} [(-3)w_0 + (7,125)w_1 - (6)w_{n+1} + (1,875)w_{2n+1}] = \boxed{\lambda \cdot w_1}. \quad (4)$$

в) Для центральных узлов аппроксимация принимает форму:

$$\nabla^2 \nabla^2 w_0 = \frac{1}{h^4} [18w_0 - 24w_1 + 6w_2] = \boxed{\lambda \cdot w_0}. \quad (5)$$

г) Граничные условия рассматриваются как стандартные, так же, как в классическом МКР.

### ПРОЦЕДУРА ОЦЕНКИ

- Предполагается, что каждый рассчитываемый узел в области должен быть интегрирован таким образом, который соответствует его положению, как описано в предыдущем разделе.

Сравнительная таблица результатов

n	Собственные значения ( $\omega_n$ ) в Гц		
	Модернизированный МКР	Аналитическое решение [7, с. 233–234]	МКЭ
0	1,227	1,3990	0.98
1	1,932	1,7392	2.07
2	3,658	3,6176	3.31
3	5,288	5,2469	5.11
4	7,541	7,5795	7.83
Ошибка, %	4,92 %		12,22 %

Таблица 2

## Обозначения

$w_{i,k}$	Значение отклонения ( $w$ ) в точке-узле – ординаты ( $i$ ) на оси R и ординаты ( $k$ ) на оси $\theta$
$\omega_n$	$n$ собственное колебание пластины
$\frac{d^*u}{dR^*} = u^{*(*)} = \partial^*U = \nabla_r^*$	Производная функции ( $U$ ) от степени ( $*$ ) по оси ( $R$ )
$\Delta W_j^{(\rightarrow R)}$	Разница в значениях отклонения до и после узла ( $J$ ) вдоль оси R
$\varphi_j^{(\rightarrow R)}$	Угол поворота между горизонтальной плоскостью и нормалью к пластине в узле ( $J$ )
$h, r_j \theta_j$	Размеры сетки на осях R, $\theta$ для узла ( $J$ ) соответственно
$D = \left( \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \right)$	Цилиндрическая жёсткость. «Жёсткость» круглой пластины
$E, \nu, t, a$	Модуль упругости (Юнга), коэффициент Пуассона и толщина пластины, радиус пластины соответственно

• В результате получается система результатов решения линейных уравнений, которую легко решить путём формирования матрицы:

$$AX = \lambda \cdot Bx,$$

где  $X = \{X_i\}$  – векторная матрица, элементы которой представляют собой амплитуды свободных колебаний, которые управляют круглой пластиной;

$A = [A_i]$  – квадратная матрица, полученная по обобщённым конечно-разностным выражениям бигармонического оператора для исходящей системы уравнений;

$B = [b_i]$  – диагональная матрица, представляющая собой константы, размещённые в системе в правой части формулы:

• Умножая всю алгебраическую систему уравнений на обратную матрицу  $B^{-1}$ , получаем  $(C - \lambda \cdot I)x = 0$ , где  $C = B^{-1} \cdot A$  &  $I$  представляет собой единичную матрицу;

• За исключением тривиального решения, которое может дать уравнение  $(C - \lambda \cdot I)x = 0$ , модуль набора параметров  $|C - \lambda \cdot I|$  подразумевает:

$$|C - \lambda I| = \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - \lambda & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

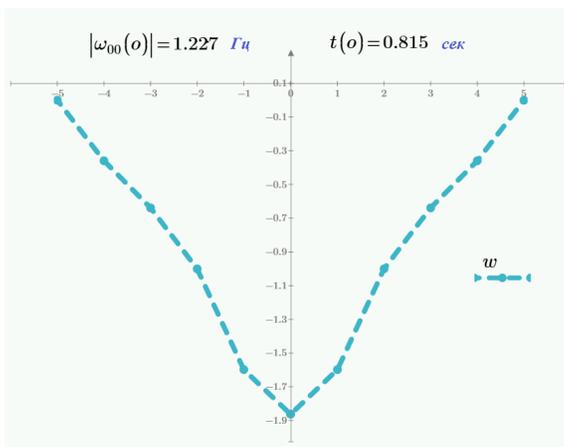
Отсюда могут быть получены искомые собственные векторы (модальные векторы), соответствующие собственным частотам ( $\omega_n$ ) рассматриваемых пластин.

## ЧИСЛОВАЯ ПРОВЕРКА

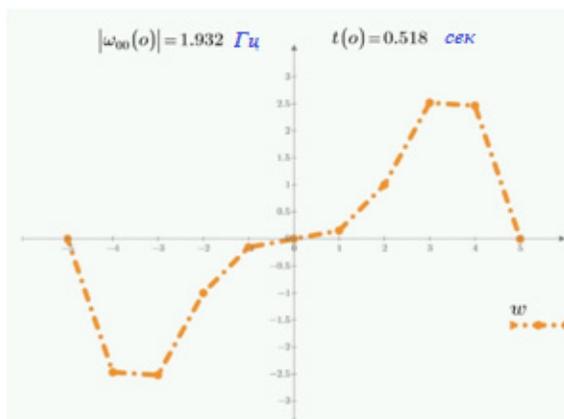
В этой части была тщательно подобрана простая задача верификации, чтобы продемонстрировать, насколько легко представленный метод может оценивать собственные частоты/формы колебаний круглой пластины, демонстрируя при этом



