УДК 621.317.0880

Доверительные границы результатов измерений

Нурлан СЕЙДАХМЕТОВ
Nurlan B. SEYDAKHMETOV

Николай РУБИЧЕВ
Nikolai A. RUBICHEV

Рубичев Николай Александрович *– кандидат технических наук, доцент кафедры «Электроэнергетика транспорта» Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), Москва, Россия.*
Сейдахметов Нурлан Багитович *– студент пятого курса МИИТ, Москва, Россия.*

На базе существующих теоретико-методологических подходов к расчету доверительных границ погрешности измерения решаются задачи, касающиеся распределения плотности оцениваемой вероятности. Во внимание принято многообразие реально встречающихся распределений, включая нормальное, трапецеидальное, экспоненциальное распределение Лапласа, распределение Стьюдента и т. д. Особый акцент авторами сделан на использование в математическом аппарате расчета доверительной вероятности метода, основанного на моделировании массивов чисел с заданными распределениями. Результаты моделирования с соответствующими комментариями даны в семи таблицах, позволяющих сравнить полученные значения и обосновать преимущества и недостатки каждого из видов распределения по критерию доверия к граничным величинам измерений.

Ключевые слова: *теория вероятностей, метрология, погрешности измерения, закон распределения погрешности, доверительные границы, распределение Лапласа, распределение Стьюдента, моделирование.*

Для расчета доверительных границ погрешности измерения [1–3 и др.] необходимо знать распределение плотности вероятности *w(x)*, которая в большинстве случаев предполагается четной функцией. С учетом такого предположения доверительные границы оказываются симметричными $\pm\Delta_{дов}$ и при $P_{дов}$ (заданной доверительной вероятности) $\Delta_{дов}$ находится из условия

$$\int_{-\Delta_{дов}}^{\Delta_{дов}} w(x)dx = P_{дов}. \qquad (1)$$

Наиболее часто плотность вероятности погрешности предполагается нормальной:

$$w(x) = e^{-x^2/2\sigma^2} \Big/ \sqrt{2\pi}\sigma, \qquad (2)$$

где σ – среднее квадратическое отклонение (СКО). Это обозначение будет использоваться и для СКО других распределений.

Несмотря на широкое применение нормального распределения, оно не охватывает всего многообразия реально встречающихся распределений. В частности, в [4] при расчете неопределенности предлагается использовать и трапецеидальное распределение, крайними частными случаями

Таблица 1

Распределение	Доверительная вероятность $P_{дов}$			
	0,95	0,98	0,99	0,997
Нормальное	1,96	2,32	2,57	3,00
Равномерное	1,69	1,72	1,72	1,73
Треугольное	1,90	2,10	2,20	2,32
Лапласа	2,12	2,77	3,26	4,11
Быстроубывающее	1,80	2,02	2,15	2,34

которого выступают прямоугольное (равномерное) и треугольное распределения.

Прямоугольное задается формулой

$$w(x)=\begin{cases}1/2b & |x|\le b;\\ 0 & |x|>b.\end{cases} \qquad (3)$$

Для этого распределения $\sigma=b/\sqrt{3}\approx 0{,}58b$.

Треугольное распределение задается формулой

$$w(x)=\begin{cases}\left(1-|x|/b\right)/b & |x|\le b;\\ 0 & |x|>b.\end{cases} \qquad (4)$$

В этом случае $\sigma=b/\sqrt{6}\approx 0{,}41b.$

Нормальное распределение отлично от нуля на всей числовой оси. Трапецеидальное, прямоугольное и треугольное распределения в отличие от нормального являются финитными, то есть отличны от нуля на конечном интервале. При этом в районе максимума, достигаемого при *x=0,* нормальное распределение оказывается более плоским, чем треугольное, и менее плоским, чем прямоугольное.

