DOI: 10.30932/1992-3252-2019-17-2-26-43

УДК 519.86

Оптимальное обслуживание дискретных объектов на плоскости, в пространстве и заданных границах сферы

Анатолий ГУСЕВ
Anatoly I. GUSEV

Сергей ГУСЕВ
Sergey A. GUSEV

Александр МИЛЕВСКИЙ
Alexander S. MILEVSKY

Гусев Анатолий Иванович *— кандидат физико-математических наук, доцент Российского университета транспорта, Москва, Россия.*
Гусев Сергей Анатольевич *— экономист строительной компании «Самолёт Девелопмент», Москва, Россия.*
Милевский Александр Станиславович *— кандидат физико-математических наук, доцент Российского университета транспорта, Москва, Россия.*

Optimal Maintenance of Discrete Objects on the Plane, in Space and in Given Boundaries of the Sphere

(текст статьи на англ. яз. – English text of the article – p. 36)

Авторами статьи моделируется математическое решение задач, связанных с оптимальным распределением и обслуживанием дискретных объектов, принадлежащих, в том числе и транспортной среде. Рассмотрены варианты размещения от одного до десяти пунктов, которым предназначено находиться в пространстве, на прямой или плоскости, в границах сферы определённого радиуса.

Ключевые слова: транспорт, математическая модель, закон распределения, задача Вебера, задача Ферма, дискретные объекты, оптимальное размещение, плоскость, пространство, прямая, сфера.

Оптимальное размещение транспортных объектов входит в число задач, решение которых имеет ключевое значение для минимизации последующих затрат, связанных с предоставлением транспортных услуг. Нами предлагается ряд моделей математического решения этой задачи применительно к различным условиям. Сама задача предполагает n упорядоченных объектов $A_1, A_2, ..., A_n$. Требуется найти места размещения для p-пунктов обслуживания $C_1, C_2, ..., C_p$ так, чтобы минимизировать суммарные затраты на предстоящее в них обслуживание. Подразумевается, что каждый объект привязывается к одному пункту, а каждый пункт потенциально может обслужить любое количество клиентов.

Существует много постановок аналогичных задач, в том числе для случаев, когда выбор места размещения пунктов ограничен заданным заранее множеством точек, например, вершинами графа. Такая задача, поставленная на графе общего вида (о нахождении так называемой p-медианы графа[1]), как известно, относится к классу NP-полных [1, с. 193–195]. Каждый пункт обслуживает целый кластер объектов, и сложность решения связана с быстрым ростом количества вариантов разбиения на кластеры. При внесении ограничений на эти варианты удаётся разработать эффективные алгоритмы. Так, например, в [2, с. 60–62] предложен $O(pn^2)$ – алгоритм для случая, когда граф является деревом. В [3] рассматривается случай, когда размещение пунктов ограничено некоторой линией в трёхмерном пространстве. В [4–7] исследуются задачи об оптимальном расположении магистрали, оптимальном распределении средств между программами обеспечения безопасности движения на транспорте, оптимальном размещении социальных объектов при нормальном и равномерном их распределении.

Здесь мы предположим, что каждый кластер, обслуживаемый данным пунктом, представляет собой «непрерывный» участок объектов, то есть, если C_1 обслуживает A_1 и A_5, то он обслуживает и все объекты между ними – A_2, A_3, A_4. Таким образом, требуется оптимально разбить множество объектов обслуживания на p-«непрерывных» участков, и для каждого участка найти оптимальное расположение искомых пунктов.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_p$ – индексы для разбиения списка объектов обслуживания на зоны, т.е. $A_1, \ldots, A_{i_1}$ – первая зона обслуживания, которая обслуживается пунктом C_1, зона $A_{i_2+1}, \ldots, A_{i_3}$ – пунктом C_2 и т.д. Пусть d_{ij} – расстояния от объекта A_i до пункта C_j, а $m_1, \ldots, m_n$ – «веса» объектов обслуживания. Тогда затраты, связанные с пунктом C_j, равны:

$$F_j = \sum_{i=i_{j-1}+1}^{i_j} m_i d_{ij}.$$

Суммарные затраты на обслуживание:

$$F = \sum_{j=1}^{p} F_j .$$

[1] Задача о нахождении p-медианы данного графа – это задача о размещении заданного числа p-пунктов обслуживания, при котором сумма кратчайших расстояний от вершин графа до ближайших пунктов минимальна.

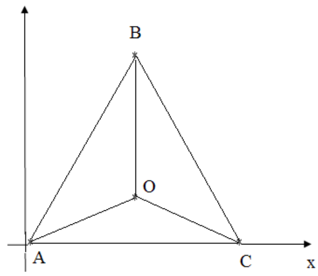

Рис. 1. Точка Ферма треугольника ABC.

Требуется найти минимум F по всем возможным наборам $i_1, i_2, \ldots, i_p$ и местам расположения объектов обслуживания $A_i, \ldots, A_j$ (i ≤ j).

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

В основе – метод динамического программирования.

Обозначим как $G_k(i, j)$ минимальные суммарные затраты для подзадачи, в которой участвуют только объекты $A_i, \ldots, A_j$ (i ≤ j, k ≤ j – i + 1), а требуемое количество пунктов равно k.

1. Методом градиентного спуска для всех зон $A_i, \ldots, A_j$ (i ≤ j) находим оптимальное расположение и оптимальные затраты $G_1(i, j)$ в случае одного пункта обслуживания. Это – известная задача Вебера.

