



Оптимальное транспортное обслуживание при равномерном распределении объектов



Анатолий ГУСЕВ
Anatoly I. GUSEV

Сергей ГУСЕВ
Sergey A. GUSEV



Александр МИЛЕВСКИЙ
Alexander S. MILEVSKY

Гусев Анатолий Иванович — кандидат физико-математических наук, доцент Российского университета транспорта (МИИТ), Москва, Россия.

Гусев Сергей Анатольевич — исполнительный директор Страхового акционерного общества «ВСК», Москва, Россия.

Милевский Александр Станиславович — кандидат физико-математических наук, доцент РУТ, Москва, Россия.

Provision of Optimal Transit Service under Even Distribution of Facilities

(текст статьи на англ. яз. — English text of the article — p. 40)

Статья продолжает тему оптимального расположения объектов в системе сетевых структур (см. «МТ», 2017, № 4 [5]), в частности развивает теоретико-методологические подходы к моделированию вариантов распределения пунктов обслуживания жителей в границах жилого микрорайона с кусочно-постоянной плотностью расселения. Цель — минимизировать затраты на перемещения между объектами, соблюдая при этом рациональные пропорции в том числе и транспортного спроса с транспортными предложениями.

Ключевые слова: равномерный закон распределения, математическая модель, социальный объект, транспорт, городской микрорайон, оптимальное расположение, экстремум функций.

Все мы пользуемся транспортом, магазинами, больницами, и удобно, когда социальное учреждение, пункт обслуживания транспорта расположены вблизи от нас, тех районов, где наша работа, учёба, жильё. То же относится к местам расположения аварийных, пожарных, спасательных и других служб. Здесь мы рассмотрим экономико-математическую модель оптимального расположения социальных объектов для обслуживания территории в случае их кусочно-постоянного размещения.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим следующую модель. Пусть у нас есть жилая зона, размещённая вдоль отрезка $[c, d]$ с неотрицательной плотностью населения $f(x)$. Функцию $f(x)$ будем считать кусочно-непрерывной. Требуется разместить на этом отрезке несколько пунктов обслуживания так, чтобы суммарные затраты на перемещения до них были минимальны. Предполагается, что потенциальный посетитель пользуется ближайшим пунктом обслуживания.

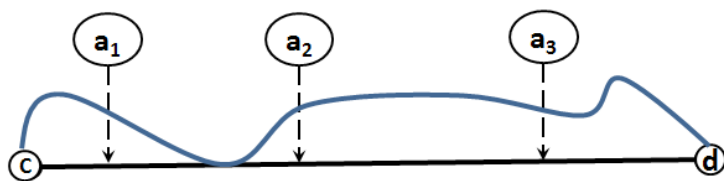


Рис. 1. Размещение объектов.

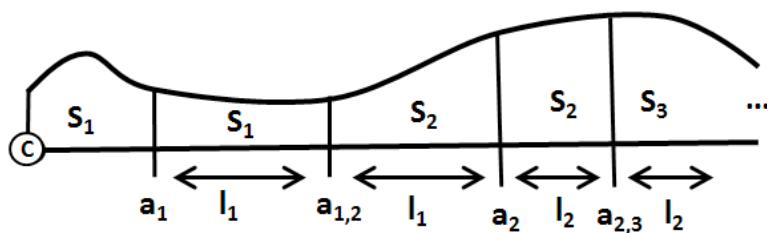


Рис. 2. Необходимые условия оптимальности.

Пункты обозначим через $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ (см. рис. 1). Соответственно

$$a_{1,2} = \frac{a_1 + a_2}{2}, a_{2,3} = \frac{a_2 + a_3}{2}, \dots$$

— середины отрезков.

