

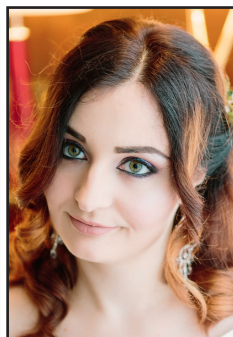
Некоторые методы передачи QR-кода с помощью стеганографии



Дмитрий ПАСТУХОВ



Наталья ВОЛОСОВА



Александра ВОЛОСОВА

Пастухов Дмитрий Феликсович — Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Республика Беларусь.

Волосова Наталья Константиновна — Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва, Россия.

Волосова Александра Константиновна — ООО «Трамплин», Москва, Россия.*

Представлены дополнительные варианты развития ранее изложенного метода [3] скрытной передачи QR-кода с помощью стеганографии, которая может быть востребована для доставки информации, связанной с перевозочным процессом и другими задачами, решаемыми на транспорте. В частности, предложен новый конкретный вариант применения математических методов, используемых в различных научных областях (например,

метода многих сеток для разностной аппроксимации краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона с высокой степенью точности). Построена эффективная итерационная формула для случаев сложного распределения источников. Метод уменьшает число итераций и вероятность появления ошибки при восстановлении оригинала и позволяет создать соответствующую компьютерную программу-приложение.

Ключевые слова: стеганография, QR-код, эффективная итерационная формула повышенной точности, уравнение Пуассона, итерационные методы, стегаконтейнер.

*Информация об авторах:

Пастухов Дмитрий Феликсович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета, Новополоцк, Республика Беларусь, dmitrij.pastuhov@mail.ru.

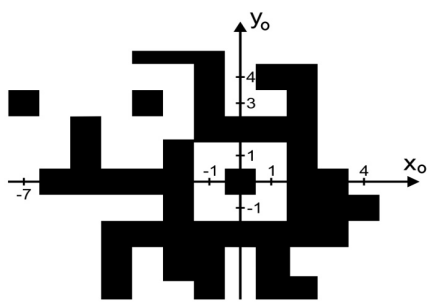
Волосова Наталья Константиновна – аспирант Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета) (МГТУ им. Н. Э. Баумана), Москва, Россия, navolosova@yandex.ru.

Волосова Александра Константиновна – кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО «Трамплин», Москва, Россия, alya01@yandex.ru.

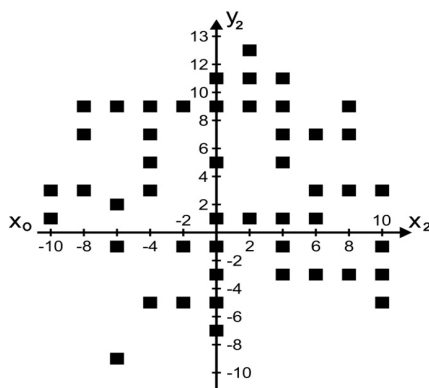
Статья поступила в редакцию 04.02.2019, принята к публикации 28.05.2019.

For the English text of the article please see p. 28.

Авторы выражают благодарность за внимание к работе, помощь и полезные советы Вакуленко С. П., Волосову К. А., Басараб М. А., Баландину А. Л., Данилову В. Г., Пикалову В. В.



а)



б)

Рис. 1а, б. Фрагмент QR-кода.

В поле научной дискуссии находятся как вопросы использования QR-кода для решения задач передачи информации на транспорте, так и методы и алгоритмы, связанные с использованием для этого стеганографии. Применение методов математической физики позволяет увеличить стойкость криптографических алгоритмов перед попытками несанкционированно овладеть информацией. Это увеличит безопасность перевозок и стабильность работы транспорта.

Некоторые важные аспекты проблем в сфере перевозки опасных грузов обсуждаются в [3, с. 14]. В работах [1, 3] на конкретных примерах реализуется алгоритм прямого и обратного преобразования Радона. Там же впервые предлагается использовать стеганографию для передачи QR-кода.

В [2, 3] впервые предлагается для передачи QR-кода использовать решение краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Предполагается, что некто (НК) желает отправить адресату (А) информацию скрытно от постороннего наблюдателя, закодированную в QR-коде. Для этого заданный QR-код разбивается на одинаковые элементарные «белые» и «чёрные (заштрихованные)» квадраты и вычисляются их центры тяжести.

Задаётся функция двух переменных:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } (x, y) \in \Omega, \\ 0, & \text{if } (x, y) \notin \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

где Ω — чёрная (заштрихованная) область (рис. 1), которую можно представить, как объединение некоторого множества эле-

ментарных квадратов. Маскируемым изображением является преобразованный QR-код, в котором находится передаваемая информация. Вычисляется функция (1), имеющая разрывы первого рода на некоторых границах «чёрных» квадратов.

В работах [1, 3] предложены методы предварительной маскировки и усложнения сообщения, например, метод, применяемый в теории фракталов, а именно, «итерация линейными системами». В соответствии с этим организуется промежуточный итерационный процесс $x_{s+1} = e_0 + a_0 x_s + b_0 y_s$, $y_{s+1} = f_0 + c_0 x_s + d_0 y_s$, где $s = 0, 1, \dots$ номер итерации, а x_s, y_s — координаты центров тяжести элементарных «чёрных» квадратов, составляющих QR-код в декартовой системе координат. Начало координат, точка $(0, 0)$ на Ω , масштаб и направление осей относительно графика известны только НК и связаны с заданным QR-кодом. Это же относится к заданным константам $\{e_0, a_0, b_0, f_0, c_0, d_0\}$ и выбранному числу итераций s . Таким образом, появляются дополнительные ключи. Отметим, что структура и геометрия при каждой итерации существенно меняются, но существует единственное обратное преобразование, приведённое в [3]. Можно передавать любую итерацию.

Первая итерация, приведённая на рис. 1а, описана в [3, с. 16]. На рис. 1б приведена вторая итерация фрагмента QR-кода с помощью линейных систем $a_0 = 1$, $b_0 = -1$, $c_0 = 1$, $d_0 = 1$, $e_0 = 1$, $f_0 = 2$.

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие ранее изложенного



в [3] способа передачи информации с помощью краевой задачи для уравнения Пуассона путём построения эффективной итерационной формулы для сложной системы распределённых источников в задаче стеганографии и разработки на этой основе второй программы.

В исследовании использовались *методы* прикладной математики, в частности, метод краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона, распределение Гаусса, методы решения дифференциальных уравнений и систем линейных алгебраических уравнений.

РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Предварительные замечания

Замечание 1. Для решения поставленной задачи скрытой передачи QR-кодов предлагается параллельно конструировать две программы. В первой программе описывается процедура вычисления решения краевой задачи с нулевыми краевыми условиями в прямоугольнике для уравнения Пуассона, которая пригодна для большого семейства QR-кодов. Вычисляются или задаются все ключи (необходимые значения констант). Вторая программа восстанавливает оригинал по изображению, отделённому от стегаконтейнера.

В модельном варианте в данной работе рассматриваются три объекта: оригинал «О», изображение, полученное после интегрального преобразования «И», восстановленный оригинал «ВО». Восстановленный оригинал «ВО» может отличаться от «О» ошибкой, возникающей из-за шума и решения обратной некорректной задачи.