2. Находим оптимальное расположение двух пунктов и оптимальные затраты:

$$G_2(i, \mathrm{n}) = \min_{i \le k < n}(G_1(i, \mathrm{k}) + G_1(\mathrm{k}+1, \mathrm{n})),$$
$$\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}-1.$$

3. И так далее:

$$G_3(i, \mathrm{n}) = \min_{i \le k < n-1}(G_1(i, \mathrm{k}) + G_2(\mathrm{k}+1, \mathrm{n})),$$
$$\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}-2;$$
$$G_p(1, \mathrm{n}) = \min_{i \le k < n-p+2}(G_1(i, \mathrm{k}) + G_{p-1}(\mathrm{k}+1, \mathrm{n})).$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим ряд примеров на плоскости. Пусть координаты объектов обслуживания $A_i(x_i, y_i)$, а координаты пункта обслуживания $C_j(x, y)$, тогда

$$d_{ij} = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}.$$

Пример 1. Имеются три объекта A(0; 0), B (5; 10), C(10; 0). Требуется оптимальным образом разместить пункт обслуживания (например, спасательную вертолётную службу), если все три объекта равноправны.

Это известная задача Ферма: найти точку O (см. рис. 1), такую, чтобы сумма расстояний OA+OB+OC была минимальна. Если углы треугольника меньше 120°

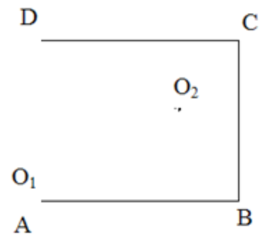

Рис. 2. Первый вариант оптимального расположения двух спасательных служб.

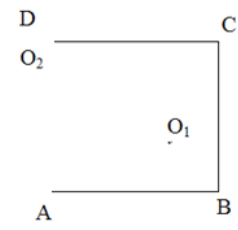

Рис. 3. Второй вариант оптимального расположения двух спасательных служб.

(в нашем случае они острые), то искомая точка единственная (точка Ферма), и углы АОС, АОВ, ВОС равны 120°. Вычисления по алгоритму дают О(5; 2,85).

Пример 2. В предыдущей задаче изменим координаты на А(0; 0), В(-5; 5), С(10; 0).

В этом случае угол ВАС = 135° – тупой, и в точке А достигается минимум. Вычисления по алгоритму дают О(0; 0).

Пример 3. В условиях примера 1 пусть точка В в полтора раза важнее точек А и С. В этом случае надо найти точку О, чтобы сумма расстояний ОА + 1,5ОВ + ОС была минимальна.

Вычисления по алгоритму дают О(5; 5,655).

Пример 4. В условиях примера 1 нужно найти оптимальное расположение двух спасательных вертолётных служб.

Здесь $F_{min} = 10$: O_1 в любой точке на стороне АС, а O_2 в точке В.

Пример 5. Имеются четыре объекта А(0; 0), В(20; 0), С(20; 20), D(0; 20) (образующих маршрут ABCD). Надо оптимальным образом разместить:

а) одну спасательную вертолётную службу, если все объекты равноправны;

б) две спасательные вертолётные службы, если все объекты равноправны.

Решение:

а) В этом случае ответ очевиден – на пересечении диагоналей квадрата. Результат работы программы – координаты спасательной службы (10; 10);

б) Результат работы программы:

$F_{\min} = 38{,}63708.$

опт. вар. № 1

$x(1) = 0 \quad y(1) = 0.$

$x(2) = 15{,}75; \quad y(2) = 15{,}75.$

опт. вар. № 2

$x(1) = 15{,}75; \quad y(1) = 4{,}25.$

$x(2) = 0; \quad y(2) = 20.$

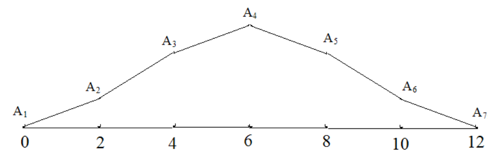

Рис. 4. Расположение семи населённых пунктов.

Таким образом, есть два оптимальных симметричных варианта.

Первый: $O_1(0, 0)$, а $O_2(15{,}75; 15{,}75)$ – точка Ферма для треугольника BCD (см. рис. 2).

Второй: O_2 в точке D, а $O_1(15{,}75; 4{,}25)$ – точка Ферма для треугольника АВС (см. рис. 3).

Замечание. Ещё два очевидных варианта для квадрата:

O_1 в точке В, а O_2 – точка Ферма для треугольника ADC;

O_1 в точке С, а O_2 – точка Ферма для треугольника ADB.

Эти варианты не подходят для рассмотренной модели, т.к. мы имеем дело не с квадратом, а с маршрутом ABCD (связи А с D нет). Циклические маршруты рассмотрим позже.

Пример 6. Имеются семь населённых пунктов $A_1(0,0)$, $A_2(2,1)$, $A_3(4,3)$, $A_4(6,4)$, $A_5(8,3)$, $A_6(10,1)$, $A_7(12,0)$ (см. рис. 4). Требуется оптимальным образом разместить:

а) одну спасательную вертолётную службу, если все объекты равноправны;

б) две спасательные вертолётные службы, если все объекты равноправны;

в) три спасательные вертолётные службы, если все объекты равноправны;

г) три спасательные вертолётные службы, если показатели численности населения соотносятся как 1 : 1,3 : 1,5 : 2 : 2,5 : 3 : 3,5.

Решение:

а) Результат работы программы:

$F_{\min} = 27{,}16705.$

опт. вар. только один

$x(1) = 6; \quad y(1) = 2{,}51.$

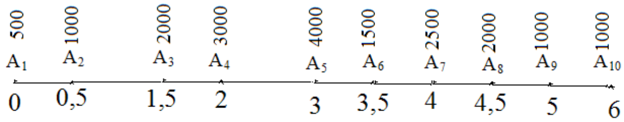

Рис. 5. Расположение десяти населённых пунктов на прямой.

Существует один оптимальный вариант размещения спасательной службы O(6; 2,51).