У каждого пункта a_i есть некоторая «зона притяжения» слева и справа, идущая к нему от середины отрезка, соединяющего с соседним пунктом, или (в концах) от крайних точек c или d . Затраты пропорциональны выражению

$$Q(a) = \int_c^{a_1} (a_1 - x) f(x) dx + \int_{a_1}^{a_{1,2}} (x - a_1) f(x) dx + \\ + \int_{a_{1,2}}^{a_2} (a_2 - x) f(x) dx + \int_{a_2}^{a_{2,3}} (x - a_2) f(x) dx + \dots + \\ + \int_{a_{n-1,n}}^{a_n} (a_n - x) f(x) dx + \int_{a_n}^d (x - a_n) f(x) dx.$$

Выпишем условия экстремума для целевой функции Q . Вычисляя частные производные, находим:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_1} = \int_c^{a_1} f(x) dx - \int_{a_1}^{a_{1,2}} f(x) dx, \\ \frac{\partial Q}{\partial a_2} = \int_{a_{1,2}}^{a_2} f(x) dx - \int_{a_2}^{a_{2,3}} f(x) dx, \dots, \\ \frac{\partial Q}{\partial a_n} = \int_{a_{n-1,n}}^{a_n} f(x) dx - \int_{a_n}^d f(x) dx.$$

Приравнявая производные нулю, получаем для каждого размещаемого пункта необходимые условия экстремума в виде

равенства «населения» в левой и правой «зонах притяжения»:

$$\begin{cases} \int_c^{a_1} f(x) dx = \int_{a_1}^{a_{1,2}} f(x) dx \\ \int_{a_{1,2}}^{a_2} f(x) dx = \int_{a_2}^{a_{2,3}} f(x) dx \\ \dots \\ \int_{a_{n-1,n}}^{a_n} f(x) dx = \int_{a_n}^d f(x) dx. \end{cases} \quad (1)$$

Эти условия легко получить и простыми рассуждениями. Пусть нет равенства населения в левой и правой зонах притяжения некоторого пункта. Тогда, например, если правая зона «больше» левой, то малый сдвиг пункта вправо, очевидно, уменьшит затраты. Это и означает отсутствие экстремума.

Перепишем условия (1) в более удобной форме, используя обозначение

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt.$$

Тогда получается цепочка равенств

$$F(a_{1,2}) = 2F(a_1), \quad F(a_{2,3}) = 2F(a_2) - F(a_{1,2}), \\ F(a_{3,4}) = 2F(a_3) - F(a_{2,3}), \dots, \\ F(d) = 2F(a_n) - F(a_{n-1,n}).$$

В предположении¹ нули функции $f(x)$ — изолированные (2) возникает цепочка рекуррентных формул:

¹ Случай, когда это условие нарушается, будет обсуждаться далее.



Рис. 3. Один пункт обслуживания.

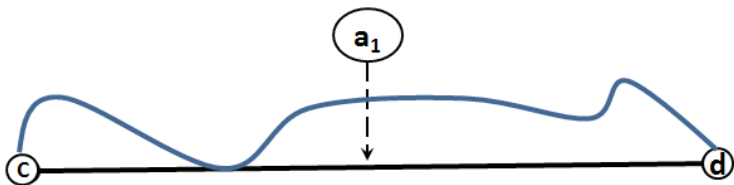
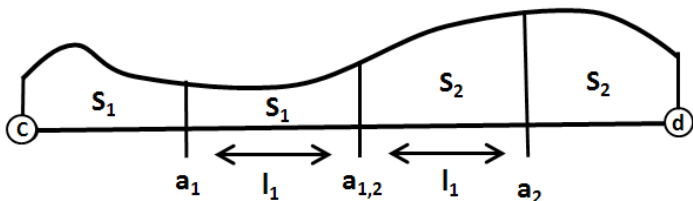


Рис. 4. Необходимые условия оптимальности для двух пунктов.



$$\begin{aligned} a_{1,2} &= G(2F(a_1)), \quad a_2 = 2a_{1,2} - a_1, \\ a_{2,3} &= G(2F(a_2) - F(a_{1,2})), \quad a_3 = 2a_{2,3} - a_2, \dots, \\ d &= G(2F(a_n) - F(a_{n-1,n})) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow F(d) = 2F(a_n) - F(a_{n-1,n}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $G(x)$ – функция, обратная к $F(x)$. Подставив каждое равенство в следующее, получаем уравнение вида

$$H(a_1) = F(d) \quad (4)$$

с некоторой функцией $H(x)$. Множество решений такого уравнения (которое, как мы увидим, может быть даже континуальным) определяет место размещения первого пункта обслуживания. Дальнейшие пункты при условии (2) определяются по рекуррентным формулам (3) однозначно (см. рис. 2).

