



Поперечные колебания секции плиты в основании безбалластного пути



Бахитжан ДЖАНМУЛДАЕВ
Bahitzhan D. DZHANMULDAEV

Алексей ЛОКТЕВ
Alexey A. LOKTEV



Канат АЛЕНОВ
Kanat T. ALENOV

Зульфия ФАЗИЛОВА
Zulfiya T. FAZILOVA



Transverse Oscillation of a Base Slab Section of Ballastless Track

(текст статьи на англ. яз. –
English text of the article – p. 76)

Исследование посвящено построению математической модели плиты безбалластного основания железнодорожного пути, собранной из отдельных скреплённых между собой сегментов. Каждый прямоугольный сегмент моделируется трансверсально-изотропной предварительно напряжённой пластиной. Получено уравнение, позволяющее изучить частоты собственных колебаний прямоугольной пластины, что особенно актуально с точки зрения выбора конечной конструкции безбалластного пути для высокоскоростных магистралей. Важным вопросом при этом является демпфирование несущих конструкций и разведение частот собственных и вынужденных колебаний по различным интервалам частотного спектра. Для решения поставленных задач используется метод декомпозиций, эффективность и относительная простота которого достаточно наглядно продемонстрированы.

Ключевые слова: железная дорога, высокоскоростная магистраль, безбалластный путь, частотный спектр, математическая модель, постоянные Ламе, метод декомпозиции, интегральные и дифференциальные операторы, вязкоупругость.

Джанмулдаев Бахитжан Джамаладинович – доктор технических наук, профессор Кызылординского государственного университета им. Коркыт Ата, Кызылорда, Казахстан. Локтев Алексей Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор Российского университета транспорта, Москва, Россия. Аленов Канат Табынгулы – старший преподаватель Кызылординского государственного университета им. Коркыт Ата, Кызылорда, Казахстан. Фазилова Зульфия Тельмановна – кандидат технических наук, доцент Российского университета транспорта, Москва, Россия.

Одним из наиболее перспективных направлений развития железнодорожного транспорта признано высокоскоростное сообщение. В мировой практике строительства ВСМ для скоростей движения до 350 км/ч в качестве верхнего строения пути преобладает блочное безбалластное основание, имеющее много типов конструкций: рельс может опираться на отдельные опоры или лежать на сплошном основании, плиты могут быть сборными или монолитными, рельс удерживается скреплениями или закреплён в жёлобе плиты. Несмотря на относительно высокую начальную стоимость – в два раза дороже пути с рельсошпальной

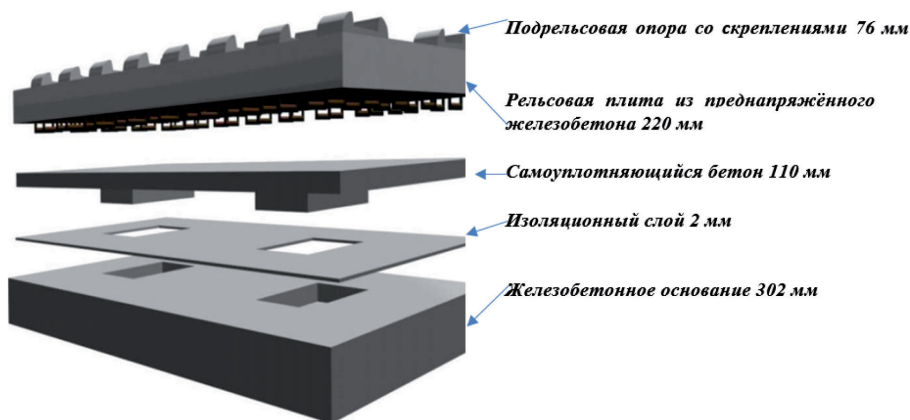


Рис. 1. Конструкция безбалластного верхнего строения пути на ВСМ Москва–Казань типа CRTS III RUS.

решёткой, безбалластные конструкции предполагают низкие эксплуатационные расходы. Кроме того, зарубежный опыт укладки, исследований и эксплуатации безбалластного пути показал его надёжность и предполагаемый срок службы до 60 лет.

Пилотным проектом высокоскоростной железнодорожной магистрали в России было заявлено строительство ВСМ по маршруту Москва–Казань с продлением на Екатеринбург. Для условий высоких скоростей до 400 км/ч, работы в холодной климатической зоне с перепадом температур в диапазоне до 100°C, смешанного движения с разной нагрузкой от колёсной пары на рельсы, а также с учётом безопасности, надёжности, прочности, ремонтпригодности и приспособляемости принята конструкция безбалластного пути типа CRTS III RUS (новейшая китайская разработка «Эр Юань»): плита из самоуплотняющегося бетона, состав которого был адаптирован к российским условиям эксплуатации. Поэлементная схема конструкции приведена на рис. 1.