б) Результат работы программы:

$F_{\min} = 15{,}10434.$

опт. вар. № 1

$x(1) = 2; \quad y(1) = 1.$

$x(2) = 8{,}85; \quad y(2) = 2{,}13.$

опт. вар. № 2

$x(1) = 3{,}15; \quad y(1) = 2{,}13.$

$x(2) = 10; \quad y(2) = 1.$

Существуют два оптимальных симметричных варианта.

Первый: одна точка $O_1(2,1)$ – точка Ферма для треугольника $A_1A_2A_3$, а $O_2(8{,}85; 2{,}13)$ – точка пересечения диагоналей четырёхугольника $A_4A_5A_6$ A_7.

Второй: $O_2(10,1)$ – точка Ферма для треугольника $A_5A_6A_7$, а $O_1(3{,}15; 2{,}13)$ – точка пересечения диагоналей четырёхугольника A_1 A_2A_3 A_4.

в) Результат работы программы:

$F_{\min} = 8{,}944272.$

опт. вар. только один

$x(1) = 1{,}8; \quad y(1) = 0{,}9.$

$x(2) = 6; \quad y(2) = 4.$

$x(3) = 10{,}2; \quad y(3) = 0{,}9.$

Существует один оптимальный вариант размещения спасательной службы $O_1(1{,}8; 0{,}9)$ – точка на отрезке A_1A_2 (а это означает, что вместо неё можно взять любую точку этого отрезка); $O_2(6; 4)$ – точка Ферма для треугольника $A_3A_4A_5$; $O_3(10{,}2; 0{,}9)$ – точка на отрезке A_6A_7 (а это означает, что вместо неё можно взять любую точку этого отрезка).

г) Результат работы программы:

$F_{\min} = 17{,}6591.$

опт. вар. только один

$x(1) = 2; \quad y(1) = 1.$

$x(2) = 8; \quad y(2) = 3.$

$x(3) = 12; \quad y(3) = 0.$

Существует один оптимальный вариант размещения: $O_1(2; 1)$ – точка Ферма для треугольника $A_1A_2A_3$; $O_2(8; 3)$ – точка Ферма для треугольника $A_4A_5A_6$ и $O_3(12; 0)$ расположились в точке A_7. Спасательные службы сместились вправо.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРЯМОЙ

Метод оптимального размещения спасательных служб на плоскости применим и для оптимального размещения на прямой.

Пример 7. Имеются 10 населённых пунктов, расположенных на прямой:

$A_1(0)$; $A_2(0{,}5$ км); $A_3(1{,}5$ км); $A_4(2$ км); $A_5(3$ км); $A_6(3{,}5$ км); $A_7(4$ км); $A_8(4{,}5$ км); $A_9(5$ км); $A_{10}(6$ км) (см. рис. 5). В этих пунктах проживают соответственно 500, 1000, 2000, 3000, 4000, 1500, 2500, 2000, 1000, 1000 человек.

Надо оптимальным образом разместить: а) одну автобусную остановку; б) две; в) три; г) четыре; д) пять.

Решение:

а) Получаем

$F_{\min} = 42{,}5.$

опт. вар. только один

$x(1) = 3; \quad y(1) = 0.$

Одну остановку следует разместить в A_5.

б) Оптимальное расположение двух остановок: в A_3 и A_7.

$F_{\min} = 24.$

опт. вар. только один

$x(1) = 1{,}5; \quad y(1) = 0.$

$x(2) = 4; \quad y(2) = 0.$

в) Оптимальное расположение трёх остановок: в A_3, A_5 и A_8.

$F_{\min} = 14{,}5.$

опт. вар. только один

$x(1) = 1{,}5; \quad y(1) = 0.$

$x(2) = 3; \quad y(2) = 0.$

$x(3) = 4{,}5; \quad y(3) = 0.$

г) Оптимальное расположение четырёх остановок: в A_2, A_4, A_5 и A_8.

$F_{\min} = 10{,}5.$

опт. вар. только один

$x(1) = 0{,}5; \quad y(1) = 0.$

$x(2) = 2; \quad y(2) = 0.$

$x(3) = 3; \quad y(3) = 0.$

$x(4) = 4{,}5; \quad y(4) = 0.$

д) Оптимальное расположение пяти остановок: в A_2, A_4, A_5, A_9 и A_{10}.

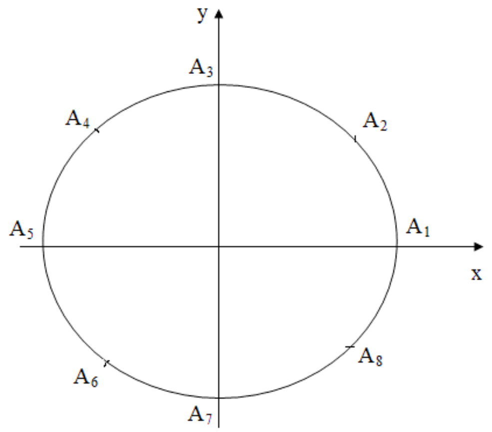

Рис. 6. Расположение посадочных площадок.

$F_{\min} = 7,5.$

опт. вар. только один

$x(1) = 0,5; \quad y(1) = 0.$

$x(2) = 2; \quad y(2) = 0.$

$x(3) = 3; \quad y(3) = 0.$

$x(4) = 4,5; \quad y(4) = 0.$

$x(5) = 6; \quad y(5) = 0.$

ЦИКЛИЧЕСКИЕ МАРШРУТЫ

Пусть имеются *n* упорядоченных объектов обслуживания $A_1, A_2, ..., A_n$, образующих цикл, т.е. связи между любыми соседними объектами и между A_1 и A_n. Как и для маршрута (концы не имеют связи), надо оптимально разбить объекты обслуживания на *m* неразрывных зон, для каждой зоны найти оптимальное расположение пункта обслуживания, чтобы общие затраты были минимальны.