Замечание 2. Отметим, что в расчётах целочисленные координаты центров тяжести элементарных квадратов для формулы (5) задавались во второй программе вручную.

Определение. Маскирующей функцией будем называть функцию $\chi(x, y)$, которая может задавать координаты «чёрных» квадратов, не существовавших в заданном QR-коде и дополняющих их множество.

Построим сумму:

$$f(x, y) = \phi\chi(x, y) + \chi(x, y). \quad (2)$$

Изображения на плоскости проекции графика функции (2) рассматриваем аналогично примеру на рис 1. Аналогично (1) считаем, что в точках (x, y) , принадлежащих «чёрным» квадратам, функция (2)

принимает значение единицы, и функция равна нулю в точках (x, y) , принадлежащих «белым» квадратам. На этапе разностной аппроксимации задачи используем «двойника» функции $f(x, y)$ в форме разрывной функции:

$$N(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } (x, y) \in \Omega, \\ 0, & \text{if } (x, y) \notin \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

Будем называть (3) «индикаторной» функцией.

Её роль описана ниже в замечании 3.

2. Способ передачи информации с помощью краевой задачи для уравнения Пуассона

Поместим график, соответствующий функции (2), на плоскости внутри контура, который представляет прямоугольник такой минимальной площади со сторонами, параллельными осям декартовой системы координат, чтобы в нем находились все «чёрные» (заштрихованные) квадраты. Случай, когда этот прямоугольник оказывается квадратом, редкий и более простой, он кратко рассмотрен в [3, с. 19]. Тогда можно обойтись одной равномерной сеткой с постоянным шагом h . Обычно QR-код порождает при таком построении на плоскости прямоугольник. Если использовать один шаг, полученный при разбиении минимальной стороны, то для уменьшения вычислений во всей области, очевидно, что на практике следует ввести второй несколько больший шаг в направлении длинной стороны прямоугольника. Стороны элементарного чёрного штрихованного прямоугольника должны соотноситься как рациональные числа, например, 1:2. Этим, мы уменьшаем число вычислений, но «чёрные» квадраты трансформируются в прямоугольники, а площадь, занимаемая формулами, увеличивается примерно в три раза.

Итак, во многих случаях контурный четырёхугольник минимальной площади, охватывающий все заштрихованные элементарные квадраты, в графическом изображении функции $f(x, y)$ (3) оказывается прямоугольником (рис. 1). Обозначим внутреннюю область через Ω_0 . Для определённости b и краткой записи формул положим $x_{\max} = a > 0$, $y_{\max} = d > 0$, $x_{\min} = b < 0$, $y_{\min} = c < 0$.

Обозначим через $m_1 = |x_{\max} - x_{\min}|$, $m_2 = |y_{\max} - y_{\min}|$ длины сторон контурного

прямоугольника. Рассмотрим внутреннюю краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона с однородными краевыми условиями:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (4)$$

$a < x < b$, $c < y < d$, $u(a, y) = u(b, y) = u(x, c) = u(x, d) = 0$.

Вся область разбивается на элементарные «белые» и «чёрные» прямоугольники первой «крупной» двумерной естественной сеткой.

На первом этапе преобразования задачи (4) заменим функцию с разрывами первого рода (4) на непрерывную, бесконечно-дифференцируемую функцию, а именно сумму двумерных гауссиан. Тогда выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи (3)–(5) [4, с. 137]. Здесь введены обозначения: V – множество пар центров декартовых координат на плоскости «чёрных» квадратов внутри области Ω , а W – множество пар координат центров тяжести на плоскости всех «белых» и «чёрных» квадратов внутри области Ω . На втором этапе разностной аппроксимации задачи (4) в программе используем функцию:

$$f_{mn} = \sum_{v, \delta=1}^{m_1, m_2} N_{v, \delta} \exp \left(- \left(\frac{x_m - x_v}{\eta \cdot h_{11}} \right)^2 - \left(\frac{y_n - y_\delta}{\eta \cdot h_{22}} \right)^2 \right), \quad (5)$$

$$v = \overline{1, m_1}, \delta = \overline{1, m_2}, v, \delta, m, n \in N,$$

$$b - a = h_{11} \cdot m_1 = h_1 \cdot n_1, \quad d - c = h_{22} \cdot m_2 = h_2 \cdot n_2, v = \overline{1, m_1}, \delta = \overline{1, m_2}, m = \overline{0, n_1}, n = \overline{0, n_2}.$$

Здесь (h_{11}, h_{22}) – вектор крупной сетки; шаги крупной сетки равны сторонам крупной чёрной (белой) клетки для задания QR-кода, (h_1, h_2) – вектор шага минимальной сетки для решения уравнения Пуассона:

$x_m = a + mh_1$, $y_n = c + nh_2$, $m = 0, \dots, n_1$, $n = 0, \dots, n_2$, $x_v = a + vh_{11}$, $y_\delta = c + \delta h_{22}$, $v = 1, \dots, m_1$, $\delta = 1, \dots, m_2$, $(v, \delta) \in V$, $(x_m, y_n) \in W$.

Таким образом, введена вторая, двумерная равномерная «базовая» сетка [9] (рис. 2а) с шагами:

$$\omega_{n_1, n_2} = \left\{ \begin{array}{l} x_m = a + mh_1, y_n = c + nh_2, m = \overline{0, n_1}, \\ n = \overline{0, n_2}, h_1 = \frac{m_1}{n_1} h_{11} = \frac{b-a}{n_1}, \\ h_2 = \frac{m_2}{n_2} h_{22} = \frac{d-c}{n_2} \end{array} \right\}. \quad (6)$$

Длины сторон элементарного «белого» и «чёрного» прямоугольника в общем случае в программе кратны более мелким шагам «базовой» сетки h_1, h_2 . Центры «чёрных» квадратов (в общем случае прямоугольников) (x_δ, y_v) определяются формулой (5), и в примере в данной работе выбран коэффициент, отвечающий за дисперсию в функциях (5), как $\eta = 0.5$. Этот выбор является не единственным.

Замечание 3. Отметим, что n_1, n_2, m_1, m_2 – натуральные числа, параметры программы. В программе используется для технических целей разностная аппроксимация «индикаторной» функции (3) $N_{v, \sigma}$ на сетке (6):

$$v = \overline{1, m_1}, \delta = \overline{1, m_2}, N_{v, \delta} = \begin{cases} 1, (v, \delta) \in N_1^2 \\ 0, (v, \delta) \in N_2^2 \end{cases}, \quad (7)$$

где N_1^2 – двумерное множество пар чисел узлов – центров «чёрных» прямоугольников. Аналогично: N_2^2 – двумерное множество пар узлов – центров «белых» прямоугольников, $N_1^2 \cup N_2^2 = W$.

Функция (5) задает сложную структуру распределённых источников. Центр гауссианы – точка на плоскости, в которой расположен локальный максимум функции, который аналогично распределению Гаусса совпадает с центром тяжести «чёрного» квадрата.

Во-первых, (5) хорошо аппроксимирует и сглаживает границу разрыва между «белыми» и «чёрными» квадратами (в общем случае прямоугольниками), которая имела ранее. «Индикаторная» функция осуществляет подчистку «хвостов» распределения Гаусса, если они «залезли» в «белые» квадраты (в общем случае – прямоугольники). Во-вторых, она облегчает проверку устойчивости работы обеих программ (см. замечание 1) не только в рассматриваемом примере (рис. 1), но и для любого другого представителя семейства функций (2), порождённых другим QR-кодом.