Нефинитным распределением, менее плоским и убывающим с ростом модуля аргумента медленнее, чем нормальное, будет двухстороннее экспоненциальное распределение (распределение Лапласа)

$$w(x)=e^{-|x|/m}/2m, \qquad (5)$$

для которого $\sigma=m\sqrt{2}\approx 1{,}41m.$.

Пример нефинитного распределения с более плоской вершиной и убывающим с ростом модуля аргумента быстрее, чем нормальное:

$$w(x)=2e^{-x^4/m^4}/m\Gamma(0{,}25)\approx 0{,}552e^{-x^4/m^4}/m. \qquad (6)$$

В этом случае $\sigma=m\sqrt{\Gamma(0{,}75)/\Gamma(0{,}25)}\approx 0{,}58\,m$, где $\Gamma(.)$ – полная гамма-функция. Ниже это распределение будем называть быстроубывающим.

Подстановка (2) в (1) приводит к известным правилам двух сигм и двух с половиной сигм при доверительных вероятностях 0,95 и 0,99 соответственно. В [5] отмечается, что использование статистических методов без учета предположений, при которых они получены, может привести к существенным ошибкам. Это, в частности, касается и упомянутых правил, которые при других распределениях плотности вероятности несправедливы.

В таблице 1 приведены СКО, касающиеся всех перечисленных распределений. Четко видно, что для более медленно убывающего распределения Лапласа $\Delta_{дов}/\sigma$ оказывается больше и с ростом доверительной вероятности растет существеннее, чем для нормального распределения. Для быстроубывающего распределения ситуация обратная. Для финитных распределений $\Delta_{дов}/\sigma$ среднее квадратичное отклонение является меньшим, чем для нормального, и с ростом доверительной вероятности возрастает в меньшей степени. В силу этого в случае финитных распределений можно задавать $\Delta_{дов}=b$ для всех практически доверительных вероятностей.

Если закон распределения погрешности и его параметры известны, расчет доверительных границ для однократных измерений в соответствии с (1) довольно прост. Ситуация оказывается более сложной для многократных измерений. При этом следует рассмотреть два варианта:

– СКО погрешностей единичных наблюдений известно априори;

– СКО погрешности единичного наблюдения определятся по результатам многократных измерений.

Остановимся на первом. В качестве результата N многократных равноточных

Таблица 2

$P_{дов}$	N						
	1	2	3	5	10	20	30
Равномерное распределение							
0,95	1,65	1,90	1,93	1,93	1,96	1,95	1,93
0,98	1,70	2,08	2,21	2,27	2,27	2,27	2,26
0,99	1,71	2,18	2,35	2,49	2,52	2,53	2,48
0,997	1,72	0	2,572,3	2,78	2,87	2,79	2,76
Треугольное распределение							
0,95	1,86	1,96	1,93	1,90	1,98	1,94	1,92
0,98	2,10	2,24	2,24	2,22	2,35	2,25	2,36
0,99	2,18	2,40	2,49	2,45	2,53	2,44	2,60
0,997	2,32	2,64	2,68	2,78	2,82	2,83	2,98
Распределение Лапласа							
0,95	2,13	2,02	1,98	1,94	1,94	1,92	1,90
0,98	2,75	2,50	2,48	2,42	2,39	2,31	2,28
0,99	3,23	2,79	2,74	2,76	2,57	2,51	2,47
0,997	3,85	3,32	3,27	3,16	3,07	3,03	2,96
Быстроубывающее распределение							
0,95	1,85	1,91	1,95	1,94	1,97	1,94	1,93
0,98	2,10	2,31	2,42	2,54	2,53	2,55	2,51
0,95	2,03	2,17	2,24	2,28	2,27	2,29	2,25
0,997	2,15	2,56	2,69	2,80	2,90	2,86	2,86

измерений берется среднее арифметическое. Погрешность такого результата равна среднему арифметическому погрешностей единичных наблюдений

$$\Delta_{ср.\,ар.} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\Delta_j. \qquad (7)$$

В предположении независимости погрешностей единичных наблюдений $\sigma_{ср.ар} = \sigma/\sqrt{N}$. При нормальном распределении погрешность среднего арифметического также будет распределена нормально. Поэтому значения отношения $\Delta_{дов}/\sigma_{ср.ар} = \Delta_{дов}\sqrt{N}/\sigma$ ожидаемо совпадут со значениями, приведенными в таблице 1 для нормального распределения.

