



# К вопросу о моделировании движения колёсной пары вагона



Анатолий ТАРМАЕВ  
Anatoliy A. TARMAEV

Виктор ФИЛИППОВ  
Victor N. FILIPPOV



Геннадий ПЕТРОВ  
Gennady I. PETROV

*Тармаев Анатолий Анатольевич – кандидат технических наук, доцент Иркутского государственного университета путей сообщения, Иркутск, Россия.*

*Филиппов Виктор Николаевич – доктор технических наук, профессор Российского университета транспорта (МИИТ), Москва, Россия.*

*Петров Геннадий Иванович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой вагонов и вагонного хозяйства РУТ (МИИТ), Москва, Россия.*

## On Modeling of Car's Wheel Set Movement

(текст статьи на англ. яз. –  
English text of the article – p. 14)

**В статье рассматриваются уточнённая математическая модель движения колёсной пары с переменной структурой системы нелинейных дифференциальных уравнений, а также расчётные схемы, описывающие взаимодействие элементов железнодорожного экипажа и пути. В модели учтены такие актуальные для скоростного движения факторы, как гироскопический момент и дисбаланс колёсной пары. Система «экипаж–путь», в представлении авторов, сложная и многомассовая, с различной структурой взаимосвязей. Путь фигурирует в виде свободной криволинейной поверхности на винклеровском основании, совокупности отдельных инерционных упругих опор с демпферами сухого трения. Модель позволит получать корректные количественные результаты, оценивать динамические свойства подвижного состава.**

*Ключевые слова:* железная дорога, высокоскоростное движение, железнодорожный путь, математическая модель, динамические свойства вагона, колёсная пара.

Современный железнодорожный путь характеризуется применением рельсов тяжёлого типа, железобетонных шпал, изменением нормативов устройства пути, несущей способности земляного полотна, увеличением допусков на содержание рельсовой колеи, отступлений в плане и профиле [1, с. 29; 2, с. 27–30]. В результате выросли приведённая масса пути, динамические нагрузки, что сказывается на условиях эксплуатации подвижного состава, прежде всего его ходовых частей [3, с. 1584], и привело к фактическому снижению конструкционной скорости.

Эти факторы требуют учёта при создании инновационного подвижного состава (ПС) и прогнозировании ожидаемых динамических показателей.

Необходимо иметь достоверную методику и математическую модель движения вагона, адекватно описывающую процессы в сложной динамической системе «экипаж–путь».

Для моделирования динамики ПС используются специализированные про-

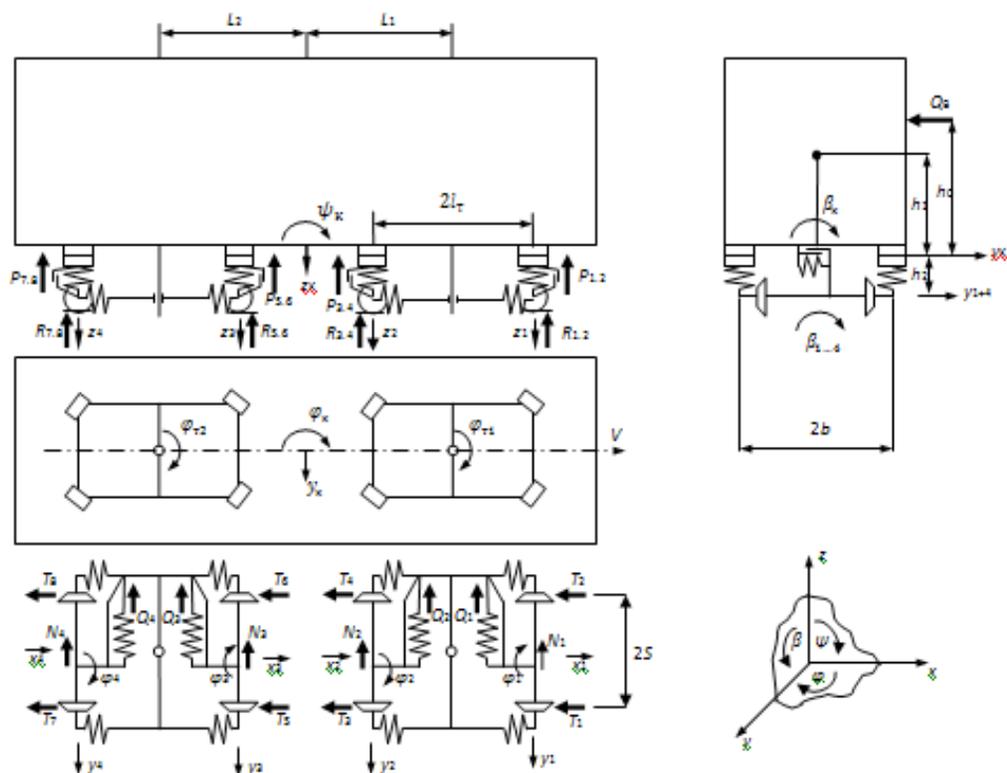


Рис. 1. Расчётная модель четырёхосного вагона (пример с опиранием кузова на буксы).

