



## Математическое моделирование участков переменной жёсткости перед искусственными сооружениями



**Валентин ВИНОГРАДОВ**  
Valentin V. VINOGRADOV

**Алексей ЛОКТЕВ**  
Alexey A. LOKTEV



**Зульфия ФАЗИЛОВА**  
Zulfiya T. FAZILOVA

*Виноградов Валентин Васильевич – доктор технических наук, профессор Российского университета транспорта (МИИТ), Москва, Россия.*  
*Локтев Алексей Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой транспортного строительства РУТ (МИИТ), Москва, Россия.*  
*Фазилова Зульфия Тельмановна – кандидат технических наук, доцент РУТ (МИИТ), Москва, Россия.*

### Mathematical Modeling of Sections of Variable Rigidity in Front of Artificial Structures

(текст статьи на англ. яз. – English text of the article – p. 80)

**В статье рассматриваются особенности переходной зоны с балластного подшпального основания на мостовое сооружение с различными типами пролётных строений, а также сопряжённые с зоной участки безбалластного пути. Предложена аналитическая модель для описания динамического поведения железнодорожного пути в виде трансверсально-изотропной пластины с переменными параметрами жёсткости. Приведены примеры использования предложенной модели для вычисления динамической осадки земляного полотна под воздействием подвижного состава с разными грузовыми и скоростными характеристиками.**

*Ключевые слова:* железная дорога, мост, земляное полотно, остаточная деформация, участок переменной жёсткости, осадка пути, уклон, упругая волна, профиль пути, трансверсально-изотропная пластина.

**П**ри реконструкции участков железных дорог для организации скоростного движения поездов должны быть ликвидированы все проблемные места, которые могут стать источниками больших расстройств пути и возможных ограничений скоростного режима.

Одним из таких объектов является зона примыкания железнодорожного пути на земляном полотне к мосту. Путь на самом мосту достаточно стабилен и не имеет больших просадок, в то время как на земляном полотне в зоне подходов имеет осадку. С целью снижения потенциальной опасности необходимо усиление пути в этой зоне. Для плавного сопряжения проблемных мест на подходах и мостах с балластной и безбалластной конструкцией полотна устраиваются переходные участки с переменной жёсткостью таким образом, чтобы вертикальная жёсткость на мосту и подпорной насыпи не сильно отличались друг от друга.

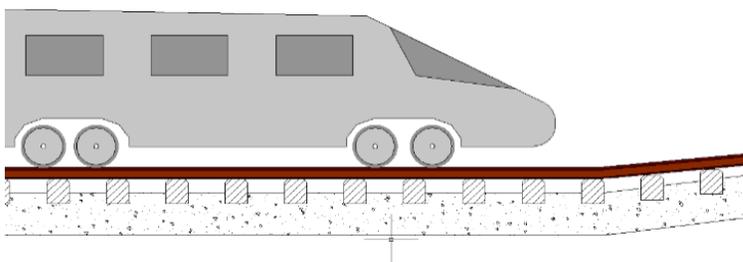


Рис. 1. Участок сопряжения конструкций разной жёсткости.

1.

Длина переходного участка железнодорожного пути с переменной жёсткостью на подходе к мосту определяется для каждого объекта длиной зоны расстройств железнодорожного пути. Помогают в этом данные вагона-путеизмерителя или результаты испытаний нагрузочными поездами.

В таблице 1 приведена минимальная длина участка с переменной жёсткостью на подходе к мосту в зависимости от скорости движения поездов [1].

В исследованиях, проводимых Holland Railconsult [2], длина влияния переходной зоны может быть определена с помощью так называемого правила «одной секунды». В этом случае, к примеру, при скорости движения поезда 200 км/ч длина зоны составит 55 м.

При прохождении подвижного состава по участку перегиба, возникшего в процессе осадки пути, оказывается дополнительное динамическое воздействие на колёсную пару, величина которого зависит от величины перепада (угла) в зоне перехода (рис. 1). Повышенная вибродинамическая нагрузка приводит к повышенному износу элементов верхнего строения пути и появлению дефектов в верхних слоях земляного полотна.

Интенсивность воздействия вибродинамической нагрузки от подвижного состава можно рассчитать по формуле:

$$\rho_0 = \frac{1.3 P_n}{l_{жб} b_0}, \quad (1)$$

где  $P$  – осевая нагрузка расчётной подвижной единицы, кН;

$n$  – число осей в тележке;

$l_{жб}$  – длина жёсткой базы тележки, м;

$b_0$  – длина шпалы, м (при железобетон-

ных шпалах – 2,7 м, при деревянных – 2,75 м).

Существует множество методов и вычислительных алгоритмов, чтобы решать задачи расчёта конструкций, их элементов и целых сооружений на различные виды прилагаемой нагрузки, но наиболее актуальны методики, позволяющие учесть не только динамику в приложении нагрузки, но и динамику в изменениях деформационных и силовых характеристик конструкции пути и основания [3].