Замечание 4. Существует точное решение задачи (4), (5), выраженное через функцию Грина [5, с. 126], которое представляет, к сожалению, только теоретический интерес. На практике вычислений оно даёт сумму быстро осциллирующих членов ряда с медленно убывающими коэффициентами. При этом необходимо вычислять интегралы от них.





Замечание 5. Исходя из необходимости изложить в статье материал в понятной и простой форме на примере с простыми формулами, мы пропускаем ряд шагов. Для практического применения предложенного метода более сложные формулы можно найти в [9]. При этом мы оставляем маркеры для процесса восстановления формул в виде различных шагов, и некоторые несложные формулы записываем для двух разных шагов. Самые громоздкие формулы приводим для упрощённого случая $h_1 = h_2 = h$, тогда как отдельные формулы для различных шагов в три раза более объёмны и имеют погрешность аппроксимации на 2 порядка ниже [4], [9].

3. Построение эффективной итерационной формулы для сложной системы распределённых источников в задаче стеганографии

Для тестирования программы построим пример:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \sin(x) + \sin(y), & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & u(x, 0) = u(x, \pi) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

с точным решением, записанным через элементарные функции:

$$u(x, y) = 2 \sin(x) \left(ch(y) - 1 + \left(\frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)} \right) sh(y) \right) + \sin(y) \left(\left(\frac{1 - ch(\pi)}{sh(\pi)} \right) sh(x) + ch(x) - 1 \right). \quad (9)$$

В этом примере правая часть в (8) является непрерывно дифференцируемой функцией внутри области, а решение удовлетворяет нулевым краевым условиям.

Будем сравнивать численное решение задачи (4)–(5), предложенное в данной работе, с решением (9) задачи (8) по числу итераций и точности, если вместо правой части использовать известную аналитическую функцию (8) и её точное решение (9) вместо алгоритмически заданного QR-кода с помощью формулы (5), так как аналитическое решение для правой части уравнения Пуассона, как изображено на рис. 3, неизвестно.

Следствие 1. Для непрерывно дифференцируемой функции $f(x, y)$ в области Ω_0 из (4) имеем следствия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f(x, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, \\ \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} &= \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4}, & \frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} &= \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4}, \end{aligned} \quad (10)$$

и т. д.

Формулы (10) следуют из (4).

Для краткой записи вводятся обозначения:

$$\begin{aligned} u(x_{m-1}, y_{n-1}) &= u_{-h_1, -h_2}, & u(x_{m+1}, y_{n-1}) &= u_{h_1, -h_2}, \\ u(x_{m-1}, y_{n+1}) &= u_{-h_1, h_2}, & u(x_{m+1}, y_{n+1}) &= u_{h_1, h_2}, \\ u(x_m, y_n) &= u_{0,0}, & u(x_{m-1}, y_n) &= u_{-h_1,0}, \\ u(x_{m+1}, y_n) &= u_{h_1,0}, & u(x_m, y_{n-1}) &= u_{0,-h_2}, \\ u(x_m, y_{n+1}) &= u_{0,h_2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично (11) вводятся обозначения (12), которые приведены на с. 21.

Теорема 1. Эффективная итерационная формула для сложной системы распределённых источников в задаче (4)–(5) в случае $h_1 = h_2 = h$ имеет вид:

$$\begin{aligned} u^{k+1}(x_m, y_n) &\equiv u_{m,n}^{k+1} \equiv u_{0,0}^{k+1} = \frac{F_2}{5} + \frac{F_1}{20} - \\ &- h^2 \left[\frac{3}{10} f_{0,0} + \frac{1}{40} \left(-\frac{K_1}{3} + \frac{16}{3} K_2 - 20 f_{0,0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1200} \left(1512 f_{0,0} - \frac{1053 Q_1}{2} + 162 Q_2 - \frac{27 K_1}{2} \right) \right] - \\ &- \frac{h^2}{300} \left[\frac{100 f_{0,0}}{9} - \frac{160 K_2}{3} + \left(\frac{16}{3} \right)^2 Z_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{16}{9} Z_2 + \frac{Z_3}{9} + \frac{10 K_1}{3} \right] + O(h^6). \end{aligned} \quad (13)$$

Введены обозначения:

$$F_1 = u_{-h,-h} + u_{h,-h} + u_{-h,h} + u_{h,h}, \quad (14)$$

$$F_2 = u_{-h,0} + u_{h,0} + u_{0,-h} + u_{0,h}, \quad f(x_m, y_n) = f_{0,0},$$

и

$$\begin{aligned} K_1 &= f_{1,0} + f_{-1,0} + f_{0,1} + f_{0,-1}, \\ K_2 &= f_{-1/2,0} + f_{1/2,0} + f_{0,1/2} + f_{0,-1/2}, \\ Q_1 &= f_{1/3,0} + f_{-1/3,0} + f_{0,1/3} + f_{0,-1/3}, \\ Q_2 &= f_{2/3,0} + f_{-2/3,0} + f_{0,2/3} + f_{0,-2/3}, \\ Z_1 &= f_{-1/2,-1/2} + f_{-1/2,1/2} + f_{1/2,-1/2} + f_{1/2,1/2}, \\ Z_2 &= f_{-1/2,-1} + f_{-1/2,1} + f_{1/2,-1} + f_{1/2,1} + \\ &+ f_{-1,-1/2} + f_{-1,1/2} + f_{1,-1/2} + f_{1,1/2}, \\ Z_3 &= f_{-1,-1} + f_{1,-1} + f_{-1,1} + f_{1,1}, \end{aligned} \quad (15)$$

которые упрощены. Например, надо читать: $f_{-1,-1} = f(x_{m-1}, y_{n-1})$, $f_{-1,-1} = f(x_{m+1}, y_{n-1})$, $u_{0,0} = u(x_m, y_n)$... и так далее (см. рис. 2). Таким образом отсчёт внутри шаблона идёт от центральной точки $(x_m, y_n) = (0,0)$.

Доказательство. Возьмём девятиточечный шаблон с высоким порядком аппроксимации уравнения Пуассона в прямоугольнике (рис. 2). В [3] получена формула, аппроксимирующая сумму четырёх значений функции в узлах с вершинами прямоугольника, не лежащих на координатных осях (рис. 2а) $(-h, -h_2)$, $(-h_1, h_2)$, $(h_1, -h_2)$, (h_1, h_2) . Перепишем её для равных шагов $h_1 = h_2 = h$, используя разложение в ряд Тейлора при малых значениях h (рис. 2а):

