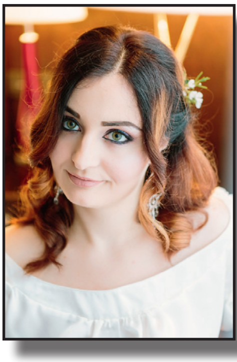
УДК (531.36+624.07):534.1

К вопросу о нелинейных волнах в стержнях


Сергей ВАКУЛЕНКО
Sergey P. VAKULENKO

Александра ВОЛОСОВА
Alexandra K. VOLOSOVA

Наталья ВОЛОСОВА
Natalya K. VOLOSOVA

Вакуленко Сергей Петрович — кандидат технических наук, профессор, директор Института управления и информационных технологий Российского университета транспорта (МИИТ), Москва, Россия.
Волосова Александра Константиновна — кандидат физико-математических наук, руководитель отдела аналитики ООО «Трамплин», Москва, Россия.
Волосова Наталья Константиновна — магистрант МГТУ имени Н. Э. Баумана, Москва, Россия.

On the Problem of Nonlinear Waves in Rods
(текст статьи на англ. яз. – English text of the article – p. 13)

В статье демонстрируются новые, неклассические дисперсионные волны, колебания и исследуется их спектр по двум причинам: во-первых, происходит увеличение количества применяемых на железнодорожном транспорте композитных материалов, которые приводят к явлению дисперсии, во-вторых, весна 2017 года показала, что многие километры пути были затоплены «мелкой водой». Явление дисперсии существенно затрудняет обнаружение средствами диагностики новых дефектов пути с подвижного состава (см. «МТ», 2016, № 3). В данном случае для целей исследования применяется метод «нефиксированной конструктивной замены переменных».

Ключевые слова: железнодорожный путь, спектр колебаний, система диагностики, новые решения уравнений Кортевега–де Вриза, метод нефиксированной конструктивной замены переменных.

Одна из точек зрения на создание в будущем и функционирование высокотехнологичного комплекса контроля качества состояния железнодорожного пути непосредственно с движущегося состава и теоретические основы метода контроля излагаются в статье [1], там же приведено мнение других авторов по этой теме. Имеется в виду идея использовать для поиска дефектов ту часть энергии движения, которая переходит в энергию колебаний. Напомним, что предлагается все железнодорожные пути разделить на участки различной длины с учётом инфраструктуры и сооружений, геологии и т.д. [1]. На каждом «исправном» (пригодном для эксплуатации) участке записывается в базу данных эталонный спектр колебаний, который позже сравнивается с текущими аналогичными данными. То есть задача выявления дефекта пути и определения его пространственной локализации может быть решена с помощью энергии продольных, вертикальных и поперечных колебаний, возникающих при прохождении подвижного состава, и относится она к задачам, которые в математике называются «обратными». Поскольку существует огромное разнообразие краевых и начальных условий, связанных с различными геометрическими, климатическими, геологическими факторами, «обратные» задачи даже только с двумя пространственными переменными и те требуют столь больших ресурсов, экстраординарных вычислительных мощностей, что в настоящее время нет возможности с ними справиться.

Решения «прямых» задач с одной пространственной переменной построить проще и значительно дешевле. Математические методы и современные технологии здесь позволяют получить информацию о колебаниях и волнах, их амплитудах, огибающих спектра, частотах резонансов и т.д., что является важной подсказкой при анализе спектра колебаний на каждом участке железнодорожного пути. В настоящее время стоит задача накопления данных, расшифровки спектров и интерпретации возможных причин появления дефектов, выявления специфических признаков, предстоит создание баз больших данных (можно провести аналогию с технологиями Big Data и Block chain).

Публикуемая статья обозначает новый шаг в направлении высокотехнологического контроля. В чём-то он приближает создание прототипа закрытой сети ОАО «РЖД», в которой будут реализованы программа «Цифровая железная дорога», принципы Интернета вещей [2]. Будут построены автоматические системы, вычислительные сети физических предметов (вещей), оснащённые встроенными технологиями взаимодействия, которые смогут без участия человека делать сетевые запросы, следить за функционированием других систем, автоматов и роботов, пересылать информацию о состоянии железнодорожных путей из отдалённых районов в региональные базы данных ОАО «РЖД» с помощью системы ГЛОНАСС. Объединение региональных вычислительных центров ОАО «РЖД» в общую сеть позволит проводить без участия человека поиск и математический анализ похожих по спектральным и другим характеристикам данных, выявлять причины и оценивать риски с возможностью принятия практических решений в каждом случае.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В научном трактате [4] рассматриваются математические модели, предложенные Рэлеем и Лявом, Бишопом, Миндлиным и Германом для стержней и пластин, и показано, что в определённых условиях (наличие композитных материалов, переменный модуль Юнга) для описания продольных волн в стержнях применимо нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными третьего порядка Кортевега–де Вриза (КдВ).

