



# Математическое моделирование поперечного крипа железнодорожных колёс



Евгений КОРОЛЬКОВ

Evgeny P. KOROLKOV

## Mathematical Modeling of Transversal Creep of Railway Wheels

(текст статьи на англ. яз. –  
English text of the article – p. 11)

**Анализируя аналитическое выражение поперечного крипа, применяемое для моделирования сил взаимодействия колеса и рельса, можно заметить, что формула его вычисления физически не соответствует определению крипа как разности кинематического и действительного перемещений. На самом деле формула содержит разность действительных поперечного и продольного, умноженного на угол поворота, перемещений центра масс колёсной пары. Если направление движения колёсной пары не совпадает с осью пути, то деформация контактируемых волокон колеса и рельса происходит в направлении движения центра каждого колеса. Однако формула вычисления поперечного крипа, в отличие от продольного крипа, никак не связана с контактом колеса и рельса. Предлагаются два физически обоснованных варианта вычисления поперечного крипа, способных привести к нелинейным дифференциальным уравнениям, описывающим плоское движение колёсной пары или тележки.**

**Ключевые слова:** железная дорога, рельс, колесо, пятно контакта, действительное перемещение, крип, ось пути, моделирование, проекция.

*Корольков Евгений Павлович – доктор технических наук, профессор Российского университета транспорта (МИИТ), Москва, Россия.*

**И**зучение вопросов безопасности и устойчивости движения железнодорожных экипажей, их конструктивных изменений предполагает создание адекватных математических моделей, наиболее точно описывающих взаимодействие как верхнего строения пути и экипажа, так и элементов непосредственно конструкции подвижного состава.

В данном случае уточняется математическая модель взаимодействия колеса и рельса, которая служит фундаментом более сложных моделей, описывающих движение или колёсной пары, или тележки, или вагона.

### I.

Колесо, взаимодействуя с рельсом, передаёт вертикальную нагрузку на верхнее строение пути через незначительную часть поверхности рельса, называемую пятном контакта. Формой пятна контакта, как показано в работе [1], является эллипс, вытянутый обычно на поверхности катания рельса вдоль оси пути. Из-за малости площади на поверхности пятна возникает большое удельное давление, под воздействием которого происходят упругие деформации.

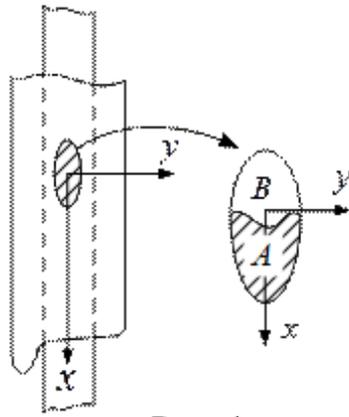


Рис. 1.

Если к колесу не приложен вращающий момент или горизонтальная сила, то пятно (зона контакта) симметрично относительно вертикальной оси.

При движении колеса под действием вращающего момента симметрия распределения деформаций нарушается. Зона контакта разделяется на две области (рис. 1). В области «А» сохраняется сцепление и происходят упругие деформации в направлении движения (в режиме тяги материал бандажа сжимается, а рельса — растягивается), в области «В» наблюдаются явления, аналогичные боксованию. Если направление движения колёсной пары не совпадает с осью пути, то деформация контактируемых волокон колеса и рельса происходит в направлении движения центра каждого колеса.

Вследствие различия деформаций колеса и рельса в зоне контакта путь, пройденный геометрическим центром колеса, меньше пути, подсчитанного по угловой скорости вращения колеса в предположении качения без скольжения. Это явление с кинематической точки зрения рассматривают как проскальзывание и с учётом причины его возникновения называют упругим, псевдоскольжением или крипом.

Изучая движение колёсной пары или тележки, реакцию колеса и рельса моделируют в соответствии с теорией крива, предполагая её пропорциональной относительной скорости деформации контактирующих частиц колеса и рельса в направлении движения колеса.