Дальнейшее развитие высокоскоростного движения предполагает применение разработок конструкций безбалластного пути, создание которых невозможно без тщательного расчёта свойств материала подрельсового основания. Этот вопрос актуален как для России, так и для Казахстана.

В данном случае рассматривается плита безбалластного основания железнодорож-

ного пути как совокупность соединённых между собой отдельных сегментов из железобетона. Более подробно исследуется типовой прямоугольный сегмент плиты, моделируемый трансверсально-изотропной пластиной, предварительно напряжённой в одном из направлений, что соответствует наиболее востребованным типовым конструкциям безбалластного пути [1, с. 62; 2, с. 74].

Важным аспектом при этом является тот факт, что материал плиты обладает реологическими свойствами, описываемыми вязкоупругой моделью Максвелла. Подобный вариант позволяет подобрать механические свойства таким образом, чтобы, с одной стороны, избежать внутреннего резонанса, а с другой стороны, получить характерные величины нормальных перемещений, находящиеся в пределах нормативного интервала в зависимости от скоростей следования подвижного состава и нагрузки на отдельную колёсную пару [3, с. 5; 4, с. 792].

Предмет нашего внимания – трансверсально-изотропная предварительно напряжённая пластинка, лежащая на деформируемом основании, с размерами в плане $-l_1 \leq x \leq l_1$; $-l_2 \leq y \leq l_2$ из вязкоупругого материала. Предположим, что внешние усилия равны нулю, начальные условия отличны от нуля. В этом случае возникают свободные колебания пластинки, лежащей на упругом основании, и они описываются уравнением [4, с. 793] для $W^{(1)}$, правую часть которого необходимо положить равной нулю.



Материал пластинки, как уже отмечалось, вязкоупругий и удовлетворяет модели Максвелла:

$$A_{ij} = a_{ij} \left[\zeta(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{t-\xi}{\tau}} \zeta(\xi) d\xi \right],$$

где τ – время релаксации.

Предварительно разделив обе части уравнения [5, с. 15] на $(1 + \alpha_0)$, получим

$$\begin{aligned} & \rho_1 \left(\frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial W^{(1)}}{\partial t} \right) + \\ & + \frac{h^2}{6} \left[A_1 \left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial^3}{\partial t^3} + \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) W^{(1)} + \right. \\ & \left. + A_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right. \\ & \left. + \Delta W^{(1)} + A_3 \Delta^2 W^{(1)} \right] + \frac{s}{2h} \left[\left(\frac{\partial W^{(1)}}{\partial t} + \frac{1}{\tau} W^{(1)} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{h^2}{2} \left[(1+c_2)^{-1} A_{44}^{-1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 3(1+a_0)^{-1} A_{33}^{-1} \cdot \left(\frac{\partial^3 W^{(1)}}{\partial t^3} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial W^{(1)}}{\partial t} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - 4(1+c_2)^{-1} A_{11} A_{33}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \right) \Delta W^{(1)} \right] \right] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $A_1^{-1} = \rho_1^2 \left[(1+c_2)^{-1} A_{11} A_{33}^{-1} + 3(1+a_0)^{-1} A_{44}^{-1} \right]$;

$$A_2 = \rho_1 \left[3(A_{13}^2 - A_{11} A_{33}) A_{33}^{-1} A_{44}^{-1} + \right. \\ \left. + A_{13} A_{33}^{-1} - 2(1+c_2)(1+a_0)^{-1} \right]; \quad (2)$$

$$A_3 = 2 \left[(1+c_2)(A_{11} A_{33} - A_{13}^2) A_{33}^{-1} \right].$$

Прямоугольная пластинка шарнирно опёрта по контуру, и в этом случае граничные условия [6, с. 84, 164] для смещения $W^{(1)}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} W^{(1)} = 0; \quad \frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = -l_1; x = l_1; \\ W^{(1)} = 0; \quad \frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = -l_2; y = l_2, \end{aligned} \quad (3)$$

а начальные условия:

$$W^{(1)} = \varphi_1(x, y); \quad \frac{\partial W^{(1)}}{\partial t} = \varphi_2(x, y); \quad \frac{\partial^3 W^{(1)}}{\partial t^3} = \frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial t^2} = 0$$

при $t = 0$. (4)

При этом функции φ_1, φ_2 также должны удовлетворять условиям (3).

Решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (3), ищем в виде бесконечного двойного ряда [7, с. 155; 8, с. 317]:

$$W^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} W_{n,m}(t) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l_1} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2l_2}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (1), для $W_{n,m}$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$W_{n,m}^{IV} + B_3 W_{n,m}''' + B_2 W_{n,m}'' + B_1 W_{n,m}' + B_0 W_{n,m} = 0, \quad (6)$$

где B_j ($j = 0 \dots 3$):

$$B_3 = \frac{\tau}{2} + \frac{3s}{h_1^3} \left[(1+c_2)^{-1} A_{44}^{-1} + \right. \\ \left. + 3(1+a_0)^{-1} A_{33}^{-1} \right]; \quad (7a)$$

$$B_2 = 1 + A_2 A_1^{-1} + \frac{6}{h_1^2} A_1^{-1} \rho + \frac{\tau}{8} \frac{3s}{h_1^3}; \quad (7b)$$

$$B_1 = \left(A_2 A_1^{-1} \gamma_{n,m} \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau} \frac{6}{h_1^2} A_1^{-1} \rho \right) + \\ + \frac{s}{h_1^3} \left[(1+c_2)^{-1} A_{44}^{-1} + 3(1+a_0)^{-1} A_{33}^{-1} \right]; \quad (8a)$$

$$B_0 = A_3 A_1^{-1} \gamma_{n,m}^2 - \frac{2s}{h_1} \left[(1+c_2)^{-1} A_{11} A_{33}^{-1} \frac{1}{\tau} \gamma_{m,n}^2 \right]; \quad (8b)$$

$$\text{где } h_1 = (1+c_2)h; \quad \gamma_{n,m} = \left[\frac{(2n+1)^2}{l_1^2} + \frac{(2m+1)^2}{l_2^2} \right] \frac{\pi^2}{4}.$$

Для нахождения безразмерной частоты собственных колебаний пластинки [8, с. 216; 9, с. 121], лежащей на деформируемом основании, решение уравнения (6) ищем в виде:

$$W_{n,m}(t) = \exp\left(\frac{b_1}{h} \xi t\right); \quad (9)$$

$$b_1 = \sqrt{\frac{A_{44}}{\rho}},$$

где ξ – безразмерная комплексная величина, которая содержит как действительную часть, так и мнимую, при этом действительная характеризует затухание колебаний [10, с. 112; 11, с. 961; 12, с. 130], а мнимая часть – собственные частоты колебания.

Подставляя (9) в (6), получим для ξ частотное уравнение:

$$\xi^4 + C_4 \xi^3 + C_2 \xi^2 + C_1 \xi + C_0 = 0, \quad (10)$$

где C_j ($j = 0 \dots 4$) равны:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{A_3 \gamma_0^2}{A_1 b_4} + \frac{2s}{h} \left[(1+c_2)^{-1} A_{11} A_{33}^{-1} \gamma_1 \right]; \\ C_1 &= \frac{1}{\tau_0} \left[\frac{6\rho_1}{(1+c_2)^2 A_1} + \frac{A_2 \gamma_0}{A_1 b^2} \right] + \frac{2s}{h} \left(A_2 A_1^{-1} \gamma_0 \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_0} \frac{1}{h^2} A_1 \right); \\ C_2 &= \frac{6\rho_1}{(1+c_2)^2 b_1^2} + \frac{A_0 \gamma_0}{A_1 b_1^2} + \frac{1}{\tau_0^2} - \frac{3s}{h^2}; \\ C_3 &= \frac{2}{\tau_0} + \frac{2hs}{3}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\gamma_0 = \left[\frac{(2n+1)^2 h^2}{l_1^2} + \frac{(2m+1)^2 h^2}{l_2^2} \right] \frac{\pi}{4}.$$

Как видно из (11), коэффициенты c_j в уравнении (10) положительны, и по теореме Гурвица действительные части корней этого уравнения отрицательны, что и характеризует затухание колебаний [13, с. 20; 14, с. 488; 15, с. 418].

Общее решение (6) запишем в виде:

$$W_{n,m}(t) = e^{-\alpha_1 t} (a_{m,n} \sin \beta_1 t + b_{m,n} \cos \beta_1 t) + e^{-\alpha_2 t} (c_{m,n} \sin \beta_2 t + d_{m,n} \cos \beta_2 t), \quad (12)$$

где $\alpha_1 = \operatorname{Re} \xi_{\zeta_1}$; $\alpha_2 = \operatorname{Re} \xi_{\zeta_2}$; $\beta_1 = \operatorname{Im} \xi_{\zeta_1}$; $\beta_2 = \operatorname{Im} \xi_{\zeta_2}$.

Постоянные интегрирования $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $d_{m,n}$ [7, с. 98; 12, с. 131; 16, с. 5] находятся из начальных условий (4).