Для других распределений при неограниченном возрастании числа наблюдений распределение среднего арифметического в соответствии с центральной предельной теоремой будет стремиться к нормальному. Однако при конечном N оно станет отличаться как от распределения погрешности единичного наблюдения, так и от нормального распределения. Найти это распределение можно путем довольно громоздких выкладок.

Нами использовался более простой метод, основанный на моделировании массивов чисел с заданными распределениями.

Многие пакеты прикладных программ (например, Excel, Mathcad) позволяют формировать случайные числа с равномерным и некоторыми другими распределениями. С помощью нелинейного преобразования равномерно распределенной случайной величины можно получить случайные величины с любым требуемым распределением.

При нелинейном монотонном преобразовании случайной величины ν с плотностью вероятности $w_\nu(y)$ результат преобразования $\xi=f(\nu)$ будет иметь плотность вероятности $w_\xi(x)$, определяемую соотношением

$$w_\xi(x)\left|\frac{df(y)}{dy}\right| = w_\nu(y). \qquad (8)$$

При равномерном распределении случайной величины ν на интервале [-0,5; 0,5] $w_\nu(y)=1$ и для формирования случайной величины с треугольным распределением (4) в соответствии с (8) необходимо использовать нелинейное преобразование

$$\xi = b\left(1-\sqrt{1-2\nu}\right).$$

Для формирования случайной величины с распределением Лапласа (5) можно

Таблица 3

$P_{дов}$	Число степеней свободы N					
	2	3	5	10	20	30
0,95	4,3	3,18	2,57	2,23	2,09	2,04
0,98	6,96	4,54	3,36	2,76	2,53	2,46
0,99	9,92	5,84	4,03	3,17	2,85	2,75

использовать преобразование
$\xi = m \ln(1-2\nu)$.

Для распределения (6) условие (8) приводит к уравнению

$$\int_{-\infty}^{\xi/m} e^{-z^4} dz = y.$$

Получить точное решение этого уравнения не удалось. Поэтому использовалось приближенное разложение в степенной ряд, обеспечивающее приемлемую точность:
$\xi = m\,(3{,}118\nu + 6{,}734\nu^5 + 52{,}57\nu^9 + 489{,}5\nu^{13} + 32\,770\nu^{17})$.

Для каждого слагаемого в (7) было сформировано по 1000 значений, и по результатам обработки среднего арифметического получены значения отношения $\Delta_{дов}/\sigma_{ср.ар} = \Delta_{дов}\sqrt{N}/\sigma$. Результаты моделирования для распределений (3) – (6) приведены в таблице 2.

При $N=1$ доверительные границы совпадают со значениями, приведенными в таблице 1, заметно различаясь для разных распределений. При возрастании N в связи с нормализацией распределения среднего арифметического это различие уменьшается. При $N=30$ значения практически совпадают с доверительными границами при нормальном распределении.

Когда неизвестно СКО погрешности при расчете доверительных границ, используется экспериментально полученная оценка

$$S = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\Delta_j^2}, \qquad (9)$$

распределение квадрата которой совпадает по форме с распределением хи-квадрат с N степенями свободы.

Беря в расчет (9), мы предполагаем, что при оценке погрешности действительное значение измеряемой величины известно. В противном случае, если Δ_j представляет отклонение от среднего арифметического, N в знаменателе формулы (9) заменяется на $N-1$, и число степеней свободы уменьшается на единицу. Обычно имеют место оба случая.

Величина S может использоваться для расчета доверительных границ погрешности единичного наблюдения и среднего арифметического. В предположении нормальности и независимости погрешностей единичных наблюдений расчет базируется на распределении Стьюдента.