граммные комплексы, среди которых можно выделить как зарубежные программы CONTACT, FASTSIM и комплексы MEDYNA, VAMPIRE, NUCARS, GENYSY, SIMPACK, ADAMS/Rail, так и отечественные – «Вагон» (Научно-исследовательский институт железнодорожного транспорта), «ДиОНИС» («Динамика, оптимизация, нагруженность и статика», Российский университет транспорта), «УМ» («Универсальный механизм», Брянский государственный технический университет).

В ряде случаев, оговорим сразу, применяются линеаризованные модели, которые не учитывают важные аспекты динамической нагруженности элементов вагонов при характерных режимах эксплуатационных нагрузок. Известно, в частности, что результаты, полученные на линеаризованных моделях, распространяются только на колебания с малыми амплитудами и дают качественную, а не количественную картину явлений извилистого движения и вынужденных колебаний [4, с. 38]. То есть при формировании адекватной расчётной модели следует иметь в виду имеющиеся не-

линейности в дифференциальных уравнениях и связях.

Ключевым элементом, определяющим достоверность получаемых при моделировании движения железнодорожного экипажа результатов, является корректность описания динамики колёсных пар. Поэтому рассмотрим реализацию модели на примере нелинейной модели движения колёсной пары (КП) по рельсам и её взаимодействия с путём.

## 1.

Тенденция увеличения скорости движения ПС требует при моделировании движения КП особо учитывать гироскопический момент и биение колёс вследствие дисбаланса колёсной пары.

При разработке расчётной модели как составной части модели вагона (на рис. 1 представлен вариант вагона, имеющего тележки с непосредственным опиранием кузова на буксы колёсных пар) и связанной с этим системы дифференциальных уравнений установлены два условия:

- КП принимаются абсолютно жёсткими;



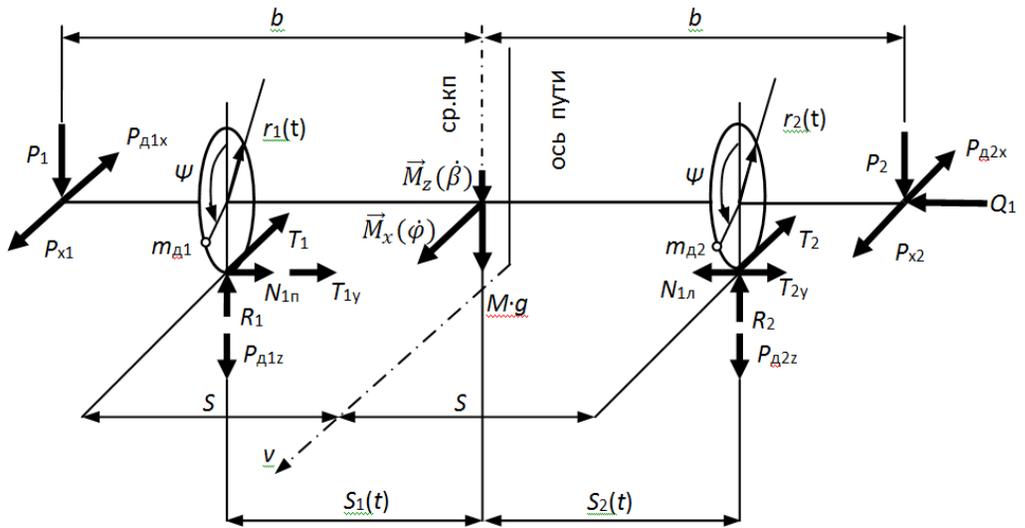


Рис. 2. Схема сил, приложенных к колёсной паре.

• предполагается, что на каждую КП действуют силы, показанные на рис. 2.