Если рассмотреть *n – m + 1* задач о маршрутах ($A_1, A_2, ..., A_n$; $A_2, A_3, ..., A_n, A_1$; $A_3, A_4, ..., A_n, A_1, A_2$ и т.д.), то любое оптимальное расположение для цикла есть среди оптимальных расположений маршрутов. Поэтому применительно к циклу надо найти оптимальные расположения для каждого отдельного маршрута и среди них выбрать менее затратные.

Пример 8. Условие примера 5: имеются четыре важнейших объекта A(0; 0), B(20; 0), C(20; 20), D(0; 20) (образующих цикл). Как оптимальным образом разместить две спасательные вертолётные службы, если все объекты равноправны?

Решение. *Надо рассмотреть 4–2 + 1 = 3* маршрута.

1. Для маршрута ABCD в примере 5 уже дан ответ:

$F_{\min} = 38,63708.$

опт. вар. № 1

$x(1) = 0; \quad y(1) = 0.$

$x(2) = 15,75; \quad y(2) = 15,75.$

опт. вар. № 2

$x(1) = 15,75; \quad y(1) = 4,25.$

$x(2) = 0; \quad y(2) = 20.$

Есть два оптимальных симметричных варианта.

Первый: $O_1(0, 0)$ а $O_2(15,75; 15,75)$ – точка Ферма для треугольника BCD (см. рис. 2).

Второй: O_2 в точке D, а $O_1(15,75; 4,25)$ – точка Ферма для треугольника ABC (см. рис. 3).

2. Для маршрута BCDA имеем:

$F_{\min} = 38,63708.$

опт. вар. № 1

$x(1) = 20; \quad y(1) = 0.$

$x(2) = 4,25; \quad y(2) = 15,75.$

опт. вар. № 2

$x(1) = 15,75; \quad y(1) = 15,75.$

$x(2) = 0; \quad y(2) = 0.$

Есть два оптимальных симметричных варианта.

Первый: $O_1(20,0)$, а $O_2(4,25; 15,75)$ – точка Ферма для треугольника ACD.

Второй: O_2 в точке A, а $O_1(15,75; 15,75)$ – точка Ферма для треугольника BCD (этот вариант уже был).

3. Для маршрута CDAB имеем:

$F_{\min} = 38,63708.$

опт. вар. № 1

$x(1) = 20; \quad y(1) = 20.$

$x(2) = 4,25; \quad y(2) = 4,25.$

опт. вар. № 2

$x(1) = 4,25; \quad y(1) = 15,75.$

$x(2) = 20; \quad y(2) = 0.$

Есть два оптимальных симметричных варианта.

Первый: $O_1(20; 20)$, а $O_2(4,25; 4,25)$ – точка Ферма для треугольника ADB.

Второй: O_2 в точке B, а $O_1(4,25; 15,75)$ – точка Ферма для треугольника ACD (этот вариант уже был).

Получаем для цикла ABCD четыре оптимальных варианта размещения:

1. $O_1(0; 0)$, а $O_2(15,75; 15,75)$.
2. $O_1(15,75; 4,25)$, а $O_2(0; 20)$.
3. $O_1(20; 0)$, а $O_2(4,25; 15,75)$.
4. $O_1(20; 20)$, а $O_2(4,25; 4,25)$.

Пример 9. Для обслуживания кольцевого маршрута, представляющего окружность радиуса 25 км, оборудованы 8 посадочных площадок A_1, A_2, ..., A_8 (см. рис. 6), расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга. Интенсивность пассажиропотоков соотносится как 1,5 : 1,8 : 2 : 1,7 : 1,6 : 1,4 : 1 : 1,3 соответственно. Требуется провести анализ и найти оптимальное размещение:

а) одной вертолётной спасательной службы;

б) двух вертолётных спасательных служб;

в) трёх вертолётных спасательных служб.

Решение:

а) Существует единственный оптимальный вариант размещения одной спасательной службы.

$$F_{\min} = 302{,}6217.$$
$$x(1) = -0{,}247; \quad y(1) = 6{,}13.$$

O(-0247 км; 6,13 км) – оптимум.

б) Из рассмотренных маршрутов A_1, A_2, ..., A_8; A_2, A_3, ..., A_1; A_3, A_4, ..., A_2; A_4, A_5, ..., A_3; A_5, A_6, ..., A_4; A_6, A_7, ..., A_5; A_7, A_8, ..., A_6 минимальные затраты при оптимальном размещении двух вертолётных спасательных служб имеет маршрут A_4, A_5, ..., A_3.

$$F_{\min} = 206{,}4624.$$
$$x(1) = -22{,}74; \quad y(1) = -0{,}64.$$
$$x(2) = 16{,}2; \quad y(2) = 15{,}11.$$

O_1(-22,74 км; -0,64 км); O_2(16,2 км; 15,11 км) – оптимальное расположение двух вертолётных спасательных служб.

в) Из анализа результатов для всех маршрутов получили два оптимальных варианта размещения:

$$F_{\min} = 206{,}4624.$$
опт. вар. № 1
$$x(1) = 0; \quad y(1) = 25.$$
$$x(2) = -25; \quad y(2) = 0.$$
$$x(3) = 17{,}68; \quad y(3) = 17{,}68.$$
опт. вар. № 2
$$x(1) = 0; \quad y(1) = 25.$$
$$x(2) = -17{,}68; \quad y(2) = -17{,}68.$$
$$x(3) = 25; \quad y(3) = 0.$$

Итак, имеются два оптимальных варианта размещения для трёх спасательных служб.

Первый: O_1(0; 25 км); O_2(-25 км; 0); O_3(17,68 км; -17,68 км).