Силы реакции, возникающие в пятне контакта вследствие упругих деформаций

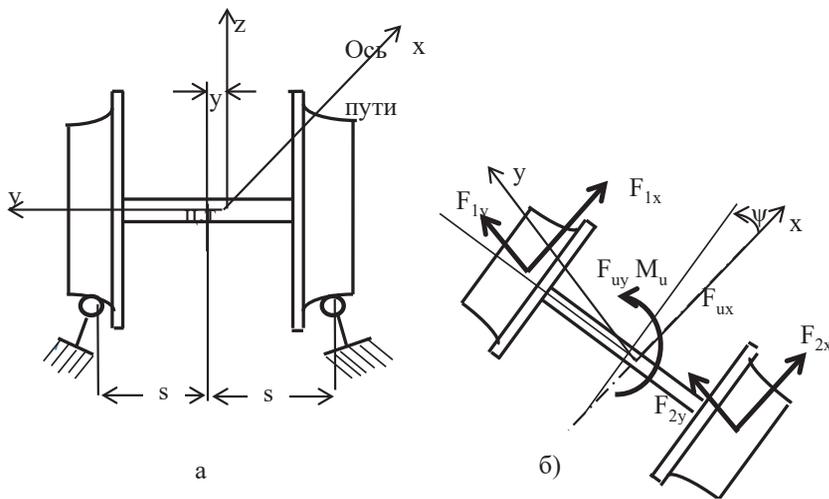


Рис. 2.



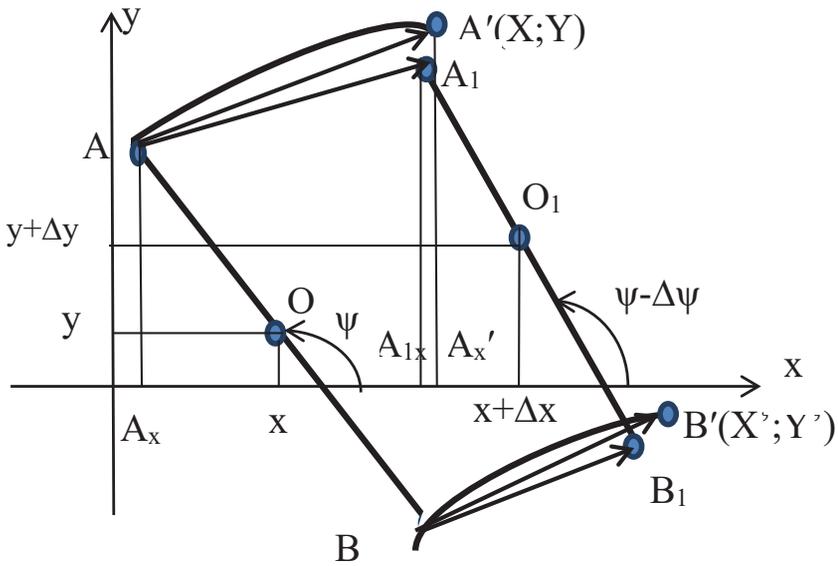


Рис. 3.

поверхностных волокон соприкасающихся тел, принято называть силами крипа [2, 3]. В дальнейшем, излагая материал, будем придерживаться обозначений и понятий, приведённых там же. В частности, введём обозначения (рис. 2):  $x$  – продольное перемещение центра масс колёсной пары;  $y$  – поперечное перемещение центра масс колёсной пары;  $\psi$  – угол поворота вокруг вертикальной оси  $z$ ;  $\theta$  – угловое изменение номинального значения угловой скорости  $\omega$  вращения колёсной пары вокруг оси  $y$ , где  $\omega = v/r_0$ ;  $r_0$  – радиус круга катания колеса колёсной пары в центральной установке (номинальный радиус качения);  $F_i$  ( $F_{ix}$ ,  $F_{iy}$ ) – сила крипа и её компоненты в контактах колёс, соответственно вдоль оси пути  $x$  и поперёк –  $y$ ,  $i = 1, 2$ .

Силы крипа  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) являются функциями крипа, которые определяются как относительные линейные перемещения между колесом и рельсом [3, с. 153], направленные вдоль движения колеса. В том же источнике указано, что «продольный крип  $\epsilon_{ix}$  задаётся как отношение разности продольной скорости точки контакта и продольной скорости точки контакта рельса к номинальной скорости; поперечный крип  $\epsilon_{iy}$  задаётся как отношение разности поперечной скорости точки контакта и поперечной скорости точки контакта рельса к номинальной скорости» [3] дви-

жения колёсной пары в центральной установке.