Имея данные натуральных наблюдений, можно построить математическую модель участка переменной жёсткости с использованием численных методов в программной среде с помощью ЭВМ и получить пакет функциональных требований и стандартов для переходных конструкций.

В большинстве современных вычислительных комплексов (ПК Лира, Мираж, SCAD, Ansys, Abaqus, Nastran, Lusas и др.) преимущество отдаётся методам конечных и граничных элементов [4–6].

Метод конечных элементов заменяет задачу нахождения функции на задачу нахождения окончательного числа наиболее её точных значений в разных узловых точках. Первичная задача касательно функции строится из функционального уравнения, задача метода конечных элементов относитель-

Таблица 1  
Минимальная длина участка переменной жёсткости

№ пп.	Минимальная длина участка, м	Максимальная скорость движения поездов, км/ч
1	15	менее 80
2	20	80–120
3	25	более 120



но её значений в узлах предполагает нарушение системы алгебраических уравнений. С занижением максимального размера составляющих элементов добавляется количество узлов и искомым узловым параметрам. При этом увеличивается шанс наиболее точно приблизиться к условиям задачи и подойти вплотную к искомому результату.

## 2.

В нашем варианте железнодорожный путь предлагается представить упругой ортотропной пластинкой [3, 4, 7], динамическое поведение которой описывается уравнениями типа Уфлянда—Миндлина—Рейснера, учитывающими инерцию вращения поперечных сечений и деформацию поперечного сдвига [8, 9]. Поскольку движение транспортного средства в прямом участке представляет собой фактически осесимметричную задачу, то и определяющие уравнения можно представить в общем виде, когда волновые характеристики не зависят от угла  $\theta$  [10]:

$$D_r \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - D_\theta \frac{\varphi}{r^2} + hKG_\tau \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \varphi \right) = -\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$KG_\tau \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + KG_\tau \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \varphi \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$C_r \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - C_\theta \frac{u}{r^2} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$C_k \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (5)$$

$$D_k \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} \right) - KhG_{\theta z} \psi = -\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (6)$$

где

$$D_r = \frac{h^3}{12} B_r, \quad D_\theta = \frac{h^3}{12} B_\theta, \quad D_k = \frac{h^3}{12} B_k,$$

$$C_r = hB_r, \quad C_\theta = hB_\theta, \quad C_k = hB_k,$$

$$D_{r0} = D_r \sigma_r + 2D_k,$$

$$B_r = \frac{E_r}{1 - \sigma_r \sigma_\theta}, \quad B_\theta = \frac{E_\theta}{1 - \sigma_r \sigma_\theta}, \quad B_k = G_{r\theta},$$

$$E_r \sigma_r = E_\theta \sigma_\theta, \quad K = \frac{5}{6}; \quad D_r, D_\theta \text{ и } C_r, C_\theta - \text{соответственно жёсткости изгиба и растяжения-сжатия для направлений } r, \theta; D_k - \text{жёсткость кручения; } C_k - \text{жёсткость сдвига; } E_r, E_\theta \text{ и } \sigma_r, \sigma_\theta - \text{модуль упругости и коэффициент Пуассона для направлений } r, \theta; G_{r\theta}, G_{\theta z} - \text{модуль сдвига в плоскостях } rz \text{ и } \theta z \text{ соответственно; } w(r, \theta) - \text{нормальное пе-}$$

ремещение срединной плоскости;  $u(r, \theta)$  и  $v(r, \theta)$  — тангенциальные перемещения срединной поверхности соответственно по координатам  $r, \theta$ ;  $\varphi(r, \theta)$  и  $\psi(r, \theta)$  — произвольные искомые функции координат  $r, \theta$ .

Если рассмотреть деформирование безбалластного пути, то предлагаемую модель можно упростить, приняв, что плита основания может быть представлена трансверсально-изотропной пластиной, лежащей на деформируемом основании, два края которой жёстко закреплены (вдоль пути, по направлению рельс), а два других — шарнирно опёрты (поперёк пути, по направлению шпал) [11–13]. В этом случае пластина в недеформируемом состоянии занимает область  $\{0 \leq x \leq l; 0 \leq y \leq l_2; -h \leq z \leq h\}$ . Для полного моделирования динамического поведения и расчёта по первой и второй группе предельных состояний железобетонной плиты необходимо первоначальную задачу представить в виде совокупности более простых, и первой в этом ряду является задача определения собственных колебаний пластины. Уравнение, описывающее собственные поперечные колебания пластины, можно получить из соотношений (2)–(6) и записать в виде [15]:

$$A_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + A_2 \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} - A_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta W + A_4 \Delta^2 W + P(W) = 0, \quad (7)$$