Замечание 1. *Отметим, что идея о том, что в качестве независимой переменной можно в определённых условиях использовать искомую функцию, восходит к диссертации российского математика, одного из основоположников аэродинамики, академика С. А. Чаплыгина [7].*

Интерес к задачам, связанным с уравнением КдВ

$$\frac{\partial Z(x,t)}{\partial t}+Z^n\frac{\partial Z(x,t)}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 Z(x,t)}{\partial x^3}=0, \quad (1)$$

в школе академика В. П. Маслова появился давно [3].

История вопроса и некоторые методы для уравнения (1) приведены в [3, 5, 6].

При $n = 1$ (слабая дисперсия) имеем классическое нелинейное уравнение КдВ, которое связано преобразованием Миуры с модифицированным уравнением КдВ при $n = 2$ (случай сильной дисперсии) [3, 4].

Замечание 2*. Из указанных работ известно, что группу преобразований сдвига $Z(x, t) = y(\theta)$ с инвариантом $\theta = x - Vt$ сопровождает обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ). Его первый интеграл описывает колебания ангармонического осциллятора с нелинейностью*

$$y''(\theta)=-\frac{y(\theta)^{n+1}}{\beta(n+1)}+\frac{V\,y(\theta)}{\beta}-\frac{C_1}{\beta}, \quad C_1=const.$$

*Порядок уравнения понижается, и это означает, что уравнение колебаний **отделяется**, то есть первая производная зависит только от функции $y(\theta)$.*

Этот вывод в случае одной переменной является тривиальным.

Умножим последнее уравнение на $y'(\theta)$. Интегрируя последнее уравнение, получим:

$$y'(\theta)^2=E-\frac{2y(\theta)^{n+2}}{\beta(n+1)(n+2)}+$$

$$+\frac{V\,y(\theta)^2}{\beta}-2\frac{C_1}{\beta}y(\theta),$$

где константа интегрирования E имеет смысл начальной энергии, а остальные слагаемые в правой части — смысл потенциальной энергии со знаком «минус». Отсюда следует решение К. Якоби. С точки зрения метода нефиксированной конструктивной замены переменных (НФКЗП) это случай вырождения, так как якобиан равен нулю.

Однако существует и другой вариант проявления свойств симметрии, в котором порядок уравнения не понижается, а уравнение на первую производную и искомую функцию ***отделяется*** *от всех других. Этот случай и будет описан ниже.*

Замечание 3*. Применение метода НФКЗП позволяет найти такие переменные, в которых нелинейное уравнение записывается как система линейных алгебраических функциональных уравнений (СЛАФУ), и это даёт возможность, во-первых, получить новые точные или приближённые решения, а во-вторых, построить динамические системы, что открывает возможность исследовать устойчивость [3].*

НОВЫЙ ПУТЬ АНАЛИЗА

Предполагаем, что все функции – трижды непрерывно дифференцируемые по всем переменным. Сделаем в (1) произвольную замену переменных:

$$Z(x,t)\ \Big|_{x=x(\xi,\delta),\ t=t(\xi,\delta)} = U(\xi,\delta). \qquad (2)$$

Обратная замена восстанавливает решение $Z(x, t)$ уравнения по функции $U(\xi, \delta)$ хотя бы локально:

$$Z(x,t) = U(\xi,\delta)\ \Big|_{\xi=\xi(x,t),\delta=\delta(x,t)}. \qquad (3)$$

Предположим, что якобиан – определитель матрицы Якоби $J = \begin{pmatrix} x'_\xi & x'_\delta \\ t'_\xi & t'_\delta \end{pmatrix}$

не равен нулю и бесконечности, т.е. $\det J = x'_\xi t'_\delta - x'_\delta t'_\xi \neq 0, \infty$.

Тогда существует (опять же хотя бы локально) обратное преобразование $\xi = \xi(x, t)$, $\delta = \delta(x, t)$. Обратная матрица Якоби имеет вид $J^{-1} = \begin{pmatrix} \xi'_x & \xi'_t \\ \delta'_x & \delta'_t \end{pmatrix}$.