Распределение Стьюдента (t-распределение) с N степенями свободы предполагает случайную величину $t = \xi_0 / \sqrt{\nu/N}$, где ξ_0 распределена нормально с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, а независимая от нее величина ν имеет распределение хи-квадрат с N степенями свободы. Учитывая определение случайной величины с распределением хи-квадрат, можно записать

$$t = \xi_0 \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2 \Big/ N}, \qquad (10)$$

где независимые нормальные случайные величины $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N$ обладают нулевыми математическими ожиданиями и равными (необязательно единичными) СКО.

Распределение Стьюдента подразумевает довольно простое аналитическое выражение, хотя при его практическом применении обычно используют таблицы. Причем важно отметить, что это распределение, как и нормальное, определено на всей числовой оси.

С учетом (9) и (10) для нормально распределенной погрешности единичного наблюдения, не использованного при расчете S, отношение Δ/S будет иметь распределение Стьюдента. В соответствии с этим в таблице 3 приведены значения $\Delta_{дов}/S$ для некоторых значений доверительной вероятности и числа степеней свободы.

При распределениях погрешности, отличных от нормального (см. таблицу 4), фигурируют значения $\Delta_{дов}/S$, полученные

Таблица 4

$P_{дов}$	Число степеней свободы N					
	2	3	5	10	20	30
Равномерное распределение						
0,95	3,27	2,41	1,97	1,80	1,71	1,64
0,98	5,39	3,23	2,50	2,01	1,89	1,76
0,99	7,70	4,49	2,85	2,17	1,98	1,85
Треугольное распределение						
0,95	4,45	3,11	2,38	2,18	2,03	1,88
0,98	7,05	4,60	3,06	2,54	2,33	2,12
0,99	9,79	5,86	3,60	2,76	2,50	2,22
Распределение Лапласа						
0,95	6,34	4,32	3,37	2,67	2,32	2,12
0,98	11,89	7,04	5,09	3,97	3,48	2,90
0,99	16,43	9,49	6,43	4,61	4,22	3,30
Быстроубывающее распределение						
0,95	3,70	2,70	2,27	2,02	1,90	1,81
0,98	6,12	3,73	2,85	2,42	2,25	2,03
0,99	8,52	4,96	3,39	2,58	2,34	2,19

по результатам моделирования вариантов (3)–(6).

Из таблицы следует, что отличие распределения единичного наблюдения от нормального достаточно существенно влияет на доверительные границы единичного наблюдения. Наиболее значительны отличия для равномерного распределения с малым числом степеней свободы (сказывается финитность распределения числителя в формуле (10)) и распределения Лапласа (сказывается более медленное убывание плотности вероятности числителя в (10)). При большом N доверительные границы в таблице 4 приближаются к значениям в таблице 1. Это обусловлено тем, что с увеличением N разброс S, стоящего в знаменателе (10), уменьшается, и форма распределения отношения t определяется в основном формой распределения числителя, то есть формой распределения погрешности единичного наблюдения.

Другим существенным нарушением условий применимости распределения Стьюдента является зависимость случайной величины, стоящей в числителе (10), и случайных величин в знаменателе. Если в качестве ξ_0 берется одно из значений, использованных при расчете S (например, ξ_1), то величина t будет ограничена по модулю

$$|t| = |\xi_1| \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 \Big/ N} \le \sqrt{N}, \qquad (11)$$

и ее распределение в отличие от распределения Стьюдента будет финитным, заданным на интервале $\pm\sqrt{N}$ при любых распределениях погрешностей единичных наблюдений. Поэтому даже для нормального распределения погрешностей применение в расчетах доверительных границ t-распределения не будет оправданным.

В таблице 5 приведены значения $\Delta_{дов}/S$, полученные по результатам моделирования для распределений (2) – (6), когда в качестве ξ_0 подставлялась ξ_1.