где  $W$  — поперечное смещение точек срединной плоскости пластины,  $\Delta$  — оператор Лапласа.

$$A_1 = \rho_1; A_2 = \rho_1^2 \left( A_{33}^{-1} + 3A_{44}^{-1} \right) \frac{h^2}{b}; A_3 = \left\{ -\rho_1 \left[ 2 - 2A_{11}A_{33}^{-1} - 3 \left( A_{13}^2 - A_{11}A_{33} \right) A_{33}^{-1} A_{44}^{-1} \right] \right\} \frac{h^2}{b}; A_4 = 2A_{33}^{-1} \left( A_{11}A_{33} - A_{13}^2 \right) \frac{h^2}{b}; A_5 = \frac{S}{2h} \rho_1; A_6 = \frac{S}{2h} \rho_1 \frac{h^2}{2} \left( \rho_1 A_{44}^{-1} + 3A_{33}^{-1} \right); A_7 = -4 \frac{S}{2h} \rho_1 A_{11} A_{33}^{-1}. \quad (8)$$

В этих соотношениях величина  $P(W) = A_5 \frac{\partial W}{\partial t} + A_6 \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} + A_7 \Delta \frac{\partial W}{\partial t}$  — она определяет реакцию основания,  $\rho_1$  — плотность,  $b$  — скорость поперечной волны;  $A_{11} = A_{13} = \dots = A_{nm}$  — коэффициенты анизотропии материала пластины.

Граничные условия для задачи деформирования пластины за счёт поперечных колебаний в данной постановке могут быть представлены в виде [16, 17]:

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0; x = 0, l_1; \quad (9)$$

$$W = \frac{\partial W}{\partial y} = 0; y = 0, l_2.$$

Решение однородного уравнения (7) предлагается искать в следующем виде:

$$W(x, y, t) = W(x, y) \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right), \quad (10)$$

где  $\xi$  — частота собственных колебаний пластины.

После подстановки (10) в (7) получим:

$$A_1 W(x, y) \left(\frac{b\xi}{h}\right)^2 \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) +$$

$$+ A_2 W(x, y) \left(\frac{b\xi}{h}\right)^4 \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) -$$

$$- A_3 \Delta W(x, y) \left(\frac{b\xi}{h}\right)^2 \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) +$$

$$+ A_4 \Delta^2 W(x, y) \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) +$$

$$+ A_5 W(x, y) \left(\frac{b\xi}{h}\right) \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) +$$

$$+ A_6 W(x, y) \left(\frac{b\xi}{h}\right)^3 \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) +$$

$$+ A_7 \Delta W(x, y) \left(\frac{b\xi}{h}\right) \exp\left(\xi \frac{bt}{h}\right) = 0. \quad (11)$$

Для удобства работы с математической моделью пластины целесообразно использовать безразмерные величины  $x = \frac{l_1}{\pi} \alpha;$

$y = \frac{l_2}{\pi} \beta$ , с помощью которых определяющее уравнение (11) можно представить в следующем виде:

$$V(\alpha, \beta) \left[ \left( \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{l_1^2}{l_2^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{l_1^4}{l_2^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right) + \right. \\ \left. B_1 \left( \frac{l_1^2}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{l_1^4}{\pi^2 l_2^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + B_2 \frac{l_1^4}{\pi^4} \right] = 0. \quad (12)$$

Здесь приняты обозначения:

$$B_1 = \frac{1}{A_4} \left[ -A_3 \left(\frac{b\xi}{h}\right)^2 + A_7 \left(\frac{b\xi}{h}\right) \right];$$

$$B_2 = \frac{1}{A_4} \left[ A_1 \left(\frac{b\xi}{h}\right)^2 + A_2 \left(\frac{b\xi}{h}\right)^4 + \right. \\ \left. A_5 \left(\frac{b\xi}{h}\right) + A_6 \left(\frac{b\xi}{h}\right)^3 \right].$$

Для решения уравнения (12) предлагается использовать метод декомпозиций [18], он позволяет рассмотреть отдельно три вспомогательные задачи, объединив полученные результаты.

$$1. \frac{\partial^4 V_1}{\partial \alpha^4} = f_1(\alpha, \beta) \quad V_1 = \frac{\partial V_1}{\partial \alpha} = 0 \quad \alpha = 0, \pi.$$

$$2. \eta^4 \frac{\partial^4 V_2}{\partial \beta^4} = f_2(\alpha, \beta) \quad V_2 = \frac{\partial V_2}{\partial \beta} = 0 \quad \beta = 0, \pi. \quad (13)$$

$$3. \left[ 2\eta^2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \right. \\ \left. + B_1 \frac{l_1^2}{\pi^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + B_2 \frac{l_1^4}{\pi^4} \right] V_3 + f_3 = 0.$$

Здесь

$$\eta = l_1/l_2, \quad f_i(\alpha, \beta) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{n,m}^{(i)} \sin(n\alpha) \sin(m\beta) -$$

произвольные функции в общем виде;  $a_{n,m}^{(i)}$  — произвольные постоянные,  $i=1,2$ .