Найденные таким образом варианты удовлетворяют необходимым условиям экстремума, то есть представляют собой стационарные точки функции Q , но обязательно являются её локальными минимумами. Наличие и вид экстремума, как правило, можно определить, вычислив частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{(\partial a_1)^2} &= 2f_1 - 0,5f_{1,2}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_2} &= -0,5f_{1,2}, \\ \frac{\partial^2 F}{(\partial a_2)^2} &= 2f_2 - 0,5f_{1,2} - 0,5f_{2,3}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial a_2 \partial a_3} &= -0,5f_{2,3}, \dots, \end{aligned}$$

где использованы обозначения $f_i = f(a_i)$, $f_{i,j} = f(a_{i,j})$.

В результате получаем следующую (трёхдиагональную) матрицу Гессе:

$$\begin{pmatrix} 2f_1 - 0,5f_{1,2} & -0,5f_{1,2} & 0 & \dots \\ -0,5f_{1,2} & 2f_2 - 0,5f_{1,2} - 0,5f_{2,3} & -0,5f_{2,3} & \dots \\ 0 & -0,5f_{2,3} & 2f_2 - 0,5f_{1,2} - 0,5f_{2,3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Для применения критерия Сильвестра потребуется, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в окрестностях точек a_i .

Рассмотрим простые частные случаи.

ОДИН ПУНКТ ОБСЛУЖИВАНИЯ

В такой ситуации необходимые условия (1) превращаются в

$$\int_c^a f(x) dx = \int_{a_1}^d f(x) dx,$$

то есть точка a_1 должна делить «население» на две равные части (см. рис 3). Ясно, что такая «медианная» точка:

- или одна (в частности, так будет при выполнении условия (2));
- или же «медианные» точки образуют целый отрезок $[\alpha; \beta]$ (где $\alpha \neq c$; $\beta \neq d$).

В последнем случае на всём этом отрезке $f(x) \equiv 0$ (в точках α и β можно переопределить f по непрерывности). То есть все точки отрезка $[\alpha; \beta]$ дают одно и то же значение целевой функции. При выходе из отрезка $[\alpha; \beta]$ происходит увеличение значений Q , так что каждая медианная точка является допустимым ответом.

ДВА ПУНКТА ОБСЛУЖИВАНИЯ

В такой ситуации необходимые условия (1) превращаются в условия «баланса» зон притяжения:

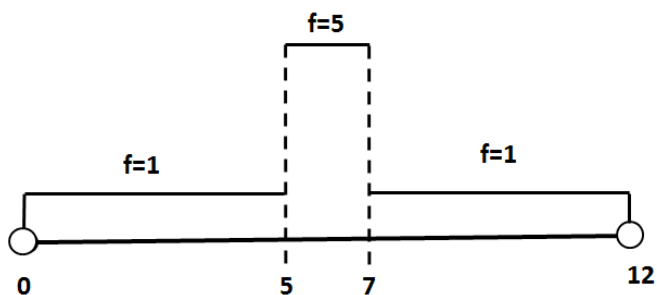


Рис. 5. Пример симметричного распределения.

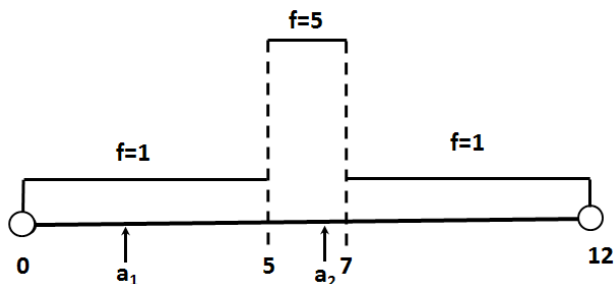


Рис. 6. Оптимальное размещение.

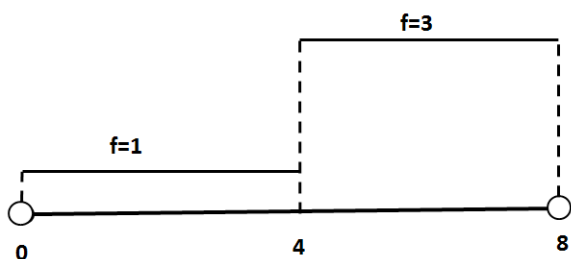


Рис. 7. Пример распределения.

$$\begin{cases} \int_c^{a_1} f(x)dx = \int_{a_1}^{a_{1,2}} f(x)dx \\ \int_{a_{1,2}}^{a_2} f(x)dx = \int_{a_2}^d f(x)dx. \end{cases}$$

Графически необходимое условие экстремума выглядит, как показано на рис. 4.