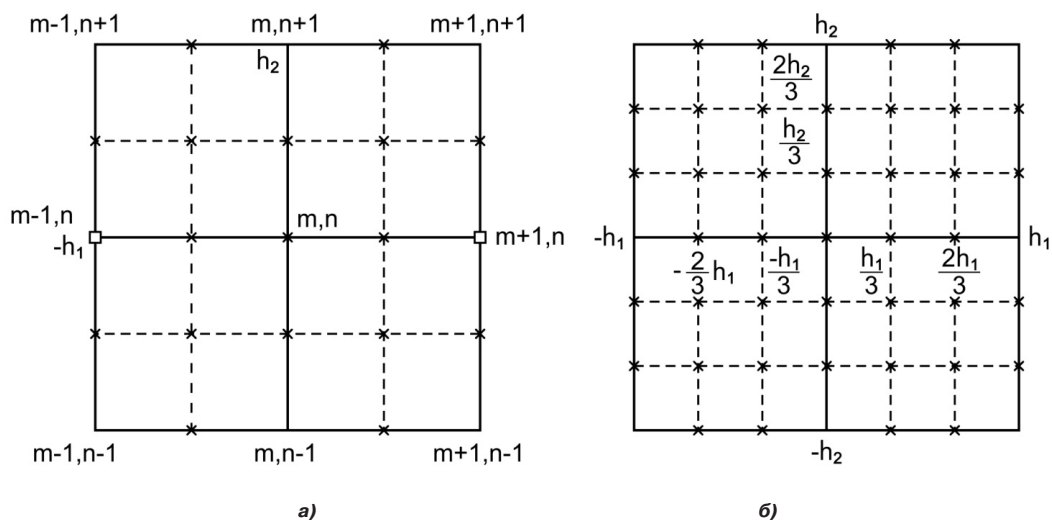


Рис. 2а, б. Используемые шаблоны сеток. Внешний прямоугольник соответствует девятиточечному шаблону с высоким порядком аппроксимации уравнения Пуассона в прямоугольнике [4] и «базовой» сетке (6).

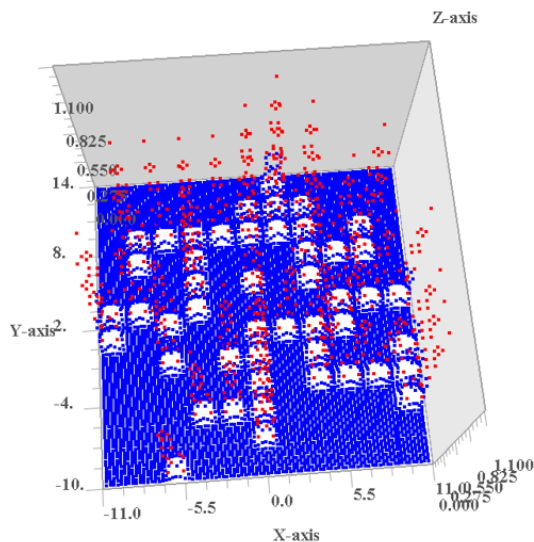


Рис. 3. Функция правой части задачи (4), вычисленная по формуле (5) для источника, изображённого на рис. 16.

$$\begin{aligned}
 f(x_{m-1}, y_{n-1}) &= f_{-1,-1}, & f(x_{m+1}, y_{n-1}) &= f_{1,-1}, & f(x_{m-1}, y_{n+1}) &= f_{-1,1}, & f(x_{m+1}, y_{n+1}) &= f_{1,1}, & (Z_3) \\
 f(x_{m+1}, y_n) &= f_{1,0}, & f(x_{m-1}, y_n) &= f_{-1,0}, & f(x_m, y_{n+1}) &= f_{0,1}, & f(x_m, y_{n-1}) &= f_{0,-1}, & (K_1) \\
 f(x_{m-1/2}, y_n) &= f_{-1/2,0}, & f(x_{m+1/2}, y_n) &= f_{1/2,0}, & f(x_m, y_{n+1/2}) &= f_{0,1/2}, & f(x_m, y_{n-1/2}) &= f_{0,-1/2}, & (K_2) \\
 f(x_{m+1/3}, y_n) &= f_{1/3,0}, & f(x_{m-1/3}, y_n) &= f_{-1/3,0}, & f(x_m, y_{n+1/3}) &= f_{0,1/3}, & f(x_m, y_{n-1/3}) &= f_{0,-1/3}, & (Q_1) \\
 f(x_{m+2/3}, y_n) &= f_{2/3,0}, & f(x_{m-2/3}, y_n) &= f_{-2/3,0}, & f(x_m, y_{n+2/3}) &= f_{0,2/3}, & f(x_m, y_{n-2/3}) &= f_{0,-2/3}, & (Q_2) \\
 f(x_{m-1/2}, y_{n-1/2}) &= f_{-1/2,-1/2}, & f(x_{m-1/2}, y_{n+1/2}) &= f_{-1/2,1/2}, & f(x_{m+1/2}, y_{n-1/2}) &= f_{1/2,-1/2}, \\
 f(x_{m+1/2}, y_{n+1/2}) &= f_{1/2,1/2}, & (Z_1) \\
 f(x_{m-1/2}, y_{n-1}) &= f_{-1/2,-1}, & f(x_{m-1/2}, y_{n+1}) &= f_{-1/2,1}, & f(x_{m+1/2}, y_{n-1}) &= f_{1/2,-1}, \\
 f(x_{m+1/2}, y_{n+1}) &= f_{1/2,1}, & f(x_{m-1}, y_{n-1/2}) &= f_{-1,-1/2}, & f(x_{m-1}, y_{n+1/2}) &= f_{-1,1/2}, \\
 f(x_{m+1}, y_{n-1/2}) &= f_{1,-1/2}, & f(x_{m+1}, y_{n+1/2}) &= f_{1,1/2}, & (Z_2)
 \end{aligned}
 \tag{12}$$



$$u_{-h,-h} + u_{h,-h} + u_{-h,h} + u_{h,h} = 4u_{0,0} + \left(2h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{h^4}{6} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) \right) \Bigg|_{\substack{x=x_m \\ y=y_n}} + O(h^6). \quad (16)$$

Если вершины ромба расположены в узлах, лежащих на координатных осях $(-h_1, 0)$, $(0, h_2)$, $(0, h_1)$, $(h_2, 0)$ (рис. 2а), то для равных шагов $h_1 = h_2 = h$ получим разложение в ряд Тейлора:

$$u_{-h,0} + u_{h,0} + u_{0,-h} + u_{0,h} = 4u_{0,0} + \left(h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{h^4}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) \right) \Bigg|_{\substack{x=x_m \\ y=y_n}} + O(h^6). \quad (17)$$

Следуя [4], аппроксимируем оператор Лапласа линейной квадратурной формулой:

$$\Delta u \approx \frac{1}{h^2} \left(C_0 u_{0,0} + C_1 (u_{-h,0} + u_{h,0} + u_{0,-h} + u_{0,h}) + C_2 (u_{-h,-h} + u_{h,-h} + u_{-h,h} + u_{h,h}) \right), \quad (18)$$

где константы подлежат определению.

Лемма 1. Для непрерывно дифференцируемой функции $f(x, y)$ из $C^\infty(R^2)$ в задаче (4)–(5) константы и невязка формулы (18) имеют вид $C_1 = 2/3$, $C_2 = 1/6$, $C_0 = -10/3$,

$$R(f) = \frac{h^2}{12} \Delta f(x_m, y_n) + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^4 f(x_m, y_n)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f(x_m, y_n)}{\partial y^4} \right) + \frac{h^4}{90} \frac{\partial^4 f(x_m, y_n)}{\partial x^2 \partial y^2} + O(h^6). \quad (19)$$

Доказательство приведём для упрощённого случая $h_1 = h_2 = h$.

В [4, 6, с. 23] доказано, что только слагаемые при четвёртой и шестой степени шага h можно выразить через значения частных производных функции $f(x, y)$ в центральной точке шаблона (рис. 3).