Пространственные колебания КП (необресоренных масс тележки, приходящихся на колёсную пару) могут быть описаны системой нелинейных дифференциальных уравнений (на примере первой КП):

$$(M + M_n) \ddot{z}_1 + R_1 + R_2 + P_{д1z} + P_{д2z} - P_1 - P_2 - Mg = 0; \quad (1)$$

$$M \ddot{y}_1 + N_1 - Q_1 = 0; \quad (2)$$

$$M \cdot \ddot{x}_1 + T_1 + T_2 - P_{x1} - P_{x2} + P_{д1x} + P_{д2x} = 0; \quad (3)$$

$$J_z \cdot \ddot{\varphi}_1 - T_1 \cdot s_1(t) + T_2 \cdot s_2(t) + (P_{x1} - P_{x2}) \cdot b + M_{z1}^{sup} = 0; \quad (4)$$

$$(J_x + J_{nx}) \cdot \ddot{\beta}_1 + R_1 \cdot s_1(t) - R_2 \cdot s_2(t) + (P_2 - P_1) \cdot b - (N_{1n} + T_{1y}) \cdot r_1(t) + (N_{1n} - T_{2y}) \cdot r_2(t) + M_{x1}^{sup} \cdot \text{sign}(\beta_1) = 0; \quad (5)$$

$$\dot{\psi}_1 = \frac{2\dot{x}_{д1}}{r_1(t) + r_2(t)}; \psi_{1(i+1)} = \psi_{1i} + \dot{\psi}_{1(i+1)} \cdot h; \quad (6)$$

$$\dot{x}_{д1} = V - \dot{x}_1,$$

где  $M$  – масса колёсной пары;

$g$  – ускорение свободного падения;

$M_n$  – приведённая масса пути;

$x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  – координаты положения центров масс колёсных пар и их производные по времени;

$R_1, \dots, R_8$  – вертикальные реакции рельсов под колёсами;

$P_{д1z}, \dots, P_{д8z}$  – вертикальные составляющие сил, обусловленные дисбалансом колёсных пар;

$P_1, \dots, P_8$  – вертикальные реакции рессорных комплектов;

$N_1, \dots, N_4$  – горизонтальные реакции, действующие на колёсные пары;

$Q_1, \dots, Q_4$  – горизонтальные поперечные реакции рессорных комплектов;

$T_1, \dots, T_8$  – продольные составляющие сил трения, возникающие при проскальзывании колёс по рельсам;

$P_{x1}, \dots, P_{x8}$  – горизонтальные продольные реакции связей бус с рамой тележки (определяются с учётом сил сухого трения, возникающих между рамой тележки и корпусом буксы и зазора в направляющих);

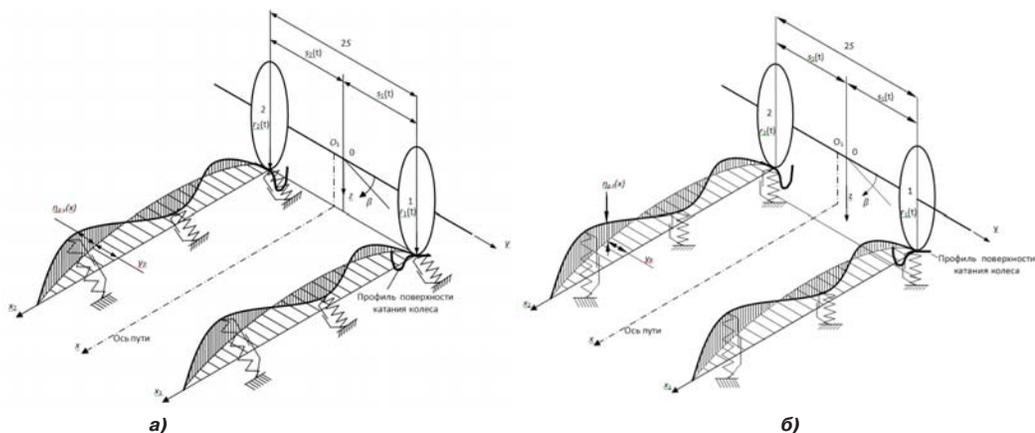
$P_{д1x}, \dots, P_{д8x}$  – горизонтальные продольные составляющие сил, обусловленные дисбалансом колёсных пар;

$J_x, J_y, J_z$  – моменты инерции колёсной пары относительно соответствующих осей координат;

$s_1(t), \dots, s_8(t)$  – расстояния от середины колёсных пар до точек контакта колеса с рельсом;

$b$  – расстояние от продольной оси симметрии вагона до точек опоры кузова на буксу;

$M_{x1}^{sup}, \dots, M_{x4}^{sup}, M_{z1}^{sup}, \dots, M_{z4}^{sup}$  – гироскопические моменты вращающихся колёсных пар относительно соответствующих осей;



**Рис. 3. Упрощённая расчётная схема системы экипаж–путь:**  
**а) вертикальные неровности пути; б) горизонтальные неровности пути.**