Должно быть выполнено соотношение $JJ^{-1} = E$, тогда получим формулы пересчёта производных старых переменных $x(\xi, \delta)$, $t(\xi, \delta)$ по новым переменным $\xi(x, t)$, $\delta(x, t)$:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \det J\,\frac{\partial \delta}{\partial t}, \quad \frac{\partial t}{\partial \xi} = -\det J\,\frac{\partial \delta}{\partial x},$$
$$\frac{\partial x}{\partial \delta} = -\det J\,\frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial t}{\partial \delta} = \det J\,\frac{\partial \xi}{\partial x}. \qquad (4)$$

Введём обозначения (установим дифференциальные связи):

$$\frac{\partial Z}{\partial x}\ \Big|_{x=x(\xi,\delta),t=t(\xi,\delta)} = Y(\xi,\delta),$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t}\ \Big|_{x=x(\xi,\delta),t=t(\xi,\delta)} = T(\xi,\delta). \qquad (5)$$

$$\frac{\partial Y(\xi(x,t),\ \delta(x,t))}{\partial x}\ \Big|_{x=x(\xi,\delta),t=t(\xi,\delta)} = M(\xi,\delta).$$

Используя (4) и (5), получим:

$$-\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial x}{\partial \xi} = T(\xi,\delta)(x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta), \quad (6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi} = Y(\xi,\delta)(x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta), \quad (7)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial Y}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi} = M(\xi,\delta)(x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta). \quad (8)$$

Уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial M}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial M}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi} =$$
$$= -(T(\xi,\delta) + U^n\, Y(\xi,\delta))\ (x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta)/\beta. \quad (9)$$

С необходимостью должно быть выполнено соотношение

$$\frac{\partial^2 Z(x(\xi,\delta),t(\xi,\delta))}{\partial x \partial t}\ \Big|_{x=x(\xi,\delta),\ t=t(\xi,\delta)} =$$
$$= \frac{\partial^2 Z(x(\xi,\delta),\ t(\xi,\delta))}{\partial t\, \partial x}\ \Big|_{x=x(\xi,\delta),\ t=t(\xi,\delta)} \qquad (10)$$

в переменных ξ, δ. Это соотношение с учётом равенств (3), (4) можно записать в виде

$$-\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial Y}{\partial \delta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial t}{\partial \delta}\frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial T}{\partial \delta} = 0. \quad (11)$$

Систему (6), (7), (9), (11) можно рассматривать как систему функциональных линейных алгебраических уравнений (СФЛАУ) относительно переменных (производных старых переменных по новым)

$$\frac{\partial x}{\partial \delta},\quad \frac{\partial x}{\partial \xi},\quad \frac{\partial t}{\partial \xi},\quad \frac{\partial t}{\partial \delta},$$

и она имеет единственное нетривиальное явное решение. Этот факт лежит в основе метода НФКЗП.

Обозначим частные производные функции:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = z_1(\xi,\delta), \quad \frac{\partial x}{\partial \delta} = z_2(\xi,\delta),$$
$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = z_3(\xi,\delta), \quad \frac{\partial t}{\partial \delta} = z_4(\xi,\delta). \qquad (12)$$

Введём обозначения для краткости записи нелинейной системы (6), (7), (9), (11):

$$a_{12}=-\frac{\partial U}{\partial \xi}=-a_{24}, \quad a_{11}=\frac{\partial U}{\partial \delta}=-a_{23},$$

$$a_{32}=-\frac{\partial Y}{\partial \xi}=-a_{44}, \quad a_{43}=-\frac{\partial Y}{\partial \delta}=-a_{31},$$

$$a_{53}=-\frac{\partial M}{\partial \delta},\ a_{54}=\frac{\partial M}{\partial \xi},\ a_{33}=\frac{\partial T}{\partial \delta},$$

$$a_{34}=-\frac{\partial T}{\partial \xi},\ \mathrm{T}_1=\mathrm{T}+\mathrm{U}^n\,\mathrm{Y}. \tag{13}$$