Подставим в (16) заготовки формул (14), (15) и, используя следствия (10), получим три алгебраических уравнения $C_0 + 4C_1 + 4C_2 = 0$, $C_1 + 2C_2 = 1$, $C_1 - 4C_2 = 0$. Это необходимые условия равенства нулю слагаемых, сгруппированных в нулевом и втором порядке степени шага h . Отсюда следует $C_1 = -1 - C_0/2$, $C_2 = 1 + C_0/4$.

Необходимым условием того, что в скобке (19), где собраны слагаемые в четвёртом порядке по шагу h , отсутствуют частные производные функции $u(x, y)$ и остаются значения только частных произ-

водных $f(x, y)$, является равенство $C_0 = -10/3$. Тогда $C_1 = 2/3$, $C_2 = 1/6$.

Доказательство Леммы 1 завершено.

Вводим третью, более мелкую равномерную сетку для разностной аппроксимации вторых частных производных функции $f(x, y)$ по пяти узлам на каждой оси. Её шаблон изображён на рис. 2а. Дополнительные узлы помечены крестиками.

Вводим ещё одну четвёртую, более мелкую равномерную сетку для разностной аппроксимации четвёртых частных производных функции $f(x, y)$ по семи узлам на каждой оси. Её шаблон изображён на рис. 2б.

Окончательно перепишем формулу (18), где учитываем уравнение Пуассона в задаче (4)–(5):

$$\frac{1}{h^2} \left(-\frac{10}{3} u_{0,0} + \frac{2}{3} F_2 + \frac{1}{6} F_1 \right) = f_{0,0} + \left(\frac{h^2}{12} \Delta f + \frac{h^4}{360} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) + \frac{h^4}{90} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \Bigg|_{\substack{x=x_m \\ y=y_n}} + O(h^6) = 0. \quad (20)$$

Здесь все обозначения определены в (11)–(15). В правую часть (20) добавлена невязка (19), которая даёт поправку к решению, и её будем учитывать, используя итерационные численные методы.

Выражая из (20) центральное узловое значение $u_{0,0}$, построим заготовку явной формулы метода простой итерации:

$$u_{0,0}^{k+1} = \frac{F_2^k}{5} + \frac{F_1^k}{20} - \frac{3h^2}{10} f_{0,0}^k - \left(\frac{h^2}{40} \Delta f(x, y) + \frac{h^4}{1200} \left(\frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial y^4} \right) + \frac{h^4}{300} \frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \Bigg|_{\substack{x=x_m \\ y=y_n}} + O(h^6). \quad (21)$$

Здесь через k обозначен номер итерации. В правой части все слагаемые вычисляются на k -ом шаге итерационного процесса. При $k = 0$, начальное значение выбирается в виде гладкой, непрерывно дифференцируемой функции. Формулы для вычисления правой части (21) выведены ниже.

Поскольку правая часть уравнения Пуассона в задаче стеганографии задана чис-

ленно в виде (5), то будем использовать разностные операторы для частных производных, входящих в (21), из [6, с. 22; 7, с. 33]. Используем для этого третью и четвёртую сетки с дробными шагами на шаблонах, описанных выше.

Для дальнейшего доказательства Теоремы 1 нужны ещё три вспомогательных утверждения.

Лемма 2. Оператор Лапласа с точностью $O(h^4)$ в виде квадратурной формулы в случае $h_1 = h_2 = h$ представим в виде:

$$\Delta f(x_m, y_n) \approx \left(-\frac{K_1}{3} + \frac{16K_2}{3} - 20f_{0,0} \right) + O(h^4), \quad (22)$$

где $K_1, K_2, f_{0,0}$ определены в (11), (15).

Доказательство. Линейный оператор Лапласа симметричен относительно переменных x, y :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}. \quad (23)$$

Тогда достаточно с указанной точностью аппроксимировать вторую производную.

Замечание 6. Теперь рассмотрим, временно (для вывода формулы и для того, чтобы показать, что эти рассуждения будут обобщены для функции двух переменных $f(x, y)$) непрерывно дифференцируемую функцию одной переменной с тем же идентификатором $f(x)$. Выберем дополнительную (временную, для вывода формулы), локальную на шаблоне систему координат с нулём в точке x_m, y_n .

Известна формула на трёх равноотстоящих узлах $f_{xx} = (f(-h) + f(h) - 2f(0))/h^2 = (f_{-1} + f_1 - 2f_0)/h^2 + O(h^2)$, которая имеет точность $O(h^2)$ [6, с. 22; 7, с. 33] на оси абсцисс (рис. 2а). Выберем пять равноотстоящих узлов на отрезке $[-h, h]$, симметрично расположенных относительно начала координат:

$$f_{xx}''(0) \approx \frac{1}{h^2} \left(B_0 f(0) + B_1 \left(f(-\frac{h}{2}) + f(\frac{h}{2}) \right) + B_2 (f(-h) + f(h)) \right) \equiv \quad (24)$$

$$\frac{1}{h^2} (B_0 f_0 + B_1 (f_{-1/2} + f_{1/2}) + B_2 (f_{-1} + f_1)).$$

Здесь необходимо определить константы.

Методом неопределённых коэффициентов подберём весовые коэффициенты в формуле (24), чтобы она имела максимальный алгебраический порядок погрешности, следуя [8, с. 40].

Замечание 7. Предполагаем, что в малой окрестности нуля функция $f(x)$ ведёт себя как степенная функция. Запишем функцию, вычислим производную и составим алгебраические уравнения по формуле (24):

$$1) \quad f(x) \equiv 1; \quad f_{xx}''(0) = 0; \quad (B_0 + B_1(1+1) + B_2(1+1)) = 0; \\ B_0 + 2B_1 + 2B_2 = 0;$$

$$f(x) = x; \quad f_{xx}''(0) = 0;$$

$$2) \quad \left(B_0 0 + B_1 \left(-\frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right) + B_2 (-h + h) \right) = 0; \quad 0 \equiv 0;$$

$$f(x) = x^2; \quad f_{xx}''(0) = 2;$$

$$3) \quad B_0 0^2 + B_1 \left(\left(-\frac{h}{2} \right)^2 + \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right) + B_2 ((-h)^2 + (h)^2) = 0;$$

$$\frac{2B_1}{4} + 2B_2 = 2;$$

$$f(x) = x^3; \quad f_{xx}''(0) = 6x|_{x=0} = 0;$$

$$4) \quad B_0 0^3 + B_1 \left(\left(-\frac{h}{2} \right)^3 + \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right) + B_2 ((-h)^3 + (h)^3) = 0; \quad 0 \equiv 0;$$

$$f(x) = x^4; \quad f_{xx}''(0) = 12x^2|_{x=0} = 0;$$

$$5) \quad \left(B_0 0^4 + B_1 \left(\left(-\frac{h}{2} \right)^4 + \left(\frac{h}{2} \right)^4 \right) + B_2 ((-h)^4 + (h)^4) \right) = \\ = 0; \quad \frac{2B_1}{16} + 2B_2 = 0;$$

$$6) \quad f(x) = x^5; \quad f_{xx}''(0) = 20x^3|_{x=0} = 0; \quad 0 \equiv 0.$$

Получим СЛАУ (систему линейных алгебраических уравнений) и её решение:

$$B_0 + 2B_1 + 2B_2 = 0; \quad B_1 + 4B_2 = 4; \quad B_1 + 16B_2 = 0; \quad B_0 = -10; \quad B_1 = 16/3; \quad B_2 = -1/3.$$

Подставим результаты вычислений в (24) и получим правило, по которому действует конечно-разностный оператор второго порядка A на функцию от переменной x :

$$f_{xx}''(0) \approx A \circ f|_{x=0} = \\ = \frac{1}{h^2} \left(-10f_0 + \frac{16}{3}(f_{-1/2} + f_{1/2}) - \frac{1}{3}(f_{-1} + f_1) \right) + O(h^4). \quad (25)$$

При составлении формулы (25) с учётом симметрии использовано шесть условий на коэффициенты точной для степенных многочленов одной переменной $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$. Левая и правая часть формулы (23), вторая производная и квадратурная формула (линейная относительно узловых значений f_i) и фиксированные весовые коэффициенты B_i являются линейными функционалами. Тогда их разность, равная невязке аппроксимации формулы (23), также является линейным функционалом.