$J_{пх}$  – приведённый момент инерции пути;

$N_{1л}, \dots, N_{4л}, N_{1п}, \dots, N_{4п}$  – горизонтальные составляющие реакции, действующие на колёсные пары; реакция обусловлена коничностью профиля катания левого и правого колёс;

$T_{1y}, \dots, T_{8y}$  – поперечные составляющие сил трения, возникающих при проскальзывании колёс по рельсам;

$$\Psi_1, \dots, \Psi_4; \dot{\beta}_1, \dots, \dot{\beta}_4;$$

$$\dot{\psi}_1, \dots, \dot{\psi}_4; \ddot{\beta}_1, \dots, \ddot{\beta}_4$$

углы поворота колёсных пар и их производные по времени;

$r_1(t), \dots, r_8(t)$  – радиусы кругов катания колёс;

$$\dot{x}_{u1}, \dots, \dot{x}_{u4}$$
 – скорости движения центра масс колёсной пары;

$V$  – скорость движения вагона вдоль пути;

$h$  – геометрический размер;

$i, i+1$  – индекс, обозначающий порядковый номер итерации.

При определении вертикальных реакций рессорных комплектов и вертикальных реакций со стороны пути учитывается односторонняя связь введением условий

обезгрузки, если сумма статического прогиба и динамической деформации будет равна или меньше нуля.

Горизонтальные реакции  $N_1, \dots, N_4$ , действующие на колёсные пары, определяются из выражения (7) с учётом горизонтальной составляющей, обусловленной коничностью профиля катания  $N_{1л}, \dots, N_{4л}$  правого и  $N_{1п}, \dots, N_{4п}$  левого колёс, и поперечной составляющей сил трения  $T_{1y}, \dots,$

$T_{8y}$ , возникающих при проскальзывании колёс по рельсам.

Вертикальные динамические деформации  $\Delta_{p1}, \dots, \Delta_{p8}$ , горизонтальные поперечные динамические деформации  $\Delta_1, \dots, \Delta_8$ ,  $\Delta_{x1}, \dots, \Delta_{x8}$  и горизонтальные продольные динамические деформации определяются зависимостями (8), (9), (10). По ним же фиксируются скорости динамических деформаций, но значения координат в этом случае заменяются значениями их первых производных по времени. Вертикальные динамические реакции пути под колёсами следуют из (11).

$$N_1 = N_{1л} - N_{1п} + T_{1y} + T_{2y}; \quad (7)$$

$$\Delta_{p1} = z_k + \psi_k \cdot (L_1 + L_T) + \beta_k \cdot b_1(t) - z_1 - \beta_1 \cdot b \quad (8)$$

$$\Delta_{p2} = z_k + \psi_k \cdot (L_1 + L_T) + \beta_k \cdot b_2(t) - z_1 - \beta_1 \cdot b; \quad (8)$$

$$\Delta_1 = y_k + \phi_k \cdot (L_1 + L_T) + \phi_{T1} \cdot L_T - y_1; \quad (9)$$

$$\Delta_{x1} = (\phi_1 - \phi_{T1}) \cdot b + x_1 \quad (10)$$

$$\Delta_{x2} = (\phi_{T1} - \phi_1) \cdot b + x_1; \quad (10)$$

$$\Delta_{R1} = z_1 + \beta_1 \cdot s_1(t) - z_{np1z}(x) + \eta_{p1z}(x) + r_1(t) \quad (11)$$

$$\Delta_{R2} = z_1 + \beta_1 \cdot s_2(t) - z_{np2z}(x) + \eta_{p2z}(x) + r_2(t); \quad (11)$$

$$\Delta_{S1} = y_1 + \phi_1 \cdot s_1(t) - z_{np1y}(x) + \eta_{p1y}(x) + s_1(t) \quad (12)$$

$$\Delta_{S2} = y_1 + \phi_1 \cdot s_2(t) - z_{np2y}(x) + \eta_{p2y}(x) + s_2(t), \quad (12)$$

где  $z_{npz}, z_{pz}, z_{npy}, z_{py}$  – параметры пути в вертикальном и поперечном направлениях.

Вертикальные реакции пути по колёсным парам зависят от параметров пути и координат, определяющих положение необрессоренных частей тележек. Эта связь осуществляется через величины динамических деформаций.