Второй: O_1(0;25км); O_2(-17,68км; -17,68 км); O_3(25 км; 0 км).

НЕПРЕРЫВНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ ОБЪЕКТОВ

Пусть имеется кривая L (на плоскости или в пространстве), на которой размещены объекты обслуживания (например, железная или автомобильная дорога). Пусть A – точка на кривой, O – начальная, а K – конечная точка кривой (см. рис. 7). Обозначим через s длину кривой от O до A. Для обслуживания объекта в точке A(s) имеется весовой коэффициент m(s). Пусть C – некоторая точка, из которой будет происходить обслуживание. Тогда затраты на обслуживание равны криволинейному интегралу

$$\int_O^K |CA| \cdot m(s) ds.$$

Задача состоит в том, чтобы найти оптимальное расположение точки C, соответствующее минимальным затратам.

Назовём и более общую задачу: разбить кривую L на m частей, для каждой части найти оптимальное расположение пункта обслуживания так, чтобы общие затраты на обслуживание были минимальны.

Поставленную задачу решить аналитически невозможно (за исключением постановки тривиальных задач), однако приближённо можно – с помощью изложенного выше метода. Так как криволинейный интеграл является пределом интегральной суммы (шаг разбиения делаем постоянным), а для интегральной суммы мы можем найти оптимальное расположение, то при большом числе разбиений получим искомое приближённое решение.

Рассмотрим конкретные примеры:

Пример 10. Для участка однородной (m(s) = 1) железной дороги, представляющего собой полуокружность радиуса 30 км (см. рис. 8), надо найти оптимальное расположение:

а) одной спасательно-обслуживающей вертолётной службы;

б) двух спасательно-обслуживающих вертолётных служб;

в) трёх спасательно-обслуживающих вертолётных служб.

Решение:

а) Результаты оптимальных размещений при разном количестве разбиений:

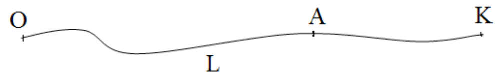

Рис. 7. Схематическое размещение дороги.

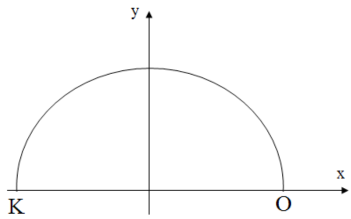

Рис. 8. Схема участка однородной железной дороги.

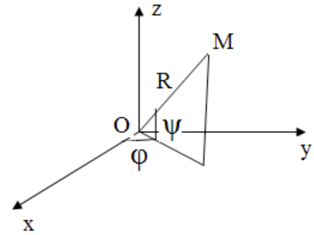

Рис. 9. Сфера радиуса R.

$$\begin{array}{ll} \textit{число разбиений} = 20 & \textit{число разбиений} = 40 \\ F_{\min} = 444{,}6107. & F_{\min} = 871{,}9875. \\ \textit{опт. вар.} & \textit{опт. вар.} \\ x(1) = 0; \quad y(1) = 22{,}85. & x(1) = 0; \quad y(1) = 23{,}26. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \textit{число разбиений} = 80 & \textit{число разбиений} = 100 \\ F_{\min} = 1726{,}943. & F_{\min} = 2154{,}438. \\ \textit{опт. вар.} & \textit{опт. вар.} \\ x(1) = 0; \quad y(1) = 23{,}43. & x(1) = 0; \quad y(1) = 23{,}48. \end{array}$$

Оптимальное расположение (с точностью 50 метров) находится в точке O(0; 23,48 км).

б) Результаты оптимальных размещений при разном количестве разбиений:

$$\begin{array}{ll} \textit{число разбиений} = 20 & \textit{число разбиений} = 40 \\ F_{\min} = 241{,}5657. & F_{\min} = 471{,}9252. \\ \textit{опт. вар.} & \textit{опт. вар.} \\ x(1) = 20{,}90; \quad y(1) = 19{,}33. & x(1) = 20{,}64; \quad y(1) = 19{,}88. \\ x(2) = -20{,}90; \quad y(2) = 19{,}33. & x(2) = -20{,}63; \quad y(2) = 19{,}89. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \textit{число разбиений} = 80 & \textit{число разбиений} = 100 \\ F_{\min} = 932{,}9471. & F_{\min} = 1163{,}457. \\ \textit{опт. вар.} & \textit{опт. вар.} \\ x(1) = 20{,}47; \quad y(1) = 20{,}14. & x(1) = 20{,}44; \quad y(1) = 20{,}17. \\ x(2) = -20{,}47; \quad y(2) = 20{,}13. & x(2) = -20{,}44; \quad y(2) = 20{,}18. \end{array}$$

Оптимальное расположение (с точностью 40 метров) находится в точках O_1(20,44 км; 20,17 км); O_2(-20,44 км; 20,18 км).

в) Результаты оптимальных размещений при разном количестве разбиений:

$$\begin{array}{ll} \textit{число разбиений} = 80 & \textit{число разбиений} = 100 \\ F_{\min} = 630{,}09. & F_{\min} = 785{,}7234. \\ \textit{опт. вар.} & \textit{опт. вар.} \\ x(1) = 25{,}63; \quad y(1) = 14{,}60. & x(1) = 25{,}78; \quad y(1) = 14{,}37. \\ x(2) = 0; \quad y(2) = 29{,}50. & x(2) = 0; \quad y(2) = 29{,}46. \\ x(3) = -25{,}64; \quad y(3) = 14{,}59. & x(3) = -25{,}78; \quad y(3) = 14{,}37. \end{array}$$

Оптимальное расположение (с точностью 200 метров) находится в точках O_1(25,75 км; 14,37 км); O_2(0;29,46 км); O_3(-25,78 км; 14,37 км).