В частности,
 $F(d) = 2S_1 + 2S_2, F(a_2) - F(a_1) = S_1 + S_2 = F(d)/2.$

Рекуррентные соотношения (3) в этом случае записываются так:

$$a_{1,2} = G(2F(a_1)), \quad a_2 = 2a_{1,2} - a_1, \\ F(d) = 2F(a_2) - F(a_{1,2}),$$

и уравнение (4) принимает вид

$$2F(2G(2F(a_1)) - a_1) - 2F(a_1) = F(d).$$

Соответственно матрица Гессе:

$$A = \begin{pmatrix} 2f_1 - 0,5f_{1,2} & -0,5f_{1,2} \\ -0,5f_{1,2} & 2f_2 - 0,5f_{1,2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в предположении, что функция $f(x)$ непрерывна в окрестностях точек a_1 и a_2 , критерий Сильвестра даёт

следующие достаточные условия локального минимума:

$$\begin{aligned} 4f_1 &> f_{1,2}, \\ 4f_1f_2 &> f_{1,2}(f_1 + f_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Пример 1. Возьмём следующую ситуацию (см. рис 5).

Тогда

$$F(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 5, \\ 5x - 20, & 5 \leq x < 7, \\ x + 8, & 7 \leq x \leq 12, \end{cases}$$

$$G(x) = F^{-1}(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 5, \\ (x + 20)/5, & 5 \leq x < 15, \\ x - 8, & 15 \leq x \leq 20. \end{cases}$$

Пусть точка a_1 имеет координату x . Из соотношений (3) получаем последовательно

$$S_1 = F(x), \quad a_{1,2} = G(2F(a_1)) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 2,5, \\ 0,4x + 4, & 2,5 \leq x < 5, \\ 2x - 4, & 5 \leq x < 5,5, \\ 10x - 48, & 5,5 \leq x \leq 6, \end{cases}$$

$$a_2 = 2a_{1,2} - a_1 = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x < 2,5, \\ -0,2x + 8, & 2,5 \leq x < 5, \\ 3x - 8, & 5 \leq x < 5,5, \\ 19x - 96, & 5,5 \leq x \leq 6, \end{cases}$$

Рис. 8. Наличие «нулевой» зоны.

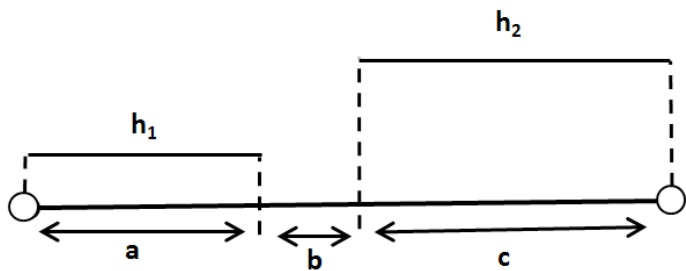
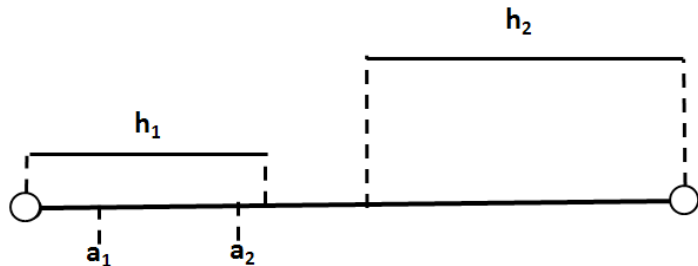


Рис. 9. Возможное размещение пунктов.



$$F(12) = 20 = 2F(a_2) - F(a_{1,2}) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x < 5/3, \\ 28x - 40, & 5/3 \leq x < 7/3, \\ 4x + 16, & 7/3 \leq x < 2,5, \\ -2,4x + 32, & 2,5 \leq x < 5, \\ -4x + 40, & 5 \leq x \leq 5,5, \\ 28x - 136, & 5,5 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Отсюда находим три варианта:

$$\begin{cases} (a_1 = 15/7, a_2 = 45/7), \\ (Q = 190/7) \end{cases}, \begin{cases} (a_1 = 5, a_2 = 7), \\ (Q = 30) \end{cases}, \begin{cases} (a_1 = 39/7, a_2 = 69/7), \\ (Q = 190/7) \end{cases}.$$

Средний, симметричный, представляет собой локальный максимум целевой функции Q . Ответами для исходной задачи являются первый вариант (рис. 6) и симметричный ему третий.