Для нахождения траектории колёсной пары следует искать решения системы из шести дифференциальных уравнений. Однако с целью точного определения сил сопротивления перекачиванию колёсной пары по упругодеформированному рельсу



Значения вертикальных прогибов рельса  $Z_n(x)$  и жёсткости  $C(x)$   
в различных сечениях звена

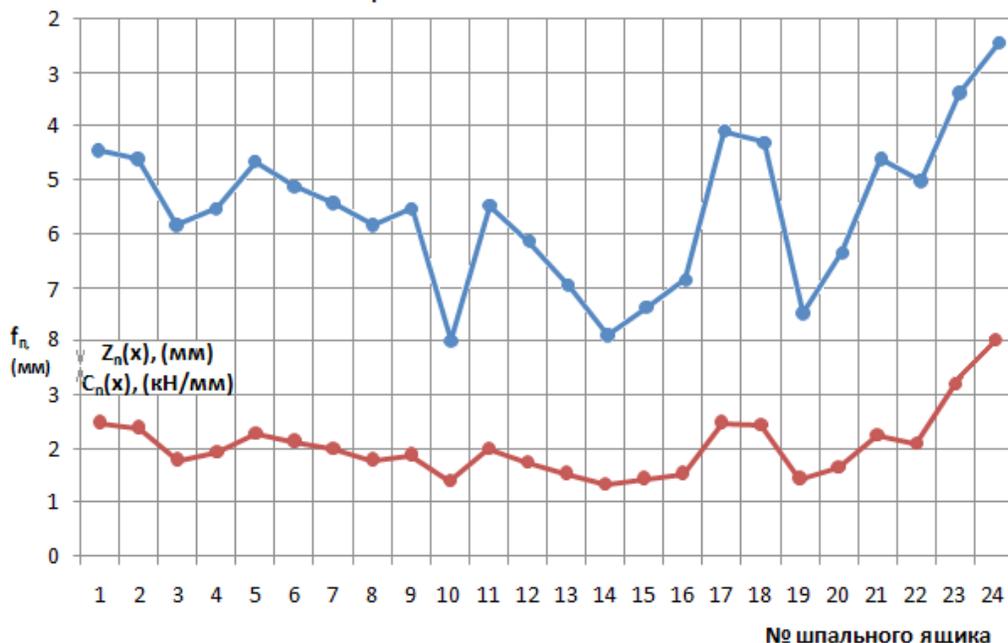


Рис. 4. Характеристики пути, полученные при натурном эксперименте.

приходится существенно усложнять расчётные модели пути, представляя их как сложные многомассовые системы с различной структурой взаимосвязей. Это усложнение позволяет более полно отражать физическую сторону задачи, состояние реального пути, получать корректные количественные результаты.

Для учёта упругих и инерционных свойств пути между колесом и основанием железнодорожного полотна введена дополнительная подрессоренная масса верхнего строения пути, приведённая к колесу. Рельс рассматривается как свободная криволинейная поверхность на винклеровском основании.

В расчётной модели пути (рис. 3) рельс имеет геометрические неровности, учитывается переменная по длине жёсткость основания (рис. 4), что позволяет при наличии необходимых данных моделировать реальный путь [5, с. 21]. Величина приведённой массы пути  $M_n$ , участвующей в силовом взаимодействии с колесом, принимается зависимой от прогиба рельса, эта масса при движении вагона может изменяться. Вертикальные и горизонтальные неровности задаются по отдельности на правом и левом рельсах.

## 2.

При решении многих задач, связанных с оценкой динамических качеств и определением максимальных величин коэффициентов вертикальной динамики, горизонтальных рамных сил, запасов устойчивости от схода с рельсов, целесообразно применять детерминированные неровности, соответствующие длине рельсового звена.

Путь может быть представлен в виде системы отдельных инерционных упругих опор с демпферами сухого трения. Свободная поверхность таких опор в принятой системе координат определяется аналитически или задаётся в функции  $\eta(x)$ . Жёсткостные и диссипативные характеристики отдельных упругих опор могут быть различны и задаваться в зависимости от координаты  $x$ . Следовательно, в фиксированном сечении пути  $x$  соответствующая упругая опора будет иметь определённую жёсткость  $c_n(x)$  и величину статического прогиба  $z_n(x)$ , зависящего также от величины статической нагрузки на колесо экипажа (рис. 4).

Жёсткость рельсового пути может быть представлена в виде зависимости [6, с. 306]:  $c_n(x) = c'_n(x) + c''_n(x) \cdot \delta_n \cdot (\delta_{сч} - 0,5)$ ; (13)

$$\dot{c}_n(x) = c_0 + |B_n \cdot \sin|\frac{\pi}{L} \cdot x| +$$

$$+ |B_n \cdot \sin|3 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot x||,$$

где  $c_0$  – жёсткость рельса в стыке;

$A_n$  и  $B_n$  – амплитуда изменения жёсткости по первой и второй гармоникам;

$L$  – длина звена;

$x$  – сечение пути, изменяющееся с шагом, равным длине шпального ящика;

$\Delta_n$  – коэффициент, показывающий максимально возможное изменение жёсткости от одного шпального ящика к другому (в общем случае это изменение жёсткости носит случайный характер);

$\Delta_{сч}$  – псевдослучайное число, изменяющееся от 0 до 1 (для их получения используется генератор случайных чисел).