Теорема 1. Пусть имеем СФАУ – систему функциональных алгебраических уравнений (6), (7), (9), (11). Указанная система является ***линейной*** (СФЛАУ), и существует единственное нетривиальное решение системы четырёх уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial \xi}=(a_{32}(a_{12}\,a_{53}-a_{11}\,a_{54})\beta T+\\
&+a_{12}((a_{11}\,a_{34}-a_{12}\,a_{33})T_1+\\
&+(a_{54}\,a_{33}-a_{53}\,a_{34})\beta Y))/\Psi_0=z_1(\xi,\delta),\\
&\Psi_0=T((a_{11}\,a_{32}-a_{12}\,a_{31})T_1+\\
&+(a_{31}\,a_{54}-a_{32}\,a_{53})\beta Y)+\\
&+Y((a_{12}\,a_{33}-a_{11}\,a_{34})T_1+\\
&+(a_{53}\,a_{34}-a_{54}\,a_{33})\beta Y);
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial \delta}=(a_{31}(a_{11}\,a_{54}-a_{12}\,a_{53})\beta T+\\
&+a_{11}((a_{12}\,a_{34}-a_{11}\,a_{33})T_1+\\
&+(a_{53}\,a_{33}-a_{54}\,a_{34})\beta Y))/\Psi_0=\\
&=z_2(\xi,\delta);
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial t}{\partial \xi}=((a_{11}\,a_{32}-a_{12}\,a_{31})\bullet\\
&\bullet(a_{12}\,T_1-a_{54}\,\beta Y))/\Psi_0=\\
&=z_3(\xi,\delta);
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial t}{\partial \delta}=((a_{11}\,a_{32}-a_{12}\,a_{31})\bullet\\
&\bullet(a_{11}\,T_1-a_{53}\,\beta Y))/\Psi_0=z_4(\xi,\delta).
\end{aligned} \tag{17}$$

Якобиан имеет вид:

$$\det J=\beta(a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32})\ \bullet$$
$$\bullet\ (a_{12}a_{53}-a_{11}a_{54}))/\Psi_0=g(\xi,\delta). \tag{18}$$

Функция $M(\xi, \delta)$ вычислена из (8):

$$M(\xi,\delta)=(-a_{44}\,z_4(\xi,\delta)\ +$$
$$+\ a_{43}\,z_3(\xi,\delta))/g(\xi,\delta). \tag{19}$$

Доказательство. Система (6), (7), (9), (11) *выглядит* ***сложной, нелинейной,*** однако на самом деле она, как доказано в данной теореме, является СФЛАУ. В работах [5–6] для аналогичной СЛАФУ, полученной для квазилинейных параболических уравнений, доказано, что существует единственное нетривиальное решение, которое построено там тоже в явной форме. Следуем основному указанному в нём алгоритму. Решение системы (6), (7), (9), (11) строится сначала в соответствии с известным методом Гаусса.

Из трёх уравнений (6), (7), (9) вытекают два линейных уравнения. Например, умножим (6) на $Y(\xi, \delta)$, а (7) на $T(\xi, \delta)$ и вычтем полученные уравнения. Получим ЛФАУ относительно переменных (12). Выполняем аналогичные элементарные преобразования, допустим, для уравнений (7), (9), получим второе ЛФАУ относительно неизвестных функций (12). Уравнение (11) является линейным относительно переменных (12).

Таким образом, элементарными преобразованиями приводим три строки матрицы к почти треугольному виду. Выражаем любые три производные старых переменных по новым (12) через четвёртую. Подставляем полученные соотношения в оставшееся уравнение, и здесь нас ожидает сюрприз: итоговое уравнение оказывается **линейным**! Тогда получим (14) – (17). Далее вычисляем (18), (19). Теорема 1 доказана.

Если рассматривать (14) – (17) как систему дифференциальных уравнений с частными производными (ЧП), то с необходимостью должно быть выполнено равенство вторых смешанных производных [3].

Теорема 2. Пусть дано уравнение КдВ (1) и формулы замены переменных (2) – (5). Тогда уравнение имеет вид СФЛАУ

$$a_{11}\,\frac{\partial x}{\partial \xi}+a_{12}\frac{\partial x}{\partial \delta}=T(\xi,\delta)\ g(\xi,\delta); \tag{20}$$

$$a_{23}\,\frac{\partial t}{\partial \xi}+a_{24}\frac{\partial t}{\partial \delta}=Y(\xi,\delta)\ g(\xi,\delta); \tag{21}$$

$$a_{31}\frac{\partial x}{\partial \xi}+a_{32}\frac{\partial x}{\partial \delta}+a_{33}\,\frac{\partial t}{\partial \xi}+a_{34}\,\frac{\partial t}{\partial \delta}=0; \tag{22}$$

$$a_{53}\,\frac{\partial t}{\partial \xi}+a_{54}\,\frac{\partial t}{\partial \delta}=-T_1(\xi,\delta)\,g(\xi,\delta) \tag{23}$$

и уравнения (19).