Пример 2. Рассмотрим ситуацию на рис. 7.

Аналогичные выкладки приводят к уравнению

$$F(8) = 16 = 2F(a_2) - F(a_{1,2}) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x < 4/3, \\ 16x - 16, & 4/3 \leq x < 2, \\ 16, & 2 \leq x \leq 4, \\ 12x - 32, & 4 < x \leq 40/9. \end{cases}$$

Решением этого уравнения относительно x является весь отрезок $[2, 4]$. Как легко проверить, значение целевой функции при этом постоянно и равно 16. Ответом для исходной задачи становится

$$\begin{cases} a_1 = x, & 2 \leq x \leq 4, \\ a_2 = \frac{1}{3}x + \frac{16}{3}, \\ (Q = 16) \end{cases}.$$

ДВА ПУНКТА ПРИ НАРУШЕНИИ УСЛОВИЯ (2)

Теперь ситуация, когда условие (2) нарушено и функция f обращается в 0 на внутреннем отрезке (рис. 8).

Пусть требуется разместить два пункта обслуживания.

1) Сначала случай, когда оба пункта размещены на левом отрезке (см. рис. 9).

Из условия равенства площадей находим

$$a_{1,2} = 2a_1, \quad a_2 = 3a_1, \quad h_1 \cdot a_1 = h_1(a - a_2) + h_2 \cdot c,$$

откуда

$$a_1 = \frac{1}{4}(a + Kc), \quad a_2 = \frac{3}{4}(a + Kc), \quad K = \frac{h_2}{h_1}.$$

Обе точки действительно лежат в первом отрезке, если дополнительно

$$\frac{3}{4}(a + Kc) \leq a \Leftrightarrow a \geq 3Kc,$$

или если ввести обозначения $a \cdot h_1 = I_1$, $c \cdot h_2 = I_2$ — количество «жильцов», $I_1 \geq 3I_2$. (6)

Подобное размещение, как видно из условия (5), обеспечивает локальный минимум целевой функции. Значение функции Q при этом:

$$\begin{aligned} Q &= h_1 \int_0^{2a_1} |a_1 - x| dx + h_1 \int_{2a_1}^a |3a_1 - x| dx + h_2 \int_{a+b}^{a+b+c} (x - 3a_1) dx = \\ &= h_1 \frac{3a_1^2}{2} + h_1 \frac{(a - 3a_1)^2}{2} + h_2 \frac{(a + b + c - 3a_1)^2}{2} - \\ &\quad - h_2 \frac{(a + b - 3a_1)^2}{2}. \end{aligned}$$

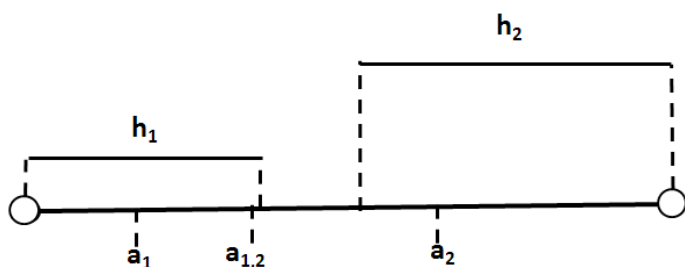


Рис. 10. Другое возможное размещение пунктов.

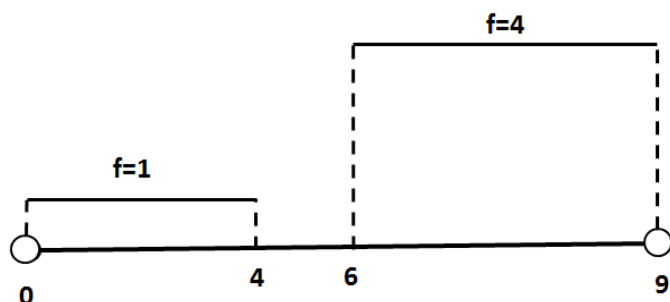


Рис. 11. Пример распределения.