В этом случае наблюдаются существенно меньшие значения доверительных границ, особенно при малых N, по сравнению с данными таблиц 3 и 4. Очевидно, что это занижение обусловлено не более точным расчетом доверительной границы, а неправильным использованием соотношения (10). Отсюда и справедливость общеизвестного правила – при выявлении грубых погрешностей в момент оценки СКО не следует брать в расчет проверяемое наблюдение, имеющее максимальное отклонение от среднего. Однако при оценке доверительных границ для погрешности единичных наблюдений, не рассматриваемых как промахи, неправильное использование соотношения (10) иногда имеет место.

При расчете доверительных границ среднего арифметического для обеспечения независимости числителя и знамена-

Таблица 5

$P_{\text{дов}}$	Число степеней свободы N					
	2	3	5	10	20	30
Нормальное распределение						
0,95	1,411	1,63	1,81	1,86	1,91	1,93
0,98	1,414	1,70	1,97	2,05	2,23	2,25
0,99	1,414	1,72	2,08	2,15	2,38	2,44
Равномерное распределение						
0,95	1,407	1,58	1,64	1,64	1,66	1,64
0,98	1,413	1,67	1,80	1,78	1,77	1,74
0,99	1,414	1,70	1,89	1,90	1,82	1,81
Треугольное распределение						
0,95	1,410	1,64	1,77	1,82	1,84	1,84
0,98	1,413	1,69	1,91	2,04	2,04	2,06
0,99	1,414	1,72	2,01	2,21	2,22	2,16
Распределение Лапласа						
0,95	1,412	1,69	1,98	2,14	2,18	2,18
0,98	1,414	1,72	2,12	2,45	2,59	2,67
0,99	1,414	1,72	2,15	2,65	2,86	2,99
Быстроубывающее распределение						
0,95	1,408	1,61	1,73	1,77	1,81	1,82
0,98	1,413	1,68	1,89	1,95	1,98	1,98
0,99	1,414	1,70	1,96	2,08	2,07	2,08

теля выражения (10) среднее арифметическое и оценка СКО должны вычисляться по разным массивам, число единичных наблюдений в которых может быть различным. Практически это условие учитывается редко, и требование независимости числителя и знаменателя при использовании распределения Стьюдента оказывается нарушенным.

Оставим обозначение N за числом наблюдений, по которым рассчитывается S, а через $N_{\text{ср.ар}}$ обозначим число наблюдений, по которым рассчитывается среднее арифметическое. Поскольку дисперсия среднего арифметического в $N_{\text{ср.ар}}$ раз меньше дисперсии усредняемых результатов, при его подстановке в (10) в качестве ξ_0 вводится сомножитель $\sqrt{N_{\text{ср.. ар}}}$. С учетом этого при нормальном распределении погрешностей наблюдений и расчете среднего арифметического и S по разным массивам значения отношения $\Delta_{\text{дов}}\sqrt{N_{\text{ср. ар}}}\Big/S$ при заданной доверительной вероятности совпадают со значениями, приведенными в таблице 3. Причем число степеней свободы по-прежнему равно N.

В таблице 6 для $N_{\text{ср.ар}}=N$ приведены значения отношения $\Delta_{\text{дов}}\sqrt{N}\Big/S$ для распределений (3) – (6) при расчете среднего арифметического и СКО по разным независимым массивам.

Полученные результаты отличаются от значений, приведенных в таблице 3. Как и для значений в таблицах 1, 2 и 4, наиболее существенные отличия касаются распределения Лапласа в силу его медленного убывания с ростом модуля аргумента. Аналогично таблице 2 с ростом N по причине нормализации числителя, уменьшения разброса знаменателя в (10) и нормализации его квадрата эти отличия уменьшаются.

Аналогично доверительным границам погрешностей единичных наблюдений зависимость числителя и знаменателя в (10) существенно занизит оценки доверительных границ среднего арифметического за счет изменения распределения величины t.