Здесь якобиан (18) $g(\xi, \delta)$ явно вычислен, а функция Ψ_0 определена в (14).

Решение линейной системы СФЛАУ (20)–(23) имеет вид (14)–(17).

Доказательство. Подставим вычисленное значение якобиана (18) в правую часть (6), (7), (9), (11) и получим СФЛАУ (20)–(23).

Итак, имеем первую нелинейную динамическую систему, состоящую из (14), (16), а также вторую нелинейную динамическую систему, состоящую из (15), (17), и две соответствующие им матрицы Якоби. Переменные ξ*,* δ трактуются как новое время, параметр вдоль траекторий динамической системы. Используя теорию динамических систем, можно провести исследование на устойчивость решения [3]. Анализ свойств основного якобиана также проведён в [3].

Рассмотрим частный случай, который существенно упрощает выкладки, а именно положим $t(\xi, \delta) = \xi$. Выберем вторую скобку в (17) и приравняем её нулю. Получим:

$$\frac{\partial M}{\partial \delta} = -\frac{\partial U}{\partial \delta} T_1 \ / (\beta Y). \qquad (24)$$

После подстановки в (19), (7) и упрощений имеем:

$$M(\xi,\delta) = \frac{\partial Y}{\partial \delta} Y \ / (\frac{\partial U}{\partial \delta}),$$
$$x'_{\delta}(\xi,\delta) = U'_{\delta}(\xi,\delta) / Y(\xi,\delta). \qquad (25)$$

Дифференцируем (25) по переменной δ и, приравнивая к (24) с учётом (13), получаем:

$$T(\xi,\delta) = -U^n Y - \beta \left(\frac{\partial Y}{\partial \delta}\right)^2 Y \ /$$
$$/\left(\frac{\partial U}{\partial \delta}\right)^2 - \frac{\beta Y^2}{U'_{\delta}} \frac{\partial}{\partial \delta}\left(\frac{Y'_{\delta}}{U'_{\delta}}\right) =$$
$$= -U^n Y - \frac{\beta Y}{U'_{\delta}} \frac{\partial}{\partial \delta}\left(\frac{Y Y'_{\delta}}{U'_{\delta}}\right). \qquad (26)$$

Вычисляем первые производные от функций (25), (26) и элементы матрицы Якоби, далее находим определитель, собственные числа и след этой матрицы (дивергенция), которые являются критериями в теоремах, устанавливающих устойчивость в [3]. Отметим, что под таким углом зрения уравнения КдВ никто ранее не рассматривал. Формально возникает два условия разрешимости системы (14)–(17). Два равенства смешанных производных имеют вид:

$$\frac{\partial z_1(\xi,\delta)}{\partial \delta} - \frac{\partial z_2(\xi,\delta)}{\partial \xi} =$$
$$= T(\xi,\delta)\, Q(\xi,\delta) = 0,$$
$$\frac{\partial z_3(\xi,\delta)}{\partial \delta} - \frac{\partial z_4(\xi,\delta)}{\partial \xi} =$$
$$= Y(\xi,\delta)\, \Psi_o^2\, Q(\xi,\delta) = 0. \qquad (27)$$

Существует нетривиальный общий множитель $Q(\xi, \delta)$ для любой функции $M(\xi, \delta)$. Два условия разрешимости (27) сводятся к одному соотношению:

$$Q(\xi, \delta) = 0. \qquad (28)$$

НОВЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КдВ

Теорема 3. Пусть даны СФЛАУ (20)–(23), её решение (14)–(17), а также определены выражения якобиана (18) и функции $M(\xi, \delta)$ (19).

а) Тогда справедливы соотношения:

$$t(\xi,\delta) = \xi, \ \ \frac{\partial M}{\partial \delta} = -\frac{\partial U}{\partial \delta} T_1(\xi,\delta) \ / (\beta Y),$$
$$\mathrm{T}_1(\xi,\delta) = \mathrm{T}(\xi,\delta) + \mathrm{U}^n(\xi,\delta)\ \mathrm{Y}(\xi,\delta),$$
$$M(\xi,\delta) = \frac{\partial Y}{\partial \delta} Y \ / (\frac{\partial U}{\partial \delta}),$$
$$x'_{\delta}(\xi,\delta) = U'_{\delta}(\xi,\delta) / Y(\xi,\delta) \qquad (29)$$

и выражение для функции Т имеет вид (26).