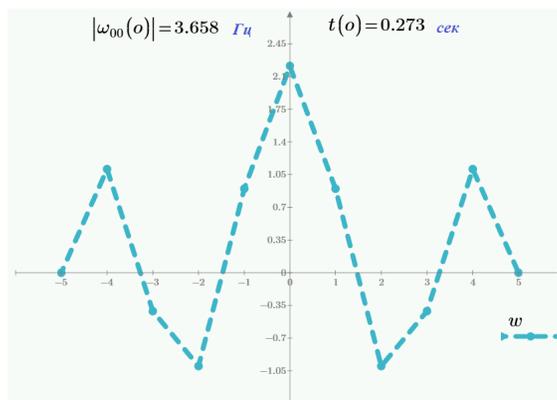
**Рис. 3а. 1-я форма колебаний плиты, соответствующая  $\omega_0 = 1,227$  Гц.**



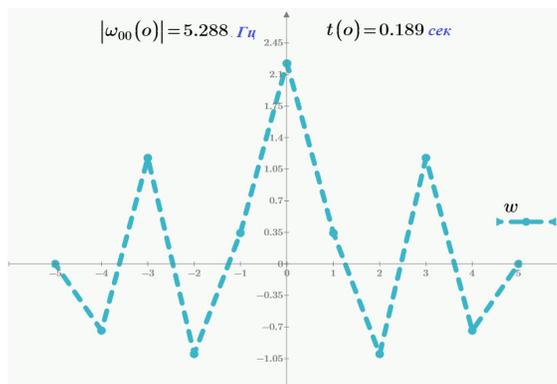
**Рис. 3б. 2-я форма колебаний плиты, соответствующая  $\omega_1 = 1,935$  Гц.**



**Рис 3в. 3-я форма колебаний плиты, соответствующая  $\omega_2 = 3,658$  Гц.**



**Рис 3 г. 4-я форма колебаний плиты, соответствующая  $\omega_3 = 5,288$  Гц.**



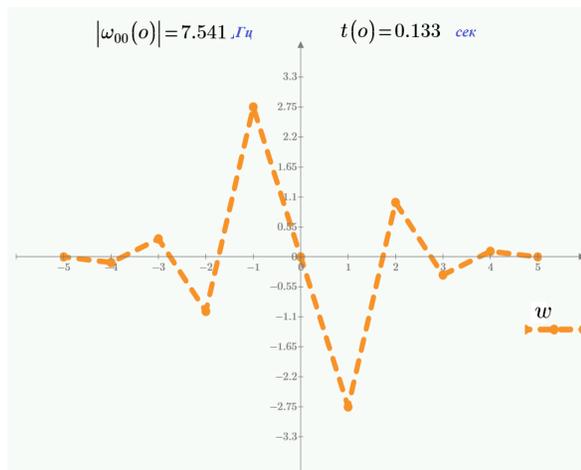


Рис 3д. 5-я форма колебаний плиты, соответствующая  $\omega_4 = 7,541$  Гц.

высокую точность по сравнению с другими методами для решения общих инженерных задач.

Возьмём стальную круглую пластину ( $E = 2,04 \cdot 10^{-6}$  кг/см<sup>2</sup>,  $\nu = \frac{1}{2}$ ) с размерами  $a = 500$  см, толщина = 2 см и с опирающимся на шарниры периметром (рис. 2).

Основной задачей проверки является оценка точности результатов вычисления собственных векторов (форм колебаний) и собственных значений (собственных частот), полученных данным и иными методами.

Что касается собственных значений (собственных частот), сравнение результатов было сведено в таблицу 1.

Собственные векторы (формы колебаний) легко построить вдоль центрального поперечного сечения исследуемой плиты (рис. 3а–д) с помощью листа Mathcad.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный алгоритм, основанный на обобщении (модернизации) конечно-разностных уравнений, был с достаточной достоверностью проверен для расчётов круглых пластин.

Обратившись к разделу числовой проверки, становится ясно, что наиболее заметное преимущество предложенного подхода заключается не только в точности результатов, которые оно даёт по сравнению с результатами других аналогичных методов, а также в их сходимости с точным решением, но и в возможности включения новых параметров, учитывающих условия разрывности функций, которые никогда

не рассматривались классическим МКР. Это позволяет проводить анализ пластин с более сложной геометрией.

Наконец, нетрудно решать задачи с использованием численных методов, особенно предложенного выше. Задача сводится к обработке непрерывной правой части исходного дифференциального уравнения путём его дискретизации наряду с его производными в системе линейных алгебраических уравнений. Возможность увеличения точности получаемых результатов за счёт введения параметров разрывности свидетельствует о возможности использования разработанного метода независимо/согласованно по отношению к методу конечных элементов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York, 1959, second edition, 595 p., Ch. 3, pp. 51–78.
2. Leissa A. W. Vibration of Plates, National Aeronautics and Space Administration. – NASA SP-160. – Washington, D.C., 1969. – 362 p. – Ch. 1, 2. – pp. 1–8.
3. Szilard R. Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods. – John Wiley & Sons, Inc. – New Jersey, 2004. – Ch. 14. – pp. 787–810.
4. Fried I. Numerical solution of differential equations. – Academic Press, Inc. – New York, 1979. – 278 p. – Ch. 6. – pp. 89–110.
5. Den Hartog J. P. Advanced Strength of Materials. – Dover Publications, Inc. – New York, 1952. – 378 p. – Ch. 4. – pp. 119–120.
6. Варвак П. М. Развитие и приложение метода сеток к расчёту пластинок: некоторые задачи прикладной теории упругости в конечных разностях. – Ч. 1. – Киев: Изд-во Академии наук Украинской ССР, 1949. – 136 с. – Гл. 3. – С. 23–27.
7. Справочник по динамике сооружений / Под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1972. – 511 с. – Гл. 8. – С. 233–234. ●