При определении динамических характеристик поведения пути с учётом собственных колебаний для заданных точек конструкции можно предположить, что приближённо будут выполняться следующие соотношения:

$$V_1 \cong V_2; \quad V_3 = \frac{1}{2}(V_1 + V_2). \quad (14)$$

Общее решение вспомогательных задач (13) предлагается искать в вариантах:

$$V_1(\alpha, \beta) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(1)}}{n^4} \sin(n\alpha) \sin(m\beta) +$$

$$+ \frac{\alpha^3}{6} \psi_1(\beta) + \frac{\alpha^2}{2} \psi_2(\beta) + \alpha \psi_3(\beta) + \psi_4(\beta);$$

$$V_2(\alpha, \beta) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(2)}}{\eta^4 m^4} \sin(n\alpha) \sin(m\beta) +$$

$$+ \frac{\beta^3}{6} \phi_1(\alpha) + \frac{\beta^2}{2} \phi_2(\alpha) + \beta \phi_3(\alpha) + \phi_4(\alpha), \quad (15)$$

где  $\psi_i(\beta)$  и  $\phi_i(\alpha)$  — некоторые произвольные функции, для определения которых необходимо учесть граничные условия (9) и дефрагментацию общей задачи (13).

Определяя  $\psi_i(\beta)$  и  $\phi_i(\alpha)$ , получим:

при  $\alpha = 0$

$$V_1(\alpha, \beta) = \psi_4(\beta) = 0, \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial \alpha^2} = \psi_2(\beta) = 0; \quad (16)$$

при  $\alpha = \pi$

$$\psi_1(\beta) = 0, \quad \psi_3(\beta) = 0,$$

$$V_1(\alpha, \beta) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(1)}}{n^4} \sin(n\alpha) \sin(m\beta); \quad (17)$$

при  $\beta = 0$

$$V_2(\alpha, \beta) = \phi_4(\alpha) = 0, \quad \phi_3(\alpha) = - \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(2)}}{\eta^4 m^3} \sin(n\alpha); \quad (18)$$

при  $\beta = \pi$

$$\phi_1(\alpha) = - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(2)}}{\eta^4 m^3} \sin(n\alpha) \left( (-1)^m + 1 \right),$$

$$\phi_2(\alpha) = \frac{2}{\pi} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(2)}}{\eta^4 m^3} \sin(n\alpha) \left( (-1)^m + 2 \right), \quad (19)$$



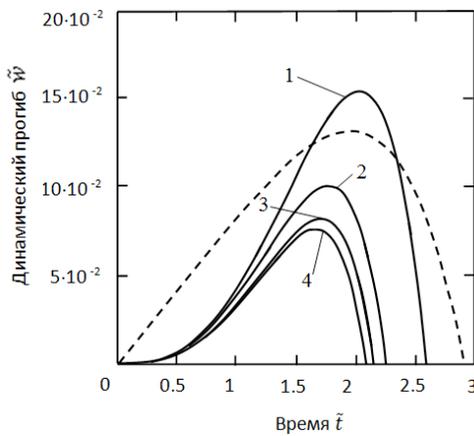


Рис. 3. Зависимость динамического прогиба от времени для различных значений соотношения  $E_0/E_r$ .

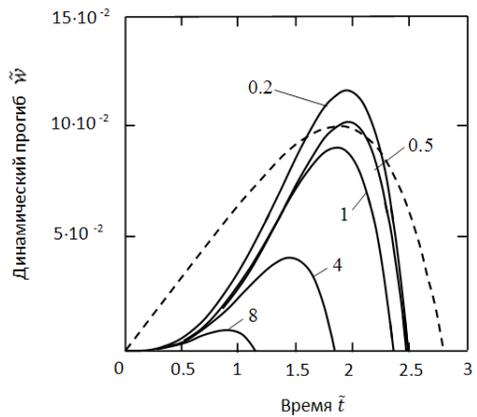


Рис. 4. Зависимость динамического прогиба от времени для различных значений соотношения  $G_{rz}/E_r$ .

$$V_2(\alpha, \beta) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{a_{n,m}^{(2)}}{\eta^4 m^3} \sin(n\alpha) \left( \frac{1}{m} \sin(m\beta) - \frac{\beta^3}{\pi^2} ((-1)^m + 1) + \frac{\beta^2}{\pi} ((-1)^m + 2) - \beta \right)$$