Пример 11. Сохраняется базовое условие предыдущего примера, но дорога при этом неоднородна – $m(\phi) = 1 + \phi/\pi$, т.е. от O ($m(0) = 1$) до K ($m(\pi) = 2$) ухудшается. Требуется найти оптимальное расположение:

а) одной спасательно-обслуживающей вертолётной службы;

б) двух спасательно-обслуживающих вертолётных служб.

Решение:

а) Результаты оптимальных размещений при разном количестве разбиений:

$$\begin{array}{ll} \textit{число разбиений} = 80 & \textit{число разбиений} = 100 \\ F_{\min} = 2524{,}94. & F_{\min} = 3150{,}322. \\ \textit{опт. вар.} & \textit{опт. вар.} \\ x(1) = -6{,}98; \quad y(1) = 23{,}04. & x(1) = -6{,}97; \quad y(1) = 23{,}08. \end{array}$$

Оптимальное расположение (с точностью 40 метров) находится в точке O(-6,97 км; 23,08 км). Ввиду ухудшения дороги в сторону K оптимальная точка также сместилась влево.

б) Результаты оптимальных размещений при разном количестве разбиений:

$$\begin{array}{ll} \textit{число разбиений} = 80 & \textit{число разбиений} = 100 \\ F_{\min} = 1378{,}391. & F_{\min} = 1719{,}109. \\ \textit{опт. вар.} & \textit{опт. вар.} \\ x(1) = 16{,}44; \quad y(1) = 23{,}22. & x(1) = 16{,}42; \quad y(1) = 23{,}25. \\ x(2) = -23{,}09; \quad y(2) = 17{,}55. & x(2) = -23{,}06; \quad y(2) = 17{,}61. \end{array}$$

Оптимальное расположение (с точностью 60 метров) находится в точках O_1(16,43 км; 23,25 км); O_2(-23,06 км; 17,61 км).

ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗМЕЩЕНИЯ НА СФЕРЕ

Пусть M – точка на сфере радиуса R имеет координату долготы ϕ – ($-\pi \le \phi \le \pi$) и координату широты ψ ($(-\pi/2 \le \phi \le \pi/2$) (см. рис. 9), тогда вектор OM имеет декартовы координаты ($R \cdot \cos\psi \cdot \cos\phi$; $R \cdot \cos\psi \cdot \sin\phi$; $R \cdot \sin\psi$).

Пусть мы имеем две точки на сфере $M_1(\phi_1; \psi_1)$, $M_2(\phi_2; \psi_2)$. Обозначим через ω угол между векторами OM_1 и OM_2, тогда $\cos\omega = \cos\psi_1 \cdot \cos\phi_1 \cdot \cos\psi_2 \cdot \cos\phi_2 + \cos\psi_1 \cdot \sin\phi_1 \cdot \cos\psi_2 \cdot \sin\phi_2 + \sin\psi_1 \cdot \sin\psi_2 = \cos\psi_1 \cdot \cos\psi_2 \cdot \cos(\phi_2 - \phi_1) + \sin\psi_1 \cdot \sin\psi_2$.

Отсюда получаем формулу для расстояния между точками $M_1(\phi_1; \psi_1)$, $M_2(\phi_2; \psi_2)$ на сфере:

$D = R \cdot \arccos(\cos\psi_1 \cdot \cos\phi_1 \cdot \cos\psi_2 \cdot \cos\phi_2 + \cos\psi_1 \cdot \sin\phi_1 \cdot \cos\psi_2 \cdot \sin\phi_2 + \sin\psi_1 \cdot \sin\psi_2 = R \cdot \arccos((\cos\psi_1 \cdot \cos\psi_2 \cdot \cos(\phi_2 - \phi_1) + \sin\psi_1 \cdot \sin\psi_2)$.

Теперь аналогично предыдущим разделам ставится задача об оптимальном расположении пунктов обслуживания для объектов, расположенных на сфере. Алгоритм решения поставленной задачи такой же, как и ранее показанный.

Пример 12. На сфере радиуса 6400 км задан маршрут $A_1A_2A_3$, где $A_1(0; 0)$; $A_2(\pi/2; 0)$; $A_3(0; \pi/2)$ (см. рис. 10). Весовые коэффициенты точек одинаковы.

Требуется найти:

а) точку на сфере, для которой сумма расстояний до заданных минимальна (точка Ферма на сфере);

б) две точки, для которых сумма расстояний от заданных до ближайшей из этих двух минимальна.

Решение:

а) существует единственный оптимальный вариант размещения.

$F_{\min} = 28,6595.$

опт. вар.

$x(1) = 0,78544 \quad y(1) = 0,6157.$

O(0,7854; 0,6157) – центральная точка восьмой части сферы.

б) имеются два оптимальных варианта размещения.

$F_{\min} = 15,7114.$

опт. вар. № 1	*опт. вар. № 2*
$x(1) = 0; \quad y(1) = 0.$	$x(1) = 0,90; \quad y(1) = 0.$
$x(2) = 1,57; \quad y(2) = 1,28.$	$x(2) = 1; \quad y(2) = 1,57.$

Первый: $O_1(0; 0)$ (в точке A_1), а O_2 в любой точке дуги A_2A_3.

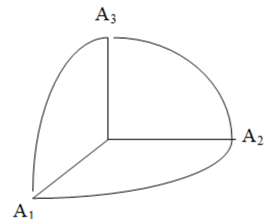

Рис. 10. Расположение маршрута $A_1A_2A_3$ на сфере.

Второй: O_1 – в любой точке дуги A_1A_2; O_2 в точке A_3.

Замечание. Рассматривается маршрут $A_1A_2A_3$ (связи A_1A_3 нет), поэтому вариант решения O_1 в точке A_2, а O_2 в любой точке дуги A_1A_3 не учтён.