Решение СФЛАУ (14) – (17) после упрощений примет вид:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = (Y\, T'_{\delta}\, U'_{\xi} - T\, U'_{\delta}\, Y'_{\xi}) /$$
$$/ (Y(Y\, T'_{\delta} - T\, Y'_{\delta})) = z_1(\xi,\delta),$$
$$\frac{\partial x}{\partial \delta} = U'_{\delta} \ / Y = z_2(\xi,\delta); \qquad (30)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = (Y'_{\delta}\, U'_{\xi} - Y'_{\xi}\, U'_{\delta}) /$$
$$/ (T\, Y'_{\delta} - T'_{\delta}\, Y) = z_3(\xi,\delta) = 1,$$
$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = z_4(\xi,\delta) = 0. \qquad (31)$$

Общий множитель в необходимых условиях разрешимости (28) принимает вид линейного дифференциального уравнения с ЧП первого порядка:

$$T'_{\delta} - T(\xi,\delta) Y'_{\delta} / Y +$$
$$+ \left(\frac{\partial Y}{\partial \delta}\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) / Y - \left(\frac{Y'_{\xi}\, U'_{\delta}}{Y}\right) = 0. \qquad (32)$$

б) Тогда уравнение (32) обеспечивает выполнение первого равенства (31) и как следствие *отделяется дифференциальное уравнение с ЧП* третьего порядка, связывающее только функции $Y(\xi, \delta)$, $U(\xi, \delta)$:

$$\frac{\partial}{\partial \delta}\left(\int \frac{Y'_{\delta}\, U'_{\xi}}{Y^2} d\delta - \int \frac{Y'_{\xi}\, U'_{\delta}}{Y^2} d\delta + C_0(\xi)\right) =$$
$$\frac{\partial}{\partial \delta}\left(U^n(\xi,\delta) + \frac{\beta}{U'_{\delta}} \frac{\partial}{\partial \delta}\left(\frac{Y Y'_{\delta}}{U'_{\delta}}\right)\right). \qquad (33)$$

Доказательство. Роль исходного времени играет переменная $t(\xi, \delta) = \xi$. Кроме того важно, что первое уравнение (31)

$$(Y_\delta^{'} U_\xi^{'} - Y_\xi^{'} U_\delta^{'}) / (T\, Y_\delta^{'} - T_\delta^{'}\, Y) = 1$$

тождественно удовлетворяется равенством (32).

Построение точного решения уравнения (1) методом НФКЗП сводится в данном случае к решению уравнения (33), что отражено в теореме 4.

Теорема 4. Пусть справедливы (1)–(6). Тогда дифференциальное уравнение с ЧП (33) для функции $Y(\xi, \delta)$ **отделяется** от всех других уравнений и зависит только от функции $Y(\xi, \delta)$ и её производных:

$$\frac{\partial}{\partial\delta}(U^n(\xi,\delta) + \frac{\beta}{U_\delta^{'}}\frac{\partial}{\partial\delta}\left(\frac{Y\,Y_\delta^{'}}{U_\delta^{'}}\right)) = \\ = \left(Y_\delta^{'}\, U_\delta^{'} - Y_\xi^{'}\, U_\delta^{'}\right) / Y^2. \qquad (34)$$

Замена

$$t(\xi,\delta) = \xi, \quad Y(\xi,\delta) = Y_0(U(\xi,\delta),\delta) = \\ = Y_0(\eta,\delta), \eta = U(\xi,\delta) \qquad (35)$$

приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям с ЧП третьего порядка:

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial Y_0(\eta,\xi)}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(Y_0^3\frac{\partial^2 Y_0}{\partial\eta^2}\right) + \\ + \frac{2\eta^{n-1} n}{\beta} Y_0^2(\eta,\xi) = 0. \qquad (36)$$

Замена $Y_0(\eta, \xi) = \pm\sqrt{G(\eta, \xi)}$ в уравнении (36) приводит к нелинейному уравнению с ЧП третьего порядка:

$$\frac{sign}{\beta\, G(\eta,\xi)^{(3/2)}}\frac{\partial G(\eta,\xi)}{\partial\tau} + \\ + \frac{\partial^3 G(\eta,\xi)}{\partial\eta^3} + \frac{2\eta^{-1+n} n}{\beta} = 0. \qquad (37)$$