2) Случай, когда оба пункта обслуживания размещены в правой зоне, сводится к предыдущему очевидными переобозначениями:

$$a \leftrightarrow c, \quad h_1 \leftrightarrow h_2, \quad x \leftrightarrow a + b + c - x.$$

Осталось рассмотреть случай, когда в первой и третьей зонах находятся по одному пункту обслуживания.

3) Сразу заметим, что если «центральная» точка $a_{1,2}$ попадает на средний, «нулевой», отрезок, то единственная возможность обеспечить равенство площадей — разместить пункты в серединах левого и правого отрезков. Тогда

$$\left(\begin{aligned} a_1 &= \frac{a}{2}, \quad a_2 = a + b + \frac{c}{2} \\ Q &= \frac{h_1 a^2 + h_2 c^2}{4} \end{aligned} \right).$$

Точка $a_{1,2}$ действительно попадает в средний отрезок при условии

$$|c - a| \leq 2b. \quad (7)$$

4) Теперь возьмём случай (рис. 10), когда точка $a_{1,2}$ попадает на левый отрезок (с правым всё аналогично).

Опять из равенства площадей:

$$a_{1,2} = 2a_1, \quad a_2 = 3a_1,$$

$$h_1(a - a_{1,2}) + h_2(a_2 - a - b) = h_2(a + b + c - a_2).$$

Отсюда при $K \neq 1/3$:

$$a_1 = \frac{K(a + b + c/2) - a/2}{3K - 1}.$$

Если $K < 1/3$, то второе из неравенств (5) имеет обратный знак, так что экстремума нет.

Если $K > 1/3$, то возникают дополнительные требования:

$$0 \leq a_{1,2} = \frac{2K(a + b + c/2) - a}{3K - 1} \leq a;$$

$$a + b \leq a_2 = 3a_1 \leq a + b + c.$$

Если же $K = 1/3$, то в зависимости от значения числителя дроби для a_1 стационарных точек рассматриваемого вида или не будет вовсе, или они могут образовывать целый интервал возможных значений. Действительно, стационарное расположение такого вида возможно, только если $a + b + c/2 = 3a/2$, то есть $a = 2b + c$. И нетрудно понять, что тогда решением является любая пара $(a_1, 3a_1)$, где $(a + b)/3 \leq a_1 \leq a/2$.

Пример 3. Рассмотрим ситуацию на рис. 11.

В этом случае $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$, $K = 4$. Для «центрального» расположения пунктов обслуживания:

$$\left(\begin{aligned} a_1 &= 2, \quad a_2 = 7,5 \\ Q &= 13 \end{aligned} \right).$$

Если $a_{1,2} \leq 4$, то

$$a_1 = \frac{a_{1,2}}{2}, \quad a_2 = 2a_{1,2} - a_1 \leq 6,$$

что невозможно из-за нарушения условия равенства площадей.



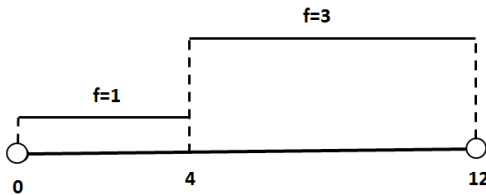


Рис. 12. Пример распределения.

Поскольку $I_2 \geq 3I_1$ ($12 \geq 12$), то на правом отрезке имеются две точки. Найдём их по формулам:

$$a_1 = \frac{1}{4}(a + Kc), \quad a_2 = \frac{3}{4}(a + Kc), \quad K = \frac{h_2}{h_1}.$$

Но в «обратном» направлении:

$$\left(\begin{array}{l} a_1 = 6, \quad a_2 = 8, \\ Q = 26. \end{array} \right).$$

Этот вариант уступает «центральному».

Пример 4. Пусть на участке обслуживания находятся два жилых узла T_1 и T_2 с соответствующими отрезками равномерного распределения — $[0, 400 \text{ м}]$, $[500 \text{ м}, 700 \text{ м}]$, а «интенсивности» жилых узлов равны 3000, 500. Требуется оптимальным образом разместить два пункта обслуживания.