Следовательно, если невязка формулы (23) равна нулю для указанных степенных координатных функций $1, x, x^2, x^3, x^4$, то в силу линейности невязки формула (23) является точной для всех алгебраических многочленов степени не выше 5. То есть доказано, что порядок погрешности числителя правой части (23) равен 6, то есть $O(h^6)$. Следовательно, погрешность второй производной в (23) $O(h^4) = O(h^6)/h^2$.

В силу симметрии построим второй конечно разностный оператор второго порядка S , который по тому же правилу действует на функцию от переменной y в силу симметрии (21).

Для функции двух переменных $f(x, y)$ для оператора Лапласа с учётом (21), (23) получим:

$$\Delta f \approx A \circ f(x_m, y_n) + S \circ f(x_m, y_n) =$$

$$= \frac{1}{h_1^2} \left(-10f_{0,0} + \frac{16}{3}(f_{-1/2,0} + f_{1/2,0}) - \frac{1}{3}(f_{-1,0} + f_{1,0}) \right) +$$

$$+ \frac{1}{h_2^2} \left(-10f_{0,0} + \frac{16}{3}(f_{0,-1/2} + f_{0,1/2}) - \frac{1}{3}(f_{0,-1} + f_{0,1}) \right) + O(h_1^4 + h_2^4). \quad (26)$$

Для равных шагов $h_1 = h_2 = h$ формула (24) перейдёт в формулу:

$$\Delta f \approx \frac{1}{h^2} \left(-\frac{1}{3}(f_{1,0} + f_{-1,0} + f_{0,1} + f_{0,-1}) + \right.$$

$$\left. + \frac{16}{3} \left(f_{\frac{1}{2},0} + f_{-\frac{1}{2},0} + f_{0,\frac{1}{2}} + f_{0,-\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{3}(f_{1,0} + f_{-1,0}) \right) + O(h^4), \quad (27)$$

то есть (22).

Доказательство Леммы 2 завершено.

Лемма 3. Сумма четвёртых частных производных в (17) с точностью $O(h^4)$ в виде квадратурной формулы в случае $h_1 = h_2 = h$ представима в виде:

$$\frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial y^4} \approx A \circ (A \circ f_{0,0}) + S \circ (S \circ f_{0,0}) =$$

$$= \frac{1}{h^4} \left(1512f_{0,0} - \frac{1053}{2}Q_1 + 162Q_2 - \frac{27}{2}K_1 \right), \quad (28)$$

где Q_1, Q_2, K_1 определены в (13)–(15).

Доказательство проводим по схеме, аналогичной доказательству Леммы 2.

Далее следуем *Замечанию 6*. Рассмотрим четвёртую частную производную $f_{xxxx}^{(IV)}(x)$ как линейный оператор от функции $f(x)$ переменной x . Аппроксимируем шаблоном на семи равноотстоящих узлах на отрезке $[-h, h]$, симметрично расположенных от-

носительно начала координат (рис. 2б):

$$f_{xxxx}^{(IV)}(0) = \frac{1}{h^4} \left(I_0 f_0 + I_1 (f_{-1/3} + f_{1/3}) + \right.$$

$$\left. + I_2 (f_{-2/3} + f_{2/3}) + I_3 (f_{-1} + f_1) \right). \quad (29)$$

Методом неопределённых коэффициентов найдём весовые коэффициенты I_0, I_1, I_2, I_3 в формуле (27), аналогично рассуждениям, приведённым в Лемме 2, чтобы она имела максимальный алгебраический порядок погрешности [8, с. 40] (см. Замечание 7). Нетривиальные уравнения получим только в следующих порядках чётной степени x :

$$1) f(x) \equiv 1; f_{xxxx}^{(4)}(0) = 0; I_0 + 2I_1 + 2I_2 + 2I_3 = 0;$$

$$f(x) = x^2; f_{xxxx}^{(IV)}(0) = 0;$$

$$3) \left(I_0 0^2 + I_1 \left(\left(-\frac{h}{3} \right)^2 + \left(\frac{h}{3} \right)^2 \right) + \right.$$

$$\left. + I_2 \left(\left(-\frac{2h}{3} \right)^2 + \left(\frac{2h}{3} \right)^2 \right) + I_3 ((-h)^2 + h^2) \right) = 0;$$

$$I_1 + 4I_2 + 9I_3 = 0;$$

$$f(x) = x^4; f_{xxxx}^{(IV)}(0) = 24;$$

$$5) \left(I_0 0^4 + I_1 \left(\left(-\frac{h}{3} \right)^4 + \left(\frac{h}{3} \right)^4 \right) + \right.$$

$$\left. + I_2 \left(\left(-\frac{2h}{3} \right)^4 + \left(\frac{2h}{3} \right)^4 \right) + I_3 ((-h)^4 + h^4) \right) = 0;$$

$$I_1 + 16I_2 + 81I_3 = 972;$$

$$f(x) = x^6; f_{xxxx}^{(IV)}(0) = 360x^2|_{x=0} = 0;$$

$$7) \left(I_0 0^6 + I_1 \left(\left(-\frac{h}{3} \right)^6 + \left(\frac{h}{3} \right)^6 \right) + \right.$$

$$\left. + I_2 \left(\left(-\frac{2h}{3} \right)^6 + \left(\frac{2h}{3} \right)^6 \right) + I_3 ((-h)^6 + h^6) \right) = 0;$$

$$I_1 + 64I_2 + 729I_3 = 0.$$

Получим СЛАУ и её решение:

$$\begin{cases} I_0 + 2I_1 + 2I_2 + 2I_3 = 0; I_1 + 4I_2 + 9I_3 = 0; \\ I_1 + 16I_2 + 81I_3 = 972; I_1 + 64I_2 + 729I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ I_0 = 756, I_1 = -\frac{1053}{2}, I_2 = 162, I_3 = -\frac{27}{2} \right\}.$$

Тогда из этого для (27) получим квадратурную формулу с найденными коэффициентами:

Таблица 1

x	y	numerical	exact
0.00000000000000E+000	0.00000000000000E+000	0.00000000000000E+000	0.00000000000000E+000
1.25663706143592	0.00000000000000E+000	0.951056516295154	0.951056516295154
2.51327412287183	0.00000000000000E+000	0.587785252292473	0.587785252292473
0.00000000000000E+000	1.25663706143592	0.951056516295154	0.951056516295154
1.25663706143592	1.25663706143592	0.242612919304468	0.242612919291777
2.51327412287183	1.25663706143592	0.464240247098885	0.464240247090147
0.00000000000000E+000	2.51327412287183	0.587785252292473	0.587785252292473
1.25663706143592	2.51327412287183	0.415266199954766	0.415266199945460
2.51327412287183	2.51327412287183	0.450894988539345	0.450894988533041

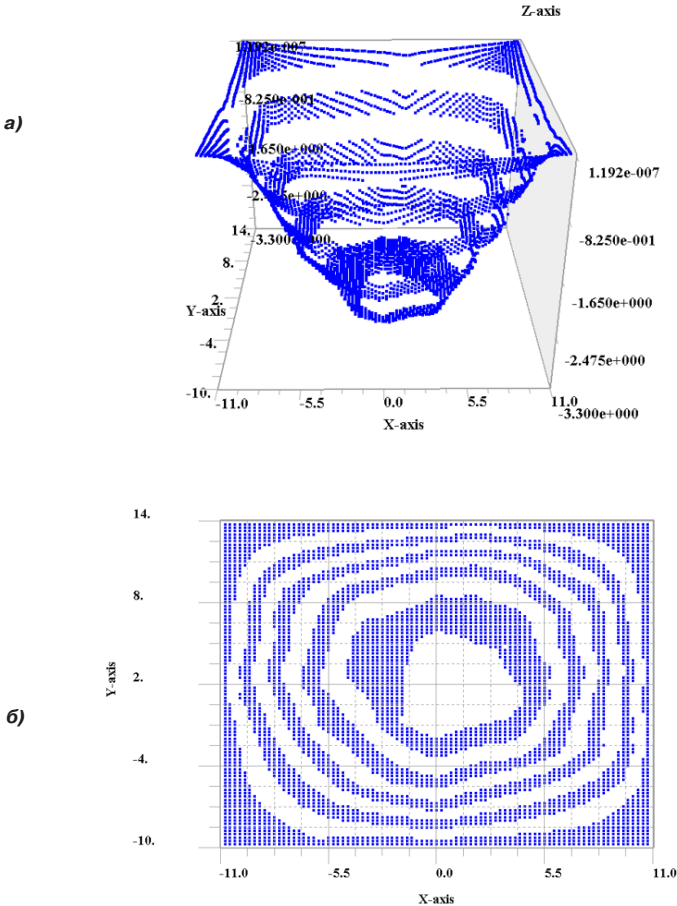


Рис. 4 а, б. Численное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона: а) численное решение задачи (4) с использованием формулы (13) и правой части в виде QR-кода по формуле (5) (вторая программа), б) поля линий уровня, построенные по рис. 4а.

$$f_{xxxx}^{(IV)}(0) = \frac{1}{h^4} \left(756f_0 - \frac{1053}{2}(f_{-1/3} + f_{1/3}) + 162(f_{-2/3} + f_{2/3}) - \frac{27}{2}(f_{-1} + f_1) \right) + o(h^4). \quad (30)$$

После рассуждений, аналогичных приведенным в Лемме 2 ниже формулы (23), следует, что доказан порядок погрешности числителя правой части (28), и он равен восьми, т.е. $O(h^8)$. Следовательно, $O(h^4) = O(h^8)/h^4$.

Для функции двух переменных $f(x, y)$ аналогично рассуждениям, приведённым в Лемме 2, получим:

$$\frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial y^4} = A \circ (A \circ f_{0,0}) + S \circ (S \circ f_{0,0}) =$$
$$= \frac{1}{h^4} \left(756f_{0,0} - \frac{1053}{2}(f_{-1/3,0} + f_{1/3,0}) + 162(f_{-2/3,0} + f_{2/3,0}) - \frac{27}{2}(f_{-1,0} + f_{1,0}) \right) +$$




$$+ \frac{1}{h^4} \left(756f_{0,0} - \frac{1053}{2}(f_{0,-1/3} + f_{0,1/3}) + 162(f_{0,-2/3} + f_{2/3,0}) - \frac{27}{2}(f_{0,-1} + f_{0,1}) \right) + O(h^4 + h^4). \quad (31)$$

Для равных шагов $h_1 = h_2 = h$ правая часть формулы (29) примет вид:

$$\frac{1}{h^4} \left(1512f_{0,0} - \left(\frac{1053}{2} \right) \left(f_{\frac{1}{3},0} + f_{\frac{1}{3},0} + f_{\frac{1}{3},\frac{1}{3}} + f_{\frac{1}{3},-\frac{1}{3}} \right) + 162 \left(f_{\frac{2}{3},0} + f_{\frac{2}{3},0} + f_{\frac{2}{3},\frac{2}{3}} + f_{\frac{2}{3},-\frac{2}{3}} \right) - \left(\frac{27}{2} \right) (f_{1,0} + f_{-1,0} + f_{0,1} + f_{0,-1}) \right).$$

Доказана формула (28).

Доказательство Леммы 3 завершено.

Лемма 4. Четвёртая смешанная производная $\left. \frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{\substack{x=x_m \\ y=y_n}}$ с точностью $O(h^4)$ в слу-

чае $h_1 = h_2 = h$ представлена в виде:

$$\left. \frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{\substack{x=x_m \\ y=y_n}} = \frac{1}{h^4} \left(-100f_{0,0} - \frac{160}{3}K_2 + \left(\frac{16}{3} \right)^2 Z_1 + \frac{10}{3}K_1 - \frac{16}{9}Z_2 + \frac{1}{9}Z_3 \right) + O(h^4), \quad (32)$$

где K_1, K_2, Z_1, Z_2, Z_3 определены в (15).

Доказательство проведём конструктивно, исходя из формулы (23). По второй переменной функции $f(x, y)$ для каждого слагаемого формулы (23) применим конечно-разностный оператор второго порядка, определённый при доказательстве Леммы 2. Для объяснения этого пользуемся шаблоном четвёртой сетки (см. рис. 2б). Пользуемся также симметрией применения оператора дифференцирования в (21). При этом первый аргумент по переменной x измениться не может, меняются вторые индексы узловых значений

согласно формуле (23). Поскольку погрешность по переменной x имеет порядок $O(h^4)$, то исходное число слагаемых q увеличится не более чем в q^2 раз, то есть число слагаемых q^2 будет конечно и будет иметь погрешность вида $O(h^4)$ по классическим свойствам «О большое». Построим формулу в случае $h_1 = h_2 = h$ (33).

То есть получим (30).

Доказательство Леммы 4 завершено.

Далее подставляем все доказанные формулы (19), (22), (30) в заготовку (18) и получаем (13). То есть Теорема 1 доказана.