В итоге из (13) имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} V_1 - V_2 = 0, \\ V_3 = \frac{1}{2}(V_2 + V_1), \\ \left[ 2\eta^2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_1 \frac{l_1^2}{\pi^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + B_2 \frac{l_1^4}{\pi^4} \right] V_3 + f_1 + f_2 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

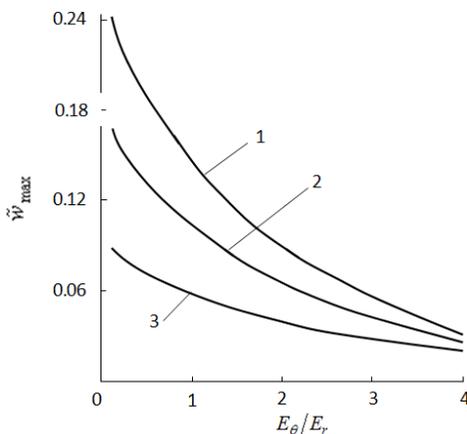


Рис. 5. Зависимость максимального прогиба от соотношения  $E_0/E_r$  для различных значений  $\tilde{E}$ .

При  $n, m = 1$  из (20) фиксируем соотношения:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)} \sin(\alpha) \sin(\beta) - \frac{a_{11}^{(2)}}{\eta^4} \sin(\alpha) \left( \sin(\beta) + \frac{\beta^2}{\pi} - \beta \right) = 0, \\ \left[ 2\eta^2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_1 \frac{l_1^2}{\pi^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + B_2 \frac{l_1^4}{\pi^4} \right] \frac{1}{2} \cdot \\ \cdot \left( a_{11}^{(1)} \sin(\alpha) \sin(\beta) + \frac{a_{11}^{(2)}}{\eta^4} \sin(\alpha) \left( \sin(\beta) + \frac{\beta^2}{\pi} - \beta \right) \right) + \\ + a_{11}^{(1)} \sin(\alpha) \sin(\beta) + a_{11}^{(2)} \sin(\alpha) \sin(\beta) = 0. \end{cases}$$

Полагая  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$  в предыдущих соотношениях, получим систему уравнений, которая имеет ненулевое решение только в случае равенства нулю своего главного определителя:

$$\begin{aligned} & B_1 \frac{l_1^2}{\pi^2 \eta^2} \left[ \left( \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) - \left( \frac{2}{\pi} - 1 \right) \right] - \\ & - B_2 \frac{l_1^4}{\pi^4 \eta^4} \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{\eta^4} \left( 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) - 1 = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Если в (21) подставить выражения для  $B_1$  и  $B_2$ , то получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_4} \left( -A_3 \left( \frac{\xi b}{h} \right)^2 + A_7 \left( \frac{\xi b}{h} \right) \right) \frac{l_1^2}{\pi^2 \eta^2} \left[ \left( \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{2}{\pi} - 1 \right) \right] - \\ & - \frac{1}{A_4} \left( A_2 \left( \frac{\xi b}{h} \right)^4 + A_6 \left( \frac{\xi b}{h} \right)^3 + A_4 \left( \frac{\xi b}{h} \right)^2 + A_5 \left( \frac{\xi b}{h} \right) \right) \frac{l_1^4}{\pi^4 \eta^4} \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) - \\ & - \frac{1}{\eta^4} \left( 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) - 1 = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнение (22) можно представить в виде алгебраического уравнения четвёртого