ВЫВОДЫ

Проведённые исследования относительно собственных частот колебаний, позволяют не только правильно подобрать геометрические размеры сегментов плиты безбалластного основания, но и вычислить механические характеристики используемых материалов с учётом их вязкоупругих свойств. Предложенная методика расчёта параметров поведения плиты также может быть адаптирована для учёта подвижной нагрузки, что поможет более точно описать природу деформирования конструкций пути и спрогнозировать их состояние после многоцикловых и высокочастотных воздействий колёсных пар экипажей с учётом анизотропии и предварительного напряжения плиты.

Метод декомпозиций хорошо зарекомендовал себя в решении подобных задач и может быть рекомендован при вычислении механических характеристик в различных направлениях анизотропии для плиты безбалластного основания, её армирования и ожидаемых напряжений в зависимости от планируемых скоростей транспортных средств и нагрузки на ось, что особенно актуально при проектировании и строительстве высокоскоростных железнодорожных магистралей.

Полученное в работе уравнение позволяет получить частоты собственных колебаний секции плиты безбалластного основания железнодорожного пути, а также определить нормальные перемещения задаваемых точек конструкции. Изменение начальных условий и условий закрепления секции плиты по контуру позволят получить модель железобетонного основания для различных инженерно-геологических факторов в зависимости от местности строительства железной дороги.

ЛИТЕРАТУРА

1. Локтев А. А., Сычев В. П., Локтев Д. А., Дмитриев В. Г. Автоматизированная система выявления дефектов колёс подвижного состава на основе оценки ударного неосесимметричного воздействия колеса на рельс при моделировании верхнего строения пути ортотропной пластиной // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2017. – № 4. – С. 59–70.

2. Виноградов В. В., Локтев А. А., Фазилова З. Т. Математическое моделирование участков переменной жёсткости перед искусственными сооружениями // Мир транспорта. – 2018. – № 3. – С. 72–85.

3. Loktev A., Sychev V., Gluzberg V., Gridasova E. Modeling the dynamic behavior of railway track taking into account the occurrence of defects in the system wheel-rail // В сборнике: MATEC Web of Conferences 26. Сер. «RSP 2017–26th R-S-P Seminar 2017 Theoretical Foundation of Civil Engineering» 2017. – № 00108.

4. Пшеничников Г. И. Метод декомпозиции решения уравнений и краевых задач // Доклады Академии наук СССР. – 1985. – Т. 282. – № 4. – С. 792–794.

5. Пшеничников Г. И. Решение некоторых задач строительной механики методом декомпозиции // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1986. – № 4. – С. 12–17.

6. Джанмулдаев Б. Д., Аленов К. Т. Построение линейной теории динамического поведения строительных конструкций в виде пластин, находящихся под поверхностью деформируемой среды // Наука и мир. – 2015. – № 5. – С. 46–53.

7. Джанмулдаев Б. Д. Математические методы при исследовании колебаний плоских элементов конструкций, взаимодействующих с деформируемой средой: Монография. – Кызылорда, 2002. – 214 с.

8. Ляв А. Математическая теория упругости. – М. – Л.: ОНТИ, 1935. – 674 с.

9. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. – М.: Иностранная литература, 1958. – Т. 1, 2. – 854 с.

10. Филиппов И. Г., Чебан В. Г. Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней. – Кишинев: Штиинца, 1988. – 190 с.

11. Loktev A. A., Loktev D. A. Transverse impact of a ball on a sphere with allowance for waves in the target // Technical Physics Letters. – 2008. – Т. 34. – № 11. – pp. 960–963.

12. Локтев А. А., Локтев Д. А. Решение задачи ударного взаимодействия твёрдого тела и сферической оболочки лучевым методом // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2007. – № 2. – С. 128–135.

13. Сычёв В. П., Локтев А. А., Локтев Д. А., Виноградов В. В. Повышение информативности оценки содержания железнодорожного пути // Мир транспорта. – 2017. – № 2. – С. 20–31.

14. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V., Loktev A. A. The analysis of thin-walled building structures subjected to impact excitation // В сборнике: 4th International Ph. D. Symposium in Civil Engineering. – 2002. – pp. 487–492.

15. Локтев А. А. Удар вязкоупругого тела по упругой изотропной пластинке // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – № 3. – С. 417–425.

16. Локтев А. А. Упругий поперечный удар по круглой ортотропной пластинке // Письма в Журнал технической физики. – 2005. – № 18. – С. 4–9. ●

Координаты авторов: **Джанмулдаев Б. Д.** – filial69@rambler.ru, **Локтев А. А.** – aaloktev@yandex.ru, **Аленов К. Т.** – alen80k@mail.ru, **Фазилова З. Т.** – fazil_1905@mail.ru.

Статья поступила в редакцию 24.12.2018, принята к публикации 05.02.2019.