Имеем:

$$a = 400, \quad I_1 = 3000, \quad I_2 = 500,$$

$$h_1 = \frac{3000}{400} = 7,5, \quad c = 700 - 500 = 200,$$

$$h_2 = \frac{500}{200} = 2,5.$$

$$b = 500 - 400 = 100, \quad K = \frac{2,5}{7,5} = \frac{1}{3}.$$

Условие (6) выполнено, так что рассмотрим сначала случай, когда оба пункта размещены на первом участке. Имеем:

$$a_1 = \frac{1}{4}(a + Kc) = \frac{400 + 200/3}{4} \approx 116,67, \quad a_2 = 3a_1 = 350.$$

Значение целевой функции

$$Q = h_1 \frac{3a_1^2}{2} + h_1 \frac{(a - 3a_1)^2}{2} + h_2 \frac{(a + b + c - 3a_1)^2}{2} - h_2 \frac{(a + b - 3a_1)^2}{2} = 287500.$$

Условие (7) здесь также выполнено, поэтому можно рассмотреть и «центральное» размещение пунктов обслуживания:

$$\left(\begin{array}{l} a_1 = a/2 = 200, \\ a_2 = a + b + c/2 = 600, \\ Q = (h_1 a^2 + h_2 c^2)/4 = 300000 \end{array} \right).$$

Этот вариант хуже.

Наконец, берём случай, когда пункты обслуживания размещены и в первой, и в третьей зонах, а средняя точка находится

в первой зоне. Так как $a + b + c/2 = 3a/2$, то решением является любая пара $(a_1, 3a_1)$, где $(a + b)/3 \leq a_1 \leq a/2$, т.е. точки

$$\left(\begin{array}{l} \frac{500}{3} \leq a_1 \leq 200, \\ a_2 = 3a_1, \\ Q = 325500 \end{array} \right)$$

являются стационарными. Но этот вариант тоже уступает первому.

Итак, оптимальное расположение пунктов обслуживания:

$$\left(\begin{array}{l} a_1 \approx 116,67, \quad a_2 = 350, \\ Q \approx 287500. \end{array} \right).$$

Пример 5. Изменим в предыдущем примере третий отрезок с $[500 \text{ м}, 700 \text{ м}]$ на $[450 \text{ м}, 650 \text{ м}]$. Тогда по-прежнему

$$a = 400, \quad h_1 = 7,5, \quad c = 200, \quad h_2 = 2,5, \quad K = \frac{2,5}{7,5} = \frac{1}{3}.$$

Изменится только b . Вариант с непрерывным расположением стационарных точек становится невозможным, а из двух остальных оптимальным по-прежнему окажется

$$(a_1 \approx 116,67, \quad a_2 = 350).$$

Пример 6. Пусть на участке обслуживания находятся два жилых узла T_1 и T_2 с соответствующими отрезками равномерного распределения — $[0, 400 \text{ м}]$, $[500 \text{ м}, 600 \text{ м}]$, а «интенсивности» жилых узлов соответственно равны 3000, 1000. Требуется оптимальным образом разместить два пункта обслуживания.

$$a = 400, \quad I_1 = 3000, \quad I_2 = 500,$$

$$h_1 = \frac{3000}{400} = 7,5, \quad c = 600 - 500 = 100,$$

$$h_2 = \frac{1000}{100} = 10. \quad b = 500 - 400 = 100,$$

$$K = \frac{10}{7,5} = \frac{4}{3}.$$

Условие (6) $I_1 \geq 3I_2$ выполнено, поэтому рассмотрим сначала случай, когда оба пункта обслуживания размещены на первом участке. Имеем:

$$a_1 = \frac{1}{4}(a + Kc) = \frac{400 + 400/3}{4} \approx 133,33, \quad a_2 = 3a_1 = 400.$$

Значение целевой функции

$$Q = h_1 \frac{3a_1^2}{2} + h_1 \frac{(a - 3a_1)^2}{2} + h_2 \frac{(a + b + c - 3a_1)^2}{2} - h_2 \frac{(a + b - 3a_1)^2}{2} = 350000.$$

Условие (7) не выполнено, так что «центральное» расположение пунктов не рассматриваем.

Остаётся вариант, когда пункты обслуживания расположены в крайних зонах и средняя точка не попадает в нулевой отрезок.

$$a_1 = \frac{K(a+b+c/2)-a/2}{3K-1} \approx 177,78, \\ a_2 = 3a_1 \approx 533,33.$$

В этом случае средняя точка попала в первый отрезок, а значение целевой функции $Q = 316666,67$, что лучше.