Такое вычисление компонент крипа встречается практически во всех ранних и поздних исследованиях, посвящённых задаче движения рельсовых экипажей [4–8]. Так, в работе [2] продольный и поперечный крипы вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1x} &= \frac{1}{v}(r_1 \cdot \dot{\omega} - \dot{x} + s \cdot \dot{\psi}); \epsilon_{2x} = \\ &= \frac{1}{v}(r_2 \cdot \dot{\omega} - \dot{x} - s \cdot \dot{\psi}); \epsilon_{1,2y} = \frac{1}{v}(\dot{y} - \dot{x}\psi), \end{aligned} \quad (1)$$

а в работе [3, с. 155] – по формулам:

$$\begin{cases} \epsilon_{1x} = \frac{1}{v} \left\{ v \left[ \frac{r_1}{r_0} - 1 \right] + s \cdot \dot{\psi} \right\} = \\ = \frac{1}{v} (r_1 \cdot \dot{\omega} - \dot{x} + s \cdot \dot{\psi}); \\ \epsilon_{2x} = \frac{1}{v} \left\{ v \left[ \frac{r_2}{r_0} - 1 \right] - s \cdot \dot{\psi} \right\} = \\ = \frac{1}{v} (r_2 \cdot \dot{\omega} - \dot{x} - s \cdot \dot{\psi}); \\ \epsilon_{1y} = \frac{1}{v} (\dot{y} + r_1 \cdot \dot{\phi} - \dot{x}\psi) \cong \frac{1}{v} (\dot{y} - \dot{x}\psi); \\ \epsilon_{1y} = \frac{1}{v} (\dot{y} + r_2 \cdot \dot{\phi} - \dot{x}\psi) \cong \frac{1}{v} (\dot{y} - \dot{x}\psi). \end{cases} \quad (2)$$

Если сравнивать формулы (1) и (2), то нетрудно увидеть, что формулы продольного крипа одинаковы, а поперечного – от-

личаются слагаемым  $r_i \cdot d\phi/dt$ , которым в сравнении с другими слагаемыми, как правило, пренебрегают, и следовательно, они также совпадают.

## II.

Рассмотрим более подробно вывод формул вычисления продольного и поперечного крива как разности пути, пройденного геометрическим центром колеса, и пути, подсчитанного по угловой скорости вращения колеса в предположении качения без скольжения.

Пусть в момент времени координаты центра масс колёсной пары  $O$  и точек контакта колёс  $A$  и  $B$  будут:  $O(x; y)$ ,  $A(x - s \cdot \psi; y + s)$ ,  $B(x + s \cdot \psi; y - s)$ . Дадим приращение времени  $\Delta t$ . Тогда за время  $\Delta t$  точки  $O$ ,  $A$ ,  $B$  займут положение точек  $O_p$ ,  $A_p$ ,  $B_p$  (рис. 3), координаты которых будут соответственно:  $O_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$ ,  $A_1[x + \Delta x - s \cdot (\psi + \Delta\psi); y + \Delta y + s]$ ,  $B_1[x + \Delta x + s \cdot (\psi + \Delta\psi); y + \Delta y - s]$ , а ось колёсной пары повернётся в горизонтальной плоскости на угол  $\Delta\psi > 0$ .

Из рис. 3 видно, что точки пятен контакта за время  $\Delta t$  переместились левого и правого колёс соответственно из  $A$  в  $A_1$  и из  $B$  в  $B_1$ . Ввиду малости  $\Delta t$  траектория перемещения считается прямолинейной, и тогда – проекции векторов точек контакта

$$\overline{BB_1}(\Delta x - s \cdot \Delta\psi; \Delta y), \quad \overline{AA_1}(\Delta x + s \cdot \Delta\psi; \Delta y).$$

В результате кинематического перемещения как перемещения абсолютно твёрдых тел точки пятен контактов колёс с рельсами переместятся из  $B$  и  $A$  соответственно в  $B'$  и  $A'$  (рис. 3). Будем считать, как и выше, траекторию движения пятен контакта прямыми линиями  $\overline{BB_1}(\Delta X'; \Delta Y')$ ,  $\overline{AA_1}(\Delta X; \Delta Y)$ .