Некоторые формулы ниже приведены для значения $sign = 1$ (для значения $sign = -1$ выписываются аналогично). Якобиан имеет два тождественных выражения

$\det \mathrm{J} = -\mathrm{U}_\delta^{'}(\xi,\delta) / Y_0(\eta,\xi)$ и

$Y_0(\eta,\xi) = \sqrt{G(\eta,\xi)}$.

$$M(\xi,\delta) = G_\eta^{'}(\eta,\xi)/2, \quad T(\xi,\delta) = \\ = -\frac{1}{2}\sqrt{G(\eta,\xi)}\,(2\eta^n + \beta G_{\eta\eta}^{''}(\eta,\xi)), \qquad (38)$$

$$x(\xi,\delta) = X(\eta,\xi),\ \frac{\partial X(\eta,\xi)}{\partial\xi} = \eta^n + \frac{1}{2}\beta G_{\eta\eta}^{''},$$

$$\frac{\partial X(\eta,\xi)}{\partial\eta} = \frac{1}{\sqrt{G(\eta,\xi)}},$$

$$\det J = \left(\eta\, G_\xi^{'}\left(U_\delta^{'}(\xi,\delta)\right)\right) / z_1,$$

$$z_1 = G^2(\eta,\xi)\left(2n\eta^n + \beta\eta\frac{\partial^3 G(\eta,\xi)}{\partial\eta^3}\right),$$

$$\frac{\partial^2 X(\eta,\xi)}{\partial\eta\partial\xi} = \frac{\partial^2 X(\eta,\xi)}{\partial\xi\partial\eta}.$$

Доказательство осуществляется прямой подстановкой.

Замечание 4. *Построить решение уравнений* КдВ *методом НФКЗП означает определить функции* $Y(\xi, \delta)$, $T(\xi, \delta)$, $M(\xi, \delta)$, $x(\xi, \delta)$. *Если определить функцию* $Y(\xi, \delta)$ *из (36) или (37), то будут найдены и все остальные функции из приведённого списка. Затем можно вернуться в каком-то смысле, не всегда в явном виде, к «параметрической форме», к исходным переменным (2), (5). Нелинейное уравнение* КдВ *имеет новое свойство в общем случае, а не только в «вырожденном случае»: существует замена переменных, в которых уравнение для функции* $Y_0(\xi, \delta) = Y_0(U(\xi, \delta), \xi)$ ***отделяется*** *от всех других.*

Пример. Кратко опишем нетривиальное новое точное решение (37), а следовательно, в соответствии с замечанием 4 и (1). При $n = 1$ уравнение (37) имеет решение $G(\eta, \xi) = \Xi(\theta)$ с инвариантом $\theta = \eta + V\xi$.

Во-первых, из (37) следует обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ*3*), которое не приводим. Первый интеграл ОДУ*3* имеет вид ОДУ*4*

$$\Xi^{''}(\theta) + sign\, 2V / (\beta\sqrt{\Xi(\theta)}) = -C_4 - 2\theta/\beta,$$

где C_4 – константа, и параметр *sign* принимает одно из двух значений, а именно «плюс» или «минус» единицу. Это нелинейное ОДУ*4* с правой частью.

Во-вторых, можно умножить ОДУ*4* на производную функции $\Xi'(\theta)$.

После интегрирования получим квадратуру

$$(\Xi^{'}(\theta))^2/2 + C_5 + C_4\,\Xi(\theta) + 2(\theta\,\Xi(\theta) - \\ - \int\Xi(\theta)d\theta)/\beta - sign\,4V\sqrt{\Xi(\theta)}/\beta = 0,$$

где C_5 – константа.

Положим $X(\eta, \xi) = X_1(\eta + V\xi)$. Тогда следует $X_1(\theta) = \mathrm{sign}\int(1/\sqrt{\Xi(\theta)})d\theta$. Это неявное уравнение для вычисления функции $\Xi(\theta)$.

Заметим, кроме того, что из ОДУ*4* следует неавтономная динамическая система $\Xi'(\theta) = p(\theta)$, $p'(\theta) = -C_4 - 2\theta/\beta + sign\, 2V/(\beta\sqrt{\Xi(\theta)})$.

Вычисляем производную $d\theta/d\Xi(\theta) = 1/(\Xi'(\theta)) = 1/p(\theta)$, тогда матрица Якоби 2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2/(\beta\ p(\theta)) + sign\,V/(\beta\,\Xi^{3/2}(\theta)) & 0 \end{pmatrix}.$$

Неподвижная точка определяется выражениями $p = 0$, $\Xi(\theta) = 4V^2/(C_4\beta + 2\theta)^2$.