Итак, оптимальное расположение пунктов обслуживания:
($a_1 \approx 177,78$, $a_2 \approx 533,33$).

ПРОИЗВОЛЬНОЕ КОЛИЧЕСТВО ПУНКТОВ

В случае выполнения условия (2) для кусочно-постоянной функции f цепочка равенств (3) позволяет построить решение в явном виде и для большого количества пунктов обслуживания.

Пример 7. Пусть на всём отрезке функция f постоянна, что соответствует случаю наличия только одного жилого узла. Тогда условие равенства площадей, очевидно, может быть выполнено, только если точки $a_1, a_{1,2}, a_2, a_{2,3}, \dots$ делят отрезок на равные части. Отрезок делится на $2k$ равных частей и для размещения пунктов выбираются точки с нечётными номерами.

Пример 8. Найдём оптимальное размещение трёх, четырёх и пяти пунктов обслуживания для функции плотности.

Пусть точка a_1 имеет координату x . Для трёх пунктов рекуррентные выкладки приводят к уравнению

$$F(12) = 28 = 2F(a_3) - F(a_{2,3}) =$$

$$= \begin{cases} 6x, & 0 \leq x < 0,8, \\ 26x - 16, & 0,8 \leq x < 1, \\ -6x + 16, & 1 \leq x \leq 4/3, \\ 30x - 32, & 4/3 < x \leq 2, \\ -2x + 32, & 2 < x \leq 4, \\ 18x - 48, & 4 < x \leq 68/15. \end{cases}$$

Отсюда следует два варианта:

$$\left(\begin{matrix} a_1 = 2, & a_2 = 6, \\ a_3 = 10, \\ Q = 28 \end{matrix} \right), \quad \left(\begin{matrix} a_1 = 38/9, & a_2 = 22/3, \\ a_3 = 94/9, \\ Q = 244/9 \end{matrix} \right).$$

Глобальный минимум обеспечивает второй из этих вариантов.

Теперь четыре пункта. Имеем:

$$F(12) = 28 = 2F(a_4) - F(a_{3,4}) = \begin{cases} 8x, & 0 \leq x < 4/7, \\ 36x - 16, & 4/7 \leq x < 2/3, \\ -12x + 16, & 2/3 \leq x < 0,8, \\ 48x - 32, & 0,8 \leq x < 1, \\ -16x + 32, & 1 < x \leq 4/3, \\ 44x - 48, & 4/3 < x \leq 68/37. \end{cases}$$

Отсюда находим оптимальный вариант:

$$\left(\begin{matrix} a_1 = 19/11, & a_2 = 57/11, \\ a_3 = 87/11, & a_4 = 117/11, \\ Q = 218/11 \end{matrix} \right).$$

Для пяти пунктов обслуживания оптимальное расположение выглядит следующим образом:

$$\left(\begin{matrix} a_1 = 46/29, & a_2 = 138/29, \\ a_3 = 198/29, & a_4 = 258/29, \\ a_5 = 318/29, & Q = 452/29 \end{matrix} \right).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена математическая модель, позволяющая выбрать наименее затратные для перемещения населения варианты размещения объектов повседневного спроса в городском микрорайоне в случае приблизительно равномерной плотности распределения.

Модель может быть использована при планировке жилых массивов и улично-дорожной сети, при нахождении оптимального расположения спасательных служб на транспорте, остановок городского автобуса и других пунктов социального назначения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев А. И. Почему все дороги ведут в Москву // Мир транспорта. – 2005. – № 4. – С. 22–25.
2. Гусев С. А. Теоремы распределения ресурсов // Мир транспорта. – 2010. – № 3. – С. 30–35.
3. Гусев С. А. Функции дохода и профилактика рисков // Мир транспорта. – 2011. – № 3. – С. 88–91.
4. Гусев С. А. Линейные и дискретные функции безопасности // Мир транспорта. – 2012. – № 2. – С. 182–185.
5. Гусев А. И., Гусев С. А. Оптимальное расположение спасательной службы // Мир транспорта. – 2017. – № 4. – С. 194–201.

Координаты авторов: **Гусев А. И.** – aigus7@gmail.com, **Гусев С. А.** – 7781011@gmail.com, **Милевский А. С.** – a_s_mi@mail.ru.

Статья поступила в редакцию 14.07.2017, принята к публикации 20.10.2017.