Пример 13. Берём маршрут $A_1A_2A_3$, A_4A_5, A_6A_7, где $A_1(0; 0)$, $A_2(\pi/12; \pi/12)$, $A_3(2\pi/12; 2\pi/12)$, $A_4(3\pi/12; 3\pi/12)$, $A_5(4\pi/12; 2\pi/12)$, $A_6(5\pi/12; \pi/12)$, $A_7(6\pi/12;0)$.

Весовые коэффициенты соотносятся как 2:1,5:1,3:1:1,3:1,5:2. Требуется найти: а) одну оптимальную точку; б) две оптимальные точки; в) три оптимальные точки.

Решение:

а) существует единственный оптимальный вариант размещения.

$F_{\min} = 60,54433.$

опт. вар.

$x(1) = 0,7857; \quad y(1) = 0,4228.$

б) существует единственный оптимальный вариант размещения.

$F_{\min} = 30,8262.$

опт. вар.

$x(1) = 0,26; \quad y(1) = 0,26.$

$x(2) = 1,31; \quad y(2) = 0,26.$

в) Существует единственный оптимальный вариант размещения

$F_{\min} = 18,93.$

опт. вар.

$x(1) = 0; \quad y(1) = 0.$

$x(2) = 0,785; \quad y(2) = 0,635.$

$x(3) = 1,57; \quad y(3) = 0.$

Пример 14. Взяты 50 станций от Санкт-Петербурга до Москвы с их географическими координатами (например, Тверь, 56°51′28″ с.ш., 35°55′18″ в.д.). Весовые коэффициенты станций – число жителей населённых пунктов. Надо определить оптимальное расположение спасательных вертолётных служб (или, например, логистических складов): а) в одном пункте; б) трёх; в) пяти; г) семи; д) десяти.

Решение:

а) имеется единственный оптимальный вариант размещения.

$F_{\min} = 5357{,}119.$

опт. вар.

$x(1) = 0{,}6570193;$ 37 38 39.

$y(1) = 0{,}9735325;$ 55 46 45.

O(55°46′45″ с.ш., 37°38′39″ в.д.) – Москва – оптимальное место расположения одной спасательной вертолётной службы.

б) имеется единственный оптимальный вариант размещения.

$F_{\min} = 131{,}7336.$

опт. вар.

$x(1) = 0{,}529522;$ 30 20 21.

$y(1) = 1{,}046008;$ 59 55 54.

$x(2) = 0{,}626340;$ 35 53 11.

$y(2) = 0{,}992498;$ 56 51 57.

$x(3) = 0{,}657666;$ 37 40 53.

$y(3) = 0{,}9734444;$ 55 46 27.

O_1(59°55′54″ с.ш., 30°20′21″ в.д.) – Санкт-Петербург; O_2(56°51′57″ с.ш., 35°53′11″ в.д.); O_3(55°46′27″ с.ш., 37°40′53″ в.д.) – Москва – оптимальное расположение трёх спасательных вертолётных служб.

в) имеется единственный оптимальный вариант размещения

$F_{\min} = 99{,}93713.$

опт. вар.

$x(1) = 0{,}529522;$ 30 20 21.

$y(1) = 1{,}046008;$ 59 55 54.

$x(2) = 0{,}603122;$ 34 33 22.

$y(2) = 1{,}005301;$ 57 35 58.

$x(3) = 0{,}626474;$ 35 53 39.

$y(3) = 0{,}992484;$ 56 51 54.

$x(4) = 0{,}652459;$ 37 22 59.

$y(4) = 0{,}975852;$ 55 54 43.

$x(5) = 0{,}657624;$ 37 40 44.

$y(5) = 0{,}973372;$ 55 46 12.

г) имеется единственный оптимальный вариант размещения.

$F_{\min} = 83{,}10983.$

опт. вар.

$x(1) = 0{,}529319;$ 30 19 39.

$y(1) = 1{,}046664;$ 59 58 10.

$x(2) = 0{,}539970;$ 30 56 16.

$y(2) = 1{,}039119;$ 59 32 13.

$x(3) = 0{,}602933;$ 34 32 43.

$y(3) = 1{,}005344;$ 57 36 7.

$x(4) = 0{,}626291;$ 35 53 1.

$y(4) = 0{,}992527;$ 56 52 3.

$x(5) = 0{,}641392;$ 36 44 56.

$y(5) = 0{,}983039;$ 56 19 26.

$x(6) = 0{,}653102;$ 37 25 11.

$y(6) = 0{,}975525;$ 55 53 36.

$x(7) = 0{,}657624;$ 37 40 44.

$y(7) = 0{,}975525;$ 55 46 12.

д) имеется единственный оптимальный вариант размещения.

$F_{\min} = 72{,}55429.$

опт. вар.

$x(1) = 0{,}529319;$ 30 19 39.

$y(1) = 1{,}046664;$ 59 58 10.

$x(2) = 0{,}539670;$ 30 55 14.

$y(2) = 1{,}039566;$ 59 33 45.

$x(3) = 0{,}562062;$ 32 12 13.

$y(3) = 1{,}027465;$ 58 52 9.

$x(4) = 0{,}603013;$ 34 33 0.

$y(4) = 1{,}005241;$ 57 35 45.

$x(5) = 0{,}610758;$ 34 59 37.

$y(5) = 0{,}995543;$ 57 2 25.

$x(6) = 0{,}626559;$ 35 53 57.

$y(6) = 0{,}992503;$ 56 51 58.

$x(7) = 0{,}641078;$ 36 43 51.

$y(7) = 0{,}982985;$ 56 19 15.

$x(8) = 0{,}649193;$ 37 11 45.

$y(8) = 0{,}976829;$ 55 58 5.