Отсюда следует, что при различных значениях параметров на экваторе сферы Пуанкаре могут существовать особые точки: центр или седло. Далее проводится анализ существования бифуркаций. Подробное исследование показывает, что новое точное решение описывает волну, несимметричную с большим значением производной на переднем фронте, отличающуюся от решения К. Якоби, кратко описанного в замечании 2 и в [3].

Существует и другое решение (36). Уравнение на группе растяжения переходит в ОДУ 6:

$$Y(\xi,\delta) = \eta^{-\frac{(2+n)}{3n}}\Psi(\theta),\quad \theta = \tau^{\frac{2}{3n}}U(\xi,\delta),$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\Psi^3(\theta)\Psi''(\theta)\right) + \frac{n\theta^{n-1}\Psi(\theta)^2}{\beta} -$$

$$\frac{(2+n)}{3n\beta}\Psi(\theta) + \frac{2}{3n\beta}\theta\Psi'(\theta) = 0.$$

В этом случае якобиан не равен нулю. Очевидно, что полное исследование этого решения должно быть изложено в отдельной работе. Отметим, что уравнения (36), (37) являются новыми в теории уравнения КдВ.

Замечание 5. *Для уравнения Кортевега—де Вриза—Бюргерса [3, 4], которое отличается от уравнения (1) тем, что в него добавлены вторые производные (они описывают диссипацию), не существует решения, построенного методом НФКЗП, аналогичного построенному в теореме 4.*

При доказательстве теоремы 4 мы три раза получаем одно и то же уравнение (37). В уравнении с диссипацией Кортевега—де Вриза—Бюргерса этого не происходит, так как в процессе доказательства возникают разные уравнения, отличающиеся слагаемыми, связанными с диссипацией.

Возможность построения асимптотических решений описана в [3].

ВЫВОДЫ

1. Построены динамические системы для уравнений КдВ на основе метода нефиксированной конструктивной замены переменных. Указана возможность сформулировать условия устойчивости фазовых траекторий и уменьшения объёма фазового потока.

2. Доказано, что два необходимых условия разрешимости системы дифференциальных уравнений с ЧП первого порядка имеют один общий нетривиальный множитель.

3. Построены новые точные решения нелинейного уравнения КдВ, отличающиеся от классических. Обнаружено, что *существует замена переменных, в которых уравнение для функции $Y(\xi, \delta) = Y_0(U(\xi, \delta), \xi)$* ***отделяется*** *от всех других.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Вакуленко С. П., Волосов К. А., Волосова Н. К. К методу оценки состояния железнодорожного полотна // Мир транспорта. – 2016. – № 3. – С. 20–35.
2. Эфендиева М. Семинар: РЖД и «Сколково» ищут возможности применения Интернета вещей на железных дорогах. [Электронный ресурс]: http://rzd-expo.ru developments/detail.php 15.08.2016. Доступ 17.04.2018.
3. Волосов К. А., Волосова А. К., Волосова Н. К. Об одном свойстве уравнения КдВ // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2017. – № 4. [Электронный ресурс]: http://www.math.spbu.rudiffjournal. Доступ 17.04.2018.
4. Ерофеев В. И., Кажаев В. В., Семерикова Н. П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. – М.: Физматлит, 2002. – 208 с.
5. Volosova A. K, Volosov K. A. Construction Solutions of PDE in Parametric Form. Hindawi Publishing Corporation. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. Vol. 2009, Article ID319269, 17 p., doi: 10.1155 / 2009 / 319269.
6. Волосов К. А. Конструкция решений квазилинейных уравнений с частными производными // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – № 2. – С. 29–39.
7. Чаплыгин С. А. О газовых струях. – М.: Универ. тип., 1902. – 121 с.

Координаты авторов: **Вакуленко С. П.** – k-gdsu@mail.ru, **Волосова А. К.** – alya01@yandex.ru, **Волосова Н. К.** – navolosova@yandex.ru.

Статья поступила в редакцию 23.02.2017, актуализирована 14.04.2018, принята к публикации 17.04.2018.

Авторы признательны Волосову К. А., Данилову В. Г., Зайцеву В. Ф., Кудряшову А. Н., Карасеву М. В., Маслову В. П., Новикову Р. Г., Шефаревичу А. И. за полезные обсуждения и критические замечания.