4. Тестирование формулы (13)

Используя формулу простой итерации (13) и тестовый пример (8) с решением, записанным через элементарные функции (9), составим программу на современном языке высокого уровня Fortran [10], поддерживающем максимальные массивы решения. Вычислим невязки между разностным численным решением задачи (8) и проекцией точного решения (9) на узлы базовой сетки (6) по норме Чебышева. Например, программа при «грубом» заданном числе итераций и параметрах значений, задающих число точек в области $m = 2000$, $n_1 = n_2 = 10$, вычисляет норму Чебышева (модуль максимальной разности между численным и точным значением в узле сетки) для невязки $2.113e^{-7}$. А при заданном числе итераций и параметрах значений, задающих число точек в области $m = 2000$, $n_1 = n_2 = 20$, программа возвращает норму Чебышева для невязки $3.306e^{-9}$, то есть порядок погрешности полученного алгоритма примерно равен $2.113e^{-7}/3.306e^{-9} = 61.91 = 2^6$. То есть порядок погрешности

$$\begin{aligned} f_{xxyy}^{(IV)}(x, y)_{x=x_m} &= \frac{1}{h^2} \left(-10(S \circ (f_{0,0})) + \frac{16}{3}(S \circ (f_{-1/2,0}) + S \circ (f_{1/2,0})) - \frac{1}{3}(S \circ (f_{-1,0}) + S \circ (f_{1,0})) \right) = \\ &= \frac{1}{h^4} \left(-10 \left(-10f_{0,0} + \frac{16}{3}(f_{0,-1/2} + f_{0,1/2}) - \frac{1}{3}(f_{0,-1} + f_{0,1}) \right) + \frac{16}{3} \left(-10f_{-1/2,0} + \frac{16}{3}(f_{-1/2,-1/2} + f_{-1/2,1/2}) - \frac{1}{3}(f_{-1/2,-1} + f_{-1/2,1}) \right) + \right. \\ &+ \frac{16}{3} \left(-10f_{1/2,0} + \frac{16}{3}(f_{1/2,-1/2} + f_{1/2,1/2}) - \frac{1}{3}(f_{1/2,-1} + f_{1/2,1}) \right) - \frac{1}{3} \left(-10f_{-1,0} + \frac{16}{3}(f_{-1,-1/2} + f_{-1,1/2}) - \frac{1}{3}(f_{-1,-1} + f_{-1,1}) \right) - \\ &- \frac{1}{3} \left(-10f_{1,0} + \frac{16}{3}(f_{1,-1/2} + f_{1,1/2}) - \frac{1}{3}(f_{1,-1} + f_{1,1}) \right) \Big) = \frac{1}{h^4} \left(100f_{0,0} - \frac{160}{3}(f_{0,-1/2} + f_{0,1/2} + f_{-1/2,0} + f_{1/2,0}) + \right. \\ &+ \frac{10}{3}(f_{0,-1} + f_{0,1} + f_{-1,0} + f_{1,0}) + \left(\frac{16}{3} \right)^2 (f_{-1/2,-1/2} + f_{-1/2,1/2} + f_{1/2,-1/2} + f_{1/2,1/2}) - \left(\frac{16}{9} \right) (f_{-1/2,-1} + f_{-1/2,1} + f_{1/2,-1} + f_{1/2,1} + \\ &+ f_{-1,-1/2} + f_{-1,1/2} + f_{1,-1/2} + f_{1,1/2}) + \left(\frac{1}{9} \right) (f_{-1,-1} + f_{-1,1} + f_{1,-1} + f_{1,1}) \Big) + O(h^4). \end{aligned} \quad (33)$$

равен $6 O(h^6)$! (Параллельно создается несколько независимых программ (см. *Замечание 1*). Таким образом, тестирование алгоритма (10)–(31) по аналитическому примеру (8), (9) происходило отдельной (первой) программой, не связанной с QR-кодом. Но протестированное ядро первой программы использовалось во второй программе для QR-кода и с использованием формулы (5)).

Приведём более подробно пример работы первой программы для тестового примера (8) по формуле (13) с решением, записанным через элементарные функции (9) с $m = 10000$ – числом итераций, и $n_1 = n_2 = 50$ – числом интервалов равномерной сетки по осям x, y :

$$h_1 = 6.283185307179587E-002,$$

$$h_2 = 6.283185307179587E-002.$$

Приводим краткую выдержку из таблицы численных решений и сопоставлений их с точным решением (таблица 1 на с. 24).

Максимальное значение нормы Чебышева равно $\text{Norma } C = 1,356223466864038E-11$.

Из таблицы 1 видно, что различие решений происходит только в 11-м значащем знаке.

В этом расчёте константы принимают следующие значения $m = 10^4$, $n_1 = 88$, $n_2 = 96$, $m_1 = 22$, $m_2 = 24$, $x_{\min} = -11$, $x_{\max} = 11$, $y_{\min} = -10$, $y_{\max} = 14$.

Затем используется известная технология «водяных знаков», описанная в литературе, приведённой в [3], и выбирается подходящий, заранее оговоренный с «А», контейнер. Контейнер с информацией передается «А», который располагает заранее подготовленной программой восстановления «ВО». Можно передать несколько разных проекций решения для того, чтобы восстановить оригинал с малой вероятностью ошибки.

Некоторая аналогия в методе прослеживается в работе [11].

ВЫВОДЫ

Предложен новый конкретный вариант применения различных математических методов для построения системы математического обоснования возможности передачи с помощью инструментов стеганографии QR-кодов с высокой степенью достоверности. Показана возможность построения на этой основе программного обеспечения в виде специализированных приложений

для использования в транспортной отрасли, например, для передачи информации о движении грузовых отправок. Достоверность результатов подтверждается строгостью математических построений, апробированных с учётом результатов ранее опубликованных работ, а также многолетнего применения их в различных областях, таких, как расчёты разного вида в медицине, в физике плазмы, в теории и практике распознавания образов и методов обратной задачи рассеяния, электро- и магнитостатике, гидродинамике и т.д. К преимуществу метода относится возможность применить наработки и программы, имеющиеся в настоящее время, в указанных областях приложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосова Н. К. Применение преобразования Радона в стеганографии // LXXI Международная конференция «Герценовские чтения». Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена. – СПб., 2018. – С. 234–238.
2. Волосова Н. К. Преобразование Радона и уравнения Пуассона в компьютерной стеганографии // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. – Суздаль, 2018. – С. 61.
3. Волосова Н. К., Вакуленко С. П., Пастухов Д. Ф. Способы передачи QR-кода в компьютерной стеганографии // Мир транспорта. – № 5. – 2018. – С. 14–25.
4. Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф. Аппроксимация уравнения Пуассона на прямоугольнике повышенной точности // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки, Математика. – 2017. – № 12. – С. 62–77.
5. Волосова Н. К., Пастухов Д. Ф., Волосов К. А. Методы расширения области применения методов математической физики // Международная конференция «Квазилинейные уравнения и обратные задачи». QIPA Conference handbook and proceedings. – М.: МФТИ, 2018. – С. 20.
6. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 2000. – 190 с.
7. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы математической физики. – М.: Научный мир. 2003. – 317 с.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Физматлит, 2004. – 572 с.
9. Волков К. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов В. Н., Карпенко А. Г., Козелков Ф. С., Тетерина И. В. Методы ускорения газодинамических расчётов на неструктурированных сетках. – М.: Физматлит, 2013. – 536 с.
10. Бартенев О. В. Современный Фортран. – 3-е изд., доп. и перераб. – М.: Диалог-МИФИ, 2000. – 449 с.
11. Пикалов В. В., Казанцев Д. И. Итерационное восстановление возмущения синограммы в пространстве Радона для задач стеганографии // Вычислительные методы и программирование. – 2008. – № 1. – С. 1–9.