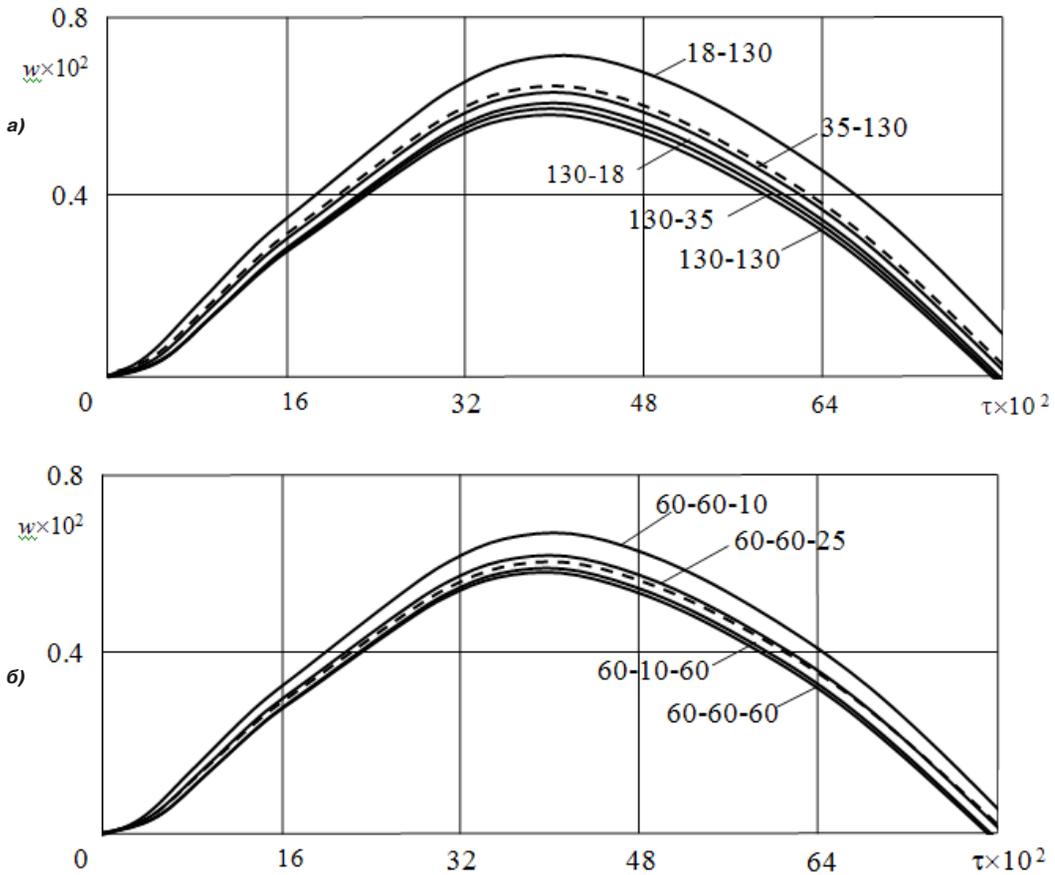


Рис. 6. Зависимость динамического прогиба в месте удара от времени для различных значений в направлениях анизотропии: а) модулей деформации, б) модулей сдвига.

порядка, неизвестным в котором является частота собственных колебаний безбалластного пути

$$d_1 \xi^4 + d_2 \xi^3 + d_3 \xi^2 + d_4 \xi + d_5 = 0. \quad (23)$$

Здесь приняты следующие обозначения коэффициентов при неизвестных:

$$d_1 = -\frac{A_2}{A_4} \frac{l_1^4}{\pi^4 \eta^4} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{b}{h}\right)^4,$$

$$d_2 = -\frac{A_6}{A_4} \frac{l_1^4}{\pi^4 \eta^4} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{b}{h}\right)^3,$$

$$d_3 = \frac{l_1^2}{A_4 \pi^2 \eta^2} \left\{ A_3 \left[ \left(\frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right] - A_4 \frac{l_1^2}{\pi^2 \eta^2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \left(\frac{b}{h}\right)^2,$$

$$d_4 = \frac{l_1^2}{A_4 \pi^2 \eta^2} \left\{ \frac{A_7}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \right] - A_5 \frac{l_1^2}{\pi^2 \eta^2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \left(\frac{b}{h}\right),$$

$$d_5 = \frac{1}{\eta^2} \left[ \left(-1 + \frac{\pi}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{\eta^2}\right) - \left(-1 + \frac{2}{\pi}\right) \right].$$

Решая уравнение (23), можно определить частоты собственных колебаний железнодорожного пути, что, в свою очередь, позволит определить динамическое нормальное перемещение точек как верхнего строения пути [19, 20], так и плиты безбалластного основания по формуле (10).

### 3.

Традиционные способы расчёта параметров поведения железнодорожного пути как из-за движения транспортных средств, так и по причине собственных колебаний не позволяют в полной мере учесть анизотропные свойства конструкции пути, особенно безбалластного, в прямых и кривых участках [7, 15, 21].

Нами исследованы полученные данные и построены графические зависимости динамического прогиба, который моделируется трансверсально-изотропной пластинкой, от времени для различных соотношений модулей упругости и модулей сдвига



[13, 22]. Параметры динамического воздействия транспортного средства на путь принимают следующие значения:  $m = 25$  т,  $h = 500$  мм,  $V_0 = 20$  м/с,  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>.

Используя соотношения (10) для динамического прогиба, записанного в безразмерном виде, получаем графики зависимостей динамических характеристик от времени [12, 23].

На рис. 3 приведены зависимости динамического прогиба верхнего пути от времени для различных значений соотношения  $E_o/E_r$  (отношение приведённых модулей упругости в направлении шпалы и рельса соответственно), которые указаны цифрами у кривых. Рассматривается влияние анизотропных свойств плиты безбалластного основания на характеристики динамического воздействия: при уменьшении соотношения  $E_o/E_r$  происходит увеличение прогиба-просадки до некоторого значения при  $E_o/E_r < 1$ ; при увеличении  $E_o/E_r$  происходит уменьшение прогиба, поскольку последний член отрезка ряда, полученного из (10), уменьшается при росте соотношения  $E_o/E_r > 1$ .