Ясно (рис. 3), что

$$\begin{cases} |\overline{AA_1}| < |\overline{AA'}| \\ |\overline{BB_1}| < |\overline{BB'}| \end{cases} \quad (3)$$

и, следовательно, этим неравенствам подчиняются проекции векторов [9]:

$$\Delta x - s \cdot \Delta\psi < \Delta X; \Delta y < \Delta Y; \quad (4)$$

$$\Delta x + s \cdot \Delta\psi < \Delta X'; \Delta y < \Delta Y'. \quad (5)$$

Рассмотрим разность координат векторов действительного перемещения точек пятна контакта и кинематического. Как и в работах

[2, 3], длину кинематического перемещения пятен контакта будем принимать равными:  $\Delta l_i = r_i \cdot \Delta\theta$ , ( $i = 1, 2$ ),

где  $r_1, r_2$  – радиусы качения соответственно левого и правого колёс;  $\Delta\theta$  – угол поворота колёсной пары за время  $\Delta t$ .

Очевидно, в этом случае проекциями вектора кинематического перемещения станут:

$$\begin{cases} \Delta X = \Delta l_1 \cdot \cos\psi \cong r_1 \cdot \Delta\theta; \\ \Delta Y = \Delta l_1 \cdot \sin\psi \cong r_1 \cdot \Delta\theta \cdot \psi; \\ \Delta X' = \Delta l_2 \cdot \cos\psi \cong r_2 \cdot \Delta\theta; \\ \Delta Y' = \Delta l_2 \cdot \sin\psi \cong r_2 \cdot \Delta\theta \cdot \psi. \end{cases} \quad (7)$$

Учитывая формулы (7), получим разности проекций векторов  $\overline{AA'}, \overline{AA_1}$  и  $\overline{BB'}, \overline{BB_1}$ , т.е. проекции векторов  $\overline{A_1A'}, \overline{B_1B'}$ , являющихся разностями линейных перемещений между колёсами и рельсами колёсной пары.

Таким образом, имеем:

$$\begin{cases} \overline{A_1A'}(r_1 \cdot \Delta\theta - \Delta x + s \cdot \Delta\psi; r_1 \cdot \Delta\theta \cdot \psi - \Delta y) \\ \overline{B_1B'}(r_2 \cdot \Delta\theta - \Delta x - s \cdot \Delta\psi; r_2 \cdot \Delta\theta \cdot \psi - \Delta y). \end{cases} \quad (8)$$

Анализ формул (8) показывает, что физически проекции перемещений на ось  $Oy$  выражают деформации поверхностных слоёв колеса и рельса в пятнах контактов вдоль и поперёк пути. Причём, заметим, поперечные деформации для левого и правого колёс различны на величину, равную разности кругов катания колёс.

Сравним деформации (8) с приведёнными в формулах (1), (2). Для этого проинтегрируем на отрезке  $\Delta t$  правые части выражений формул (1), (2) без учёта знаменателя, равного скорости поступательного движения.

Опуская промежуточные выкладки, получим для левого колеса:

$$\begin{cases} \int_{\Delta t} (r_1 \cdot \dot{\omega} - \dot{x} + s \cdot \dot{\psi}) dt = \\ = r_1 \cdot \Delta\theta - \Delta x + s \cdot \Delta\psi \\ \int_{\Delta t} (\dot{y} - \dot{x}\psi) dt = \Delta y - \Delta x \cdot \psi \end{cases} \quad (9)$$

и для правого колеса

$$\begin{cases} \int_{\Delta t} (r_2 \cdot \dot{\omega} - \dot{x} - s \cdot \dot{\psi}) dt = \\ = r_2 \cdot \Delta\theta - \Delta x - s \cdot \Delta\psi \\ \int_{\Delta t} (\dot{y} - \dot{x}\psi) dt = \Delta y - \Delta x \cdot \psi. \end{cases} \quad (10)$$





Анализируя правые части первых формул (9) и (10), заметим, что они выражают разность продольных перемещений и совпадают с первыми координатами векторов (8). Анализ вторых формул (9) и (10) показывает, что они равны. Но этого не может быть, так как при поступательно-вращательном движении колёсной пары путь, пройденный колёсами, неодинаковый. В то же время физическая сущность слагаемых  $\Delta u$  и  $\Delta x \cdot \psi$  отличается. Первое слагаемое выражает действительное перемещение центра масс колёсной пары поперёк пути, а второе – действительное перемещение центра масс вдоль пути, умноженное на угол поворота колёсной пары. Эти перемещения ни геометрически, ни физически не связаны с пятнами контакта колёс колёсной пары.