Не нарушая общности, можно считать, что среднее арифметическое определяется по первым $N_{\text{ср.ар}}$ значениям из N значений, по которым оценивается СКО. Тогда из (10) получаем

$$t=\sqrt{N_{\text{ср.ар}}}\sum_{i=1}^{N_{\text{ср.ар}}}\xi_i\Big/N_{\text{ср.ар}}\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2\Big/N}\,.$$

Поскольку

$$\left|\sum_{i=1}^{N_{\text{ср.ар}}}\xi_i\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2}\right|\le\sqrt{N_{\text{ср.ар}}}\,,$$

Таблица 6

$P_{дов}$	Число степеней свободы N					
	2	3	5	10	20	30
Равномерное распределение						
0,95	3,35	2,54	2,14	2,06	1,98	1,93
0,98	5,58	3,44	2,72	2,50	2,39	2,27
0,99	7,57	4,62	3,25	2,79	2,58	2,44
Треугольное распределение						
0,95	4,00	3,04	2,34	2,21	2,01	1,93
0,98	7,12	4,14	2,94	2,60	2,42	2,35
0,99	10,51	5,50	3,35	2,84	2,79	2,74
Распределение Лапласа						
0,95	6,65	4,39	3,06	2,43	2,27	2,27
0,98	11,44	6,33	4,19	3,43	2,79	2,76
0,99	17,49	8,71	5,06	4,10	3,21	3,13
Быстроубывающее распределение						
0,95	3,70	2,77	2,24	2,23	2,04	2,05
0,98	6,34	3,86	2,87	2,91	2,43	2,41
0,99	8,42	5,15	3,52	3,38	2,66	2,65

Таблица 7

$P_{дов}$	Число степеней свободы N					
	2	3	5	10	20	30
Нормальное распределение						
0,95	1,410	1,70	1,82	1,95	2,01	2,00
0,98	1,414	1,72	1,97	2,20	2,29	2,30
0,99	1,414	1,73	2,03	2,36	2,50	2,49
Равномерное распределение						
0,95	1,413	1,69	1,90	1,91	1,92	1,90
0,98	1,414	1,72	2,08	2,24	2,22	2,26
0,99	1,414	1,73	2,13	2,38	2,47	2,51
Треугольное распределение						
0,95	1,410	1,63	1,80	1,92	1,90	1,93
0,98	1,413	1,69	1,96	2,18	2,24	2,33
0,99	1,414	1,71	2,04	2,38	2,44	2,59
Распределение Лапласа						
0,95	1,408	1,62	1,76	1,84	1,90	1,89
0,98	1,413	1,68	1,92	2,09	2,15	2,29
0,99	1,414	1,71	2,00	2,24	2,32	2,46
Быстроубывающее распределение						
0,95	1,408	1,62	1,76	1,84	1,90	1,89
0,98	1,413	1,68	1,92	2,09	2,15	2,29
0,99	1,414	1,71	2,00	2,24	2,32	2,46

приходим к условию $|t| \leq \sqrt{N}$, что совпадает с неравенством (11).

Таким образом, для среднего арифметического, как и для единичного наблюдения, мы пришли к финитному распределению величины t на том же интервале $\pm\sqrt{N}$, хотя форма распределений становится иной. Этот вывод справедлив как для финитных, так и нефинитных распределений $w(\xi)$, в том числе нормального.

В таблице 7 для $N_{ср.ар}=N$ приведены значения отношения $\Delta_{дов}\sqrt{N}/S$ применительно к рассматриваемым распределениям при расчете среднего арифметического и оценки СКО по одному массиву.

Значения, приведенные в этой таблице, много ниже значений в таблицах 3 и 6. Для малого числа наблюдений они отличаются в несколько раз. Зависимость этих результатов от доверительной вероятности и числа наблюдений и их абсолютные значения близки к данным в таблице 5. Однако там при больших N более заметно влияние формы закона распределения единичного наблюдения.