На рис. 4 обозначены осадки безбалластного пути исходя из предположения, что он обладает трансверсально-изотропными свойствами для различных модулей сдвига в направлении, перпендикулярном плоскости насыпи ( $G_{rz}$ ), для различных соотношений модуля сдвига в направлении, перпендикулярном нитке рельсов, и модуля деформации в направлении нитки. Значения  $G_{rz}/E_r$  показаны цифрами у кривых, при  $G_{rz}/E_r = 0,54$  балластная призма обладает изотропными свойствами. Из рис. 4 видно, что увеличение значения соотношения модулей  $G_{rz}/E_r$  приводит к уменьшению прогиба-осадки.

Пунктиром на рис. 3 и рис. 4 показана осадка, определённая экспериментально на подходе к мосту через реку Горючка (чётный путь), мосту, расположенному на участке Саратов–Колоцкий 56 км ПК6. Путём сравнения с кривыми, полученными теоретически по предложенной модели, можно оценить приведённые жёсткости (модули упругости и сдвига) рассматриваемого пути на подходе к мосту. В итоге наблюдается хорошее совпадение результатов эксперимента и аналитического

расчёта по наибольшей величине прогиба и по длительности деформирования пути, только вначале экспериментальная зависимость ведёт себя более линейно, чем теоретическая.

На рис. 5 приведены зависимости максимального прогиба от соотношения  $E/E$  для различных значений приведённого модуля деформации верхнего строения пути  $\tilde{E}$ : кривая 1 соответствует  $\tilde{E} = 3,6 \cdot 10^{-6}$ , кривая 2 —  $\tilde{E} = 2,5 \cdot 10^{-6}$ , кривая 3 —  $\tilde{E} = 1,4 \cdot 10^{-6}$ . Из рис. 5 следует, что максимальный прогиб уменьшается с увеличением соотношения  $E_o/E_r$  и увеличивается с увеличением линейной жёсткости контакта колесо–рельс  $\tilde{E}$ . Столь же ясно, что при увеличении отношения  $E_o/E_r$  динамический прогиб уменьшается для всех рассмотренных соотношений контактной жёсткости колесо–рельс.

Одновременно были определены перемещения основания плиты безбалластного пути в зоне её соприкосновения с грунтом насыпи.

На рис. 6а показано, что при снижении модулей упругости  $E_r$  и  $E_o$  максимальное значение динамического прогиба увеличивается, а  $E_r$  оказывает наибольшее влияние на прогиб. При снижении значений модулей сдвига прогиб возрастает, при этом, как фиксирует график рис. 6б,  $G_{oz}$  более остальных параметров оказывает влияние на динамический прогиб мишени.

При снижении  $G_{rz}, G_{oz}$  наибольший прогиб и время, в течение которого прогиб приравнивается к нулю, возрастают пропорционально, а при снижении  $G_{ro}$  время, относящееся к нулевому прогибу, возрастает интенсивнее, т.е. восстановление земляного полотна будет проходить медленнее.

Сравнивая графические зависимости для динамической осадки, можно подобрать механические характеристики насыпи с анизотропными свойствами (перебором различных конструкций для переходных участков переменной жёсткости) таким образом, чтобы добиться уменьшения осадки до уровня, необходимого для движения состава с заданной скоростью, а также максимальной силы, при которой не будет наблюдаться дефектов полотна.

## ВЫВОДЫ

Анализируя и сравнивая полученные теоретические зависимости для различных величин механических параметров земляного полотна с расчётными данными, нетрудно обнаружить, что изменением механических параметров грунта можно как повысить, так и понизить деформацию железнодорожного пути. Высокое соответствие данных математического моделирования и экспериментальных исследований даёт возможность рекомендовать предлагаемую методику в качестве средства решения задач, обеспечивающих стабильность поведения железнодорожного пути при эксплуатации существующих линий и при проектировании высокоскоростных магистралей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Инструкция по применению конструктивно-технологических решений переходных участков на подходах к искусственным сооружениям для участков скоростного совмещённого движения. Утверждена распоряжением ОАО «РЖД» от 20.12.2013 г. № 2754р.
2. Coelho, B., Priest, J., Hölscher, P., Powrie, W. Monitoring of transition zones in railways, 10<sup>th</sup> International Conference and Exhibition on railway engineering, London, 24–25 June, 2009.
3. Коншин Г. Г. Работа земляного полотна под поездами. – М.: УМЦ по образованию на ж. д. транспорте, 2012. – 208 с.
4. Локтев А. А., Виноградов В. В., Бучкин В. А. Модели взаимодействия колеса и рельса при высоких скоростях движения // Мир транспорта. – 2016. – № 1. – С. 54–60.
5. Loktev A., Sychev V., Gridasova E. and Stepanov R. Mathematical Modeling of Railway Track Structure under Changing Rigidity Parameters // Nonlinearity. Problems, Solutions and Applications. V.1. Theoretical and Applied Mathematics. – 2017. – Pp. 291–307.
6. Киселёв Ф. Б., Мансуров А. Р., Рамазанов М. И. Моделирование динамического воздействия подвижного состава на основание железнодорожной насыпи с цилиндрической полостью // Внедрение современных конструкций и передовых технологий в путевое хозяйство. – 2016. – № 10. – С. 37–45.
7. Абдурашитов А. Ю., Сычёв В. П., Абдурашитов Ю. А. Выбор моделей напряжённо-деформированного состояния железнодорожных рельсов при различных вариантах их закаливании // Внедрение современных конструкций и передовых технологий в путевое хозяйство. – 2016. – № 10. – С. 64–79.
8. Локтев А. А. Ударное взаимодействие твёрдого тела и упругой ортотропной пластинки // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – № 4. – С. 478–492.
9. Loktev A. A., Sychev V. P. Vinogradov V. V., Buchkin V. A. Modelling of the Dynamic Contact between a Wheel of a Moving Railway Vehicle and Rails with