Такое представление жёсткости пути, например, удобно использовать для проведения сравнительной оценки влияния отдельных параметров вагона на его динамические качества.

Получается, вертикальное и горизонтальное возмущения в модели экипаж–путь задаются не только начальными геометрическими неровностями незагруженного пути, но и изменением жёсткостных параметров пути по длине рельса (параметрические колебания). Следовательно, траектория колеса (так называемая динамическая неровность) будет определяться параметрами всей системы экипаж–путь. При этом расчётная модель не учитывает распределительные свойства реального рельсового пути.

Положение колёсной пары, определяемое координатами  $z$ ,  $y$  и  $\beta$ , зависит от вертикальных и горизонтальных динамических неровностей правой и левой рельсовых нитей, а также от радиусов кругов катания  $r(t)$ , поперечного отбоя колёсной пары, определяемого координатой  $y$ , ширины колеи  $2S$  в каждом сечении и геометрических неровностей рельсовых нитей в плане  $y_p$ . Радиусы кругов катания  $r(t)$ , в свою очередь, зависят от заданного профиля колеса и всех других координат самой колёсной пары и неровностей пути. Эта связь осуществляется через размер  $s(t)$ , помогающий найти положение точки кон-

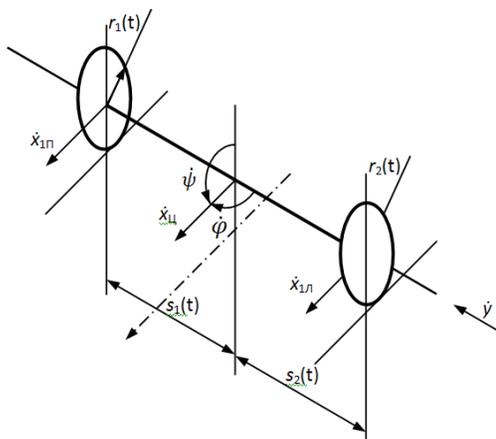


Рис. 5. Расчётная схема для определения скоростей скольжения колеса.

такта колеса на рельсе. Из расчётной модели видно, что характер возмущений при изучении пространственных колебаний вагона будет определяться не только независимыми параметрами пути, но и параметрами исследуемого экипажа и его положением в принятой системе координат.

При нахождении сил трения в точках контакта колесо–рельс расчётной модели для упрощения задачи использовалась схема определения скоростей проскальзывания с учётом перекатывания колёсной пары (рис. 5).

Направление силы трения перпендикулярно нормальной силе давления  $R_N$  в точке контакта колесо–рельс и противоположно направлению скоростей скольжения  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ . Ввиду малости наклона катания относительно плоскости  $XOY$  при наличии зазоров между гребнем и рельсом вертикальная составляющая силы трения колесо–рельс не учитывается.

Приняв допущение, что скорость вагона вдоль оси пути  $V$  постоянна, можно из выражения (6) получить скорости движения центра масс каждой колёсной пары вдоль оси пути  $\dot{x}_{u1}, \dots, \dot{x}_{u4}$  с учётом подёргивания колёсных пар в пределах упругих зазоров в продольном направлении. Тогда из выражений (14)–(16) можно определить скорости скольжения каждого из колёс. Относительные скорости скольжения находятся делением величин из выражений (16) на соответствующую величину  $\dot{x}_{u1}, \dots, \dot{x}_{u4}$ .