Еще раз отметим, что если при выявлении грубых погрешностей, как правило, устраняется зависимость числителя и знаменателя в (10), то при оценке доверительных границ для результата многократных измерений в подавляющем большинстве случаев числитель и знаменатель в (10) рассчитываются по одним и тем же данным. Это приводит к существенному ошибочному занижению абсолютных значений доверительных границ даже при использовании распределения Стьюдента для нормального распределения погрешностей единичных наблюдений.

Кратко остановимся на оценке достоверности результатов моделирования. Обозначим через Z величины, приводимые в таблицах 2, 4–7. В каждом случае они представляют собой доверительные границы некоторого отношения, позволяющего получить погрешности измерения. Величина Z является некоторой функцией ψ от доверительной вероятности. Вид этой функции определяется видом распределения погрешностей наблюдений, числом наблюдений и видом отношения, используемого при расчете доверительных границ. В принципе она может быть определена, однако ее аналитическое выражение требует довольно громоздких преобразований.

При моделировании исследуются оценки Z* и $P^*_{дов}$, что эквивалентно применению соотношения

$$Z^* = \psi\ (P^*_{дов}). \qquad (12)$$

Из (12) следует

$$\sigma_{Z^*} = \sigma_{P^*}\,|d\psi(P_{дов})/dP_{дов}| \approx$$
$$\approx \sigma_{P^*}\,|\delta Z^*/\delta P_{дов}|. \qquad (13)$$

Приближенное равенство получено путем замены производной отношением приращений, найденных по результатам моделирования Z*, и заданным значениям $P_{дов}$.

Практический интерес представляет не непосредственно СКО оценки доверительной границы, а его отношение к доверительной границе

$$\gamma = \sigma_{Z^*}/Z \approx \sigma_{P^*}\,|\delta Z^*/Z\delta P_{дов}|. \qquad (14)$$

СКО оценки доверительной вероятности по n результатам моделирования задается соотношением

$$\sigma_{P^*} = \sqrt{(1-P_{дов})P_{дов}/n.} \approx \sqrt{(1-P_{дов})/n}.$$

При моделировании использовалось n=1000. Тогда для доверительных вероятностей 0,95, 0,98 и 0,99 σ_P соответственно равно 0,0071, 0,0045 и 0,0032.

Величины ΔZ*/Z* и $\Delta P_{дов}$ могут быть определены по результатам моделирования. Например, на интервале доверительных вероятностей [0,98; 0,99] $\Delta P_{дов}$=0,01, а отношение ΔZ*/Z* изменяется от сотых до двух десятых (таблицы 2, 4–7). С учетом этого получаем, что величина γ не превосходит шести сотых, что вполне приемлемо для оценки доверительных границ.

ВЫВОДЫ

1. Результаты, приведенные в таблицах 1, 2, 4 и 6, при наличии априорной информации о виде закона распределения погрешности единичного наблюдения позволяют уточнить доверительные границы. При отсутствии этой информации можно получить оценку сверху для абсолютного значения граничных величин. Среди рассмотренных наихудшим оказывается распределение Лапласа.

2. Данные в таблицах 5 и 7 помогают оценить степень ошибочного занижения абсолютных значений доверительных границ в ходе использования одних и тех же результатов наблюдений при оценке среднего квадратичного отклонения и погрешностей измерения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грановская В. А., Сирая Т. Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерении. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 288 с.

2. Фрумкин В. Д., Рубичев Н. А. Теория вероятностей и статистика в метрологии и измерительной технике. – М.: Машиностроение, 1987. – 168 с.

3. ГОСТ 8.207–76. ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений.

4. Руководство по выражению неопределенности измерения: Пер. с англ. – СПб.: ВНИИМ, 1999. – 134 с.

5. Рубичев Н. А., Рябцев Г. Г. Типовые ошибки применения статистических методов обработки измерительной информации и способы их устранения // Метрология. – 2012. – № 6. – С. 3–16.