Но это противоречит определению крипа.

И это никак не разность кинематического и действительного перемещений пятен контакта, *что является фундаментом крипа*, и не может вызывать деформацию поверхностных слоёв колеса и рельса в поперечном, вдоль оси  $Oy$ , направлении.

Известно, применение крипа, вычисленного по формулам (2), для математического моделирования движения колёсной пары или тележки с двумя степенями свободы [2] приводит к двум линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Исследование траектории центра масс, полученное по этой модели, указывает на её неустойчивость. Возможно, это следствие некорректного моделирования крипа в поперечном направлении.

Применение для моделирования крипа формул (8) физически оправдано, хотя дифференциальные уравнения могут быть нелинейными. Однако с развитием вычислительной техники и методов исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений нелинейность не вызовет значительных затруднений.

Вернёмся в заключение к формулам вычисления крипа (9), (10). Продольный крип левого и правого колёс является проекциями действительного крипа, направ-

ление которого не совпадает с направлением продольной оси координат. Поэтому было бы целесообразно с физической и геометрической точек зрения поперечный крип подсчитывать, умножая продольный крип на угол поворота колёсной пары. Если обозначить продольный крип колёс как  $\Delta_{xi}$ , продольный –  $\Delta_{yi}$  ( $i = 1, 2$ ), то естественней вычислять продольный крип как:

$$\begin{cases} \Delta_{y1} = \Delta_{x1} \cdot \psi = \\ = (r_1 \cdot \Delta\theta - \Delta x + s \cdot \Delta\psi) \cdot \psi; \\ \Delta_{y2} = \Delta_{x2} \cdot \psi = \\ = (r_2 \cdot \Delta\theta - \Delta x - s \cdot \Delta\psi) \cdot \psi. \end{cases} \quad (11)$$

Формулы (11) получаются в предположении, что направления действительного ( $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}$ ) и кинематического ( $\overline{AA'}, \overline{BB'}$ ) перемещений совпадают. Тем не менее формулы (11) отражают физическую сущность крипа в отличие от формул поперечного крипа (9, 10).

Таким образом, для вычисления сил взаимодействия между колёсами и рельсами применение формул вычисления крипа (8) и (11) физически более оправдано.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н. М. Применение теории Герца к подсчётам местных напряжений в точке соприкосновения колеса и рельса. – М.: Гос. издат. тех.-теор. литературы, 1957. – 632 с.
2. Вершинский С. В., Данилов В. Н., Хусидов В. Д. Динамика вагона. – М.: Транспорт, 1991. – 360 с.
3. Гарг В. К., Дуккипати Р. В. Динамика подвижного состава. – М.: Транспорт, 1988. – 391 с.
4. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. – М.: Наука, 1967. – 520 с.
5. Сергеев В. С. К задаче об устойчивости движения железнодорожной колёсной пары // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. – М.: ВЦ РАН, 2009. – С. 3–13.
6. Доронин В. И., Доронин С. В. Движение колёсных пар подвижного состава в прямых и кривых участках пути рельсовой колеи. – Хабаровск: ДВГУПС, 2006. – 120 с.
7. Анисимов В. А. Тяговые расчёты: Монография. – Хабаровск, 2013. [Электронный ресурс]: <https://sites.google.com/site/tagarpoezd/monografia>. Доступ 24.03.2018.
8. Wickens A. H. The dynamic stability of railway vehicle wheelsets and bogies having profiled wheels // Int. J. of Solids and Structures. – 1965. – V. 1. – pp. 319–342.
9. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1971. – 328 с. ●

Координаты автора: **Корольков Е. П.** – epkorolk37@rambler.ru.

Статья поступила в редакцию 12.01.2018, принята к публикации 24.03.2018.