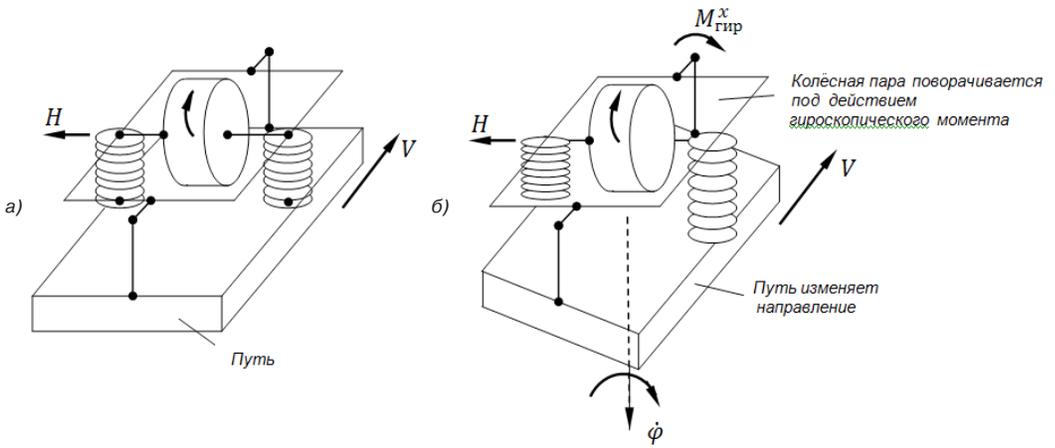


Рис. 6. Проявление гироскопических свойств у колёсной пары.

Графики максимальных вертикальных  $\ddot{z}$  и горизонтальных поперечных  $\ddot{y}$  ускорений колёсной пары при различных скоростях

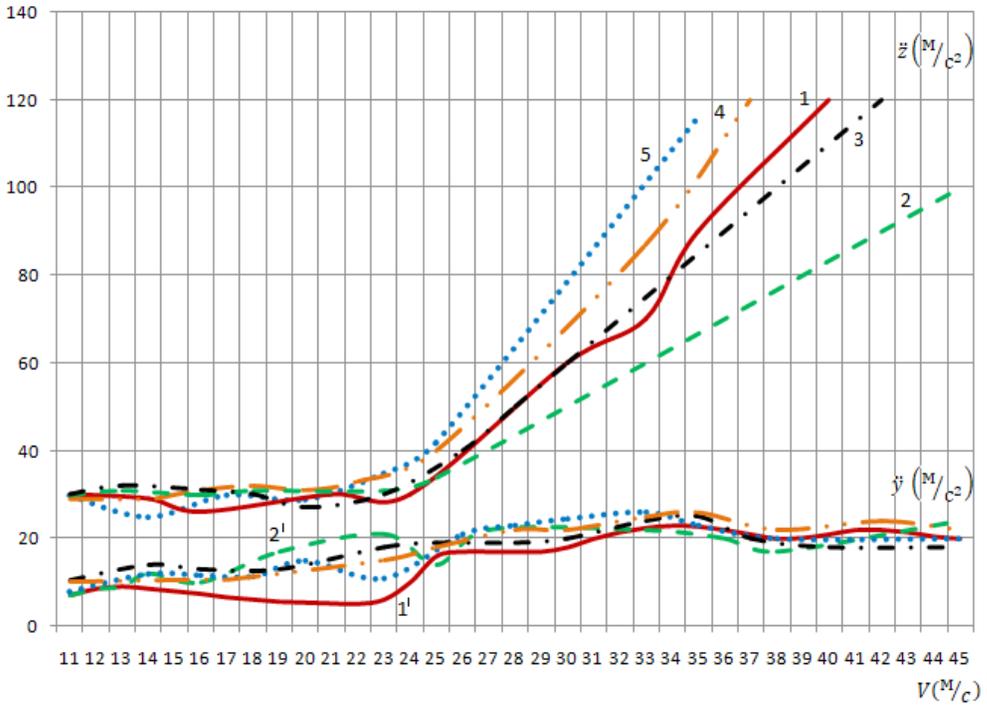


Рис. 7. Результаты расчёта.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{1n} &= \dot{\psi}_1 r_1(t) - \dot{\phi}_1 s_1(t); \\ \dot{x}_{1l} &= \dot{\psi}_1 r_2(t) - \dot{\phi}_1 s_2(t); \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\dot{y}_{1n} = \dot{y}_1 + \dot{x}_{u1} \phi_1; \quad \dot{y}_{1l} = \dot{y}_1 + \dot{x}_{u1} \phi_1; \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} V_{01n} &= \sqrt{(\dot{x}_{1n} - \dot{x}_{1u})^2 + \dot{y}_{1n}^2}; \\ V_{01l} &= \sqrt{(\dot{x}_{1l} - \dot{x}_{1u})^2 + \dot{y}_{1l}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Зная величину относительной скорости скольжения, можно определить коэффициент трения между колесом и рельсом.