$x(9) = 0{,}653784;$ 37 27 32.

$y(9) = 0{,}975248;$ 55 52 39.

$x(10) = 0{,}657624;$ 37 40 44.

$y(10) = 0{,}973372;$ 55 46 12.

Пример 15. Рассматриваются 50 станций от Санкт-Петербурга до Москвы. Весовые коэффициенты станций – число жителей населённых пунктов. Надо определить оптимальное расположение остановок (не учитывая Санкт-Петербург и Москву): а) одной остановки; б) двух остановок; в) четырёх остановок; г) шести остановок; д) восьми остановок; е) десяти остановок.

Решение:

а) имеется единственный оптимальный вариант размещения.

$F_{\min} = 47456{,}63.$

опт. вар.

$x(1) = 482{,}95.$

Оптимальное размещение одной остановки – 482,95 в Твери, 419 363 человек.

б) имеется единственный оптимальный вариант размещения.

$F_{\min} = 36362{,}02.$

опт. вар.

$x(1) = 364{,}2.$

$x(2) = 482{,}95.$

Оптимальное размещение двух остановок – Вышний Волочёк, 47 732 человека и Тверь, 419 363 человека.

в) имеется единственный оптимальный вариант размещения.

$F_{\min} = 20287,78.$
опт. вар.
$x(1) = 364,2.$
$x(2) = 482,95.$
$x(3) = 560,6.$
$x(4) = 631,17.$

Оптимальное размещение четырёх остановок – Вышний Волочёк, 47 732 человека; Тверь, 419 363 человека; Клин, 79 056 человек и Химки 244 668 человек.

г) имеется единственный оптимальный вариант размещения.

$F_{\min} = 13131,44.$
опт. вар.
$x(1) = 52,53.$
$x(2) = 364,2.$
$x(3) = 436,56.$
$x(4) = 482,95.$
$x(5) = 560,6.$
$x(6) = 631,17.$

Оптимальное размещение шести остановок – Тосно, 37 875 человек; Вышний Волочёк, 47 732 человека; Лихославль, 46 031человек; Тверь, 419 363 человека; Клин, 79 056 человек и Химки, 244 668 человек.

д) имеется единственный оптимальный вариант размещения.

$F_{\min} = 8741,181.$
опт. вар.
$x(1) = 52,53.$
$x(2) = 161,71.$
$x(3) = 364,2.$
$x(4) = 436,56.$
$x(5) = 482,95.$
$x(6) = 560,6.$
$x(7) = 611,18.$
$x(8) = 631,17.$

Оптимальное размещение восьми остановок – Тосно, 37 875 человек; Малая Вишера, 11 015 человек; Вышний Волочёк, 47 732 человека; Лихославль, 46 031человек; Тверь, 419 363 человека; Клин, 79 056 человек; Крюково, 95 645 человек; Химки, 244 668 человек.

е) имеется единственный оптимальный вариант размещения

$F_{\min} = 5963,371.$
опт. вар.
$x(1) = 52,53.$
$x(2) = 117,82.$
$x(3) = 319,43.$
$x(4) = 364,2.$
$x(5) = 436,56.$
$x(6) = 482,95.$
$x(7) = 560,6.$
$x(8) = 584,92.$
$x(9) = 611,18.$
$x(10) = 631,17.$

Оптимальное размещение десяти остановок – Тосно, 37 875 человек; Чудово-Московское, 14 730 человек; Бологое-Московское, 21 425 человек; Вышний Волочёк, 47 732 человека; Лихославль, 46 031 человек; Тверь, 419 363 человека; Клин, 79 056 человек; Подсолнечная, 52 642 человек; Крюково, 95 645 человек; Химки, 244 668 человек.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена математическая модель оптимального обслуживания дискретных объектов, которые могут быть расположены на прямой, плоскости, в пространстве или на сфере. Результаты исследования могут быть применены при планировке жилых массивов, для оптимального определения остановок транспорта на дорогах, оптимального расположения спасательных служб на транспорте, оптимального распределения объектов целевого назначения и т.п. Аналогичные расчёты возможны для любых сторон жизнедеятельности человека.

ЛИТЕРАТУРА

1. Megiddo N., Supowit K. J. On the complexity of some common geometric location problems. – SIAM Journal on Computing. – 1984. – Vol. 13. – No. 1. – pp. 182–196.
2. Tamir A. An $O(pn^2)$ algorithm for the p-median and related problems on tree graphs. – Operations Research Letters. – 1996. – Vol. 19. – No. 1. – pp. 59–64.
3. Brimberg J., Juel H., Schöbel A. Linear Facility Location in Three Dimensions – Models and Solution Methods. – Operations Research. – 2002. – Vol. 50. – No. 6. – pp. 1050–1057.
4. Гусев А. И. Почему все дороги ведут в Москву // Мир транспорта. – 2005. – № 4. – С. 22–25.
5. Гусев С. А. Теоремы распределения ресурсов // Мир транспорта. – 2010. – № 3. – С. 30–35.
6. Гусев А. И., Гусев С. А. Оптимальное расположение спасательной службы // Мир транспорта. – 2017. – № 4. – С. 194–201.
7. Гусев А. И., Гусев С. А., Милевский А. С. Оптимальное транспортное обслуживание при равномерном распределении объектов // Мир транспорта. – 2017. – № 6. – С. 32–46.
8. Гусев С. А. Расположение спасательных служб около одностороннего транспортного узла // Мир транспорта. – 2018. – № 3. – С. 208–218.

Координаты авторов: **Гусев А. И.** – aigus7@gmail.com, **Гусев С. А.** – 7781011@gmail.com, **Милевский А. С.** – a_s_mi@mail.ru.

Статья поступила в редакцию 26.12.2018, принята к публикации 12.02.2019.