Evaluation of Defects Emerging upon Their Interaction. Part 1. The Defects of the Rail and Models of Contact // Applied Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 11. – No. 10. – Pp. 473–480.

10. Сычёв В. П., Новожилов Т. В. Исследование влияния на работу железнодорожного пути демпфирующих подкладок под рельсы и шпалы // Наука и техника транспорта. – 2016. – № 1. – С. 63–68.

11. Залетдинов А. В., Локтев А. А., Сычева А. В., Запольнова Е. В. Выбор мест усиления земляного полотна // Путь и путевое хозяйство. – 2015. – № 3. – С. 15–18.

12. Agostinacchio M., Ciampa D., Diomedì M., Olita S. Parametrical analysis of the railways dynamic response at high speed moving loads. Journal of Modern Transportation. – 2013. – Vol. 21. – No. 3. – Pp. 169–181.

13. Phillips J. W., Calvit H. H. Impact of a rigid sphere on a viscoelastic plate // Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics. – 1967. – Vol. 34. – No. 4. – Pp. 873–878.

14. Старишкин В. В., Фазилова З. Т. Участки переходной жёсткости в зоне примыкания к мостам с балластной и безбалластной конструкцией пути // Внедрение современных конструкций и передовых технологий в путевое хозяйство. – 2017. – № 11. – С. 16–20.

15. Chen P., Xiong J., Shen Z. Thickness effect on the contact behavior of a composite laminate indented by a rigid sphere. Mechanics of Materials. – 2008. – Vol. 40. – Pp. 183–194.

16. Сычева А. В., Сычев В. П., Бучкин В. А., Быков Ю. А. Моделирование работы железнодорожного пути как системы квазиупругих ортотропных слоёв // Вестник МГСУ. – 2016. – № 3. – С. 37–46.

17. Malekzadeh K., Khalili M. R., Mittal R. K. Response of composite sandwich panels with transversely flexible core to low-velocity transverse impact: A new dynamic model. Int. J. of Impact Engineering. – 2007. – Vol. 34. – P. 522–543.

18. Локтев А. А. Удар вязкоупругого тела по упругой изотропной пластинке // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – № 3. – С. 417–425.

19. Вершинин В. В., Локтев А. А. Моделирование систем противоударной изоляции с вязкоупругими элементами // Вестник МГТУ им. Баумана. Серия Естественные науки. – 2012. – № 2. – С. 52–67.

20. Локтев А. А. Упругопластическая модель взаимодействия цилиндрического ударника и пластинки // Письма в Журнал технической физики. – 2007. – № 16. – С. 72–77.

21. Локтев А. А., Бахтин В. Ф., Черников И. Ю., Локтев Д. А. Методика определения внешних дефектов сооружения путём анализа серии его изображений в системе мониторинга // Вестник МГСУ. – 2015. – № 3. – С. 7–16.

22. Алфимцев А. Н., Локтев Д. А., Локтев А. А. Сравнение методологий разработки систем интеллектуального взаимодействия // Вестник МГСУ. – 2013. – № 5. – С. 200–208.

23. Локтев А. А., Сычева А. В., Талашкин Г. Н., Степанов К. Д. Разработка математической модели железнодорожного пути переменной жёсткости // Внедрение современных конструкций и передовых технологий в путевое хозяйство. – 2016. – № 9. – С. 26–38.

Координаты авторов: **Виноградов В. В.** – +7(495) 684–21–10, **Локтев А. А.** – aaloktev@yandex.ru, **Фазилова З. Т.** – fazil\_1905@mail.ru.

Статья поступила в редакцию 22.03.2018, принята к публикации 19.05.2018.