Появление и необходимость учёта гироскопического момента в модели обусловлено тем, что при высоких скоростях движения быстро вращающаяся колёсная пара начинает проявлять гироскопические свойства. КП фактически

становится ротором двухстепенного гироскопа [7, с. 288], ось которого лежит в плоскости перпендикулярно направлению пути. Для пояснения представим, что изменяется направление движения вагона, КП вкатывается с прямого участка в кривую (рис. 6). На первоначальном этапе ось гироскопа (КП) сопротивляется вписыванию в кривую. Через контакт колесо—рельс путь воздействует на сопротивляющийся гироскоп, создавая момент сил относительно вертикальной оси  $z$ , который заставляет поворачиваться вектор кинетического момента гироскопа  $H$  вниз (рис. 6б). Появляется гироскопический момент  $M_{sup}^x$ , который следует учитывать в дифференциальных уравнениях вращательного движения КП.

Входящие в дифференциальные уравнения значения гироскопических моментов вращающихся колёсных пар определяются из зависимостей:

$$\left. \begin{aligned} M_{z_{1,\dots,4}}^{sup} &= J_y \frac{\dot{x}_{u_{1,\dots,4}}}{r_{cp}} \dot{\beta}_{1,\dots,4}; \\ M_{x_{1,\dots,4}}^{sup} &= J_y \frac{\dot{x}_{u_{1,\dots,4}}}{r_{cp}} \dot{\phi}_{1,\dots,4}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Кроме того, на скоростях движения выше 140 км/ч необходимо учитывать дисбаланс КП. Воздействие дисбаланса возникает периодически и имеет условием оборот колеса. На одной половине оборота воздействие идёт на путь, на другой — путь, наоборот, разгружается (рис. 7). Горизонтальные и вертикальные составляющие сил, обусловленных дисбалансом КП, определяются в зависимости от массы дисбаланса  $m_d$  по формулам:

$$\left. \begin{aligned} P_{дж} &= m_d (\dot{\psi}_j)^2 \cdot r_{cp} \cdot \cos \psi_j; \\ P_{дз} &= m_d (\dot{\psi}_j)^2 \cdot r_{cp} \cdot \sin \psi_j. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Непосредственное опирание кузова на буксы позволяет существенно снизить массу необрессоренных частей. Для этого случая свой интерес представляет

задача по определению влияния дисбаланса и гироскопического момента на уровень вертикальных  $\ddot{z}$  и горизонтальных  $\ddot{y}$  ускорений, действующих на колёсную пару. Подобные величины могут быть использованы, например, при определении коэффициента запаса устойчивости колёсной пары против схода с рельсов. Результаты расчёта в виде зависимостей  $\ddot{y}$  и  $\ddot{z}$  от скорости движения представлены на рис. 7. Из анализа данных видно, что масса дисбаланса и гироскопический эффект больше сказываются на вертикальных, чем на горизонтальных ускорениях. Из сопоставления кривых 1, 2 и 5 следует, что в большей степени на максимальные значения  $\ddot{z}$  оказывает влияние величина дисбаланса.

Таким образом, уточнённая нелинейная модель движения колёсной пары вагона позволяет реально оценивать динамические свойства подвижного состава при высоких скоростях движения с учётом влияния гироскопического момента и дисбаланса колёсной пары.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов В. Н., Смольянинов А. В., Козлов И. В., Подлесников Я. Д. Параметры инновационных вагонов и некоторые проблемы их реализации // Транспорт Урала. — 2017. — № 1. — С. 25–31.
2. Инструкция по текущему содержанию железнодорожного пути. Утверждена распоряжением ОАО «РЖД» от 14 ноября 2016 г. № 2288р.
3. Antipin D. Ya., Bondarenko D. A., Izmerov O. V. Study of dynamic loads in traction drive of freight locomotive under the influence of railway track irregularities. — 2017. — Procedia Engineering 206. — pp. 1583–1586.
4. Орлова А. М. Влияние конструктивных схем и параметров тележек на устойчивость, ходовые качества и нагруженность грузовых вагонов / Дис... док. техн. наук. — СПб.: ПГУПС, 2008. — 403 с.
5. Ромен Ю. С., Савоскин А. Н., Акишин А. А. Характеристики возмущений, вызывающих колебания рельсовых экипажей // Вестник ВНИИЖТ. — 2013. — № 6. — С. 21–29.
6. Филиппов В. Н. Особенности расчёта, анализа и пути улучшения динамических показателей перспективных большегрузных вагонов / Дис... док. техн. наук. — М.: МИИТ, 1986. — 384 с.
7. Халфман Р. Динамика: Пер. с англ. — М.: Наука, 1972. — 568 с.

Координаты авторов: **Тармаев А. А.** – t38\_69@mail.ru, **Филиппов В. Н.** – filippovwn@gmail.com, **Петров Г. И.** – petrovgi@gmail.com.

Статья поступила в редакцию 12.11.2018, принята к публикации 12.12.2018.

