

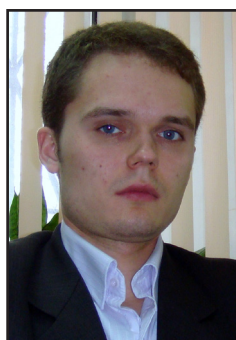


Оптимальное расположение спасательной службы



Анатолий ГУСЕВ
Anatoly I. GUSEV

Сергей ГУСЕВ
Sergey A. GUSEV



Гусев Анатолий Иванович — кандидат физико-математических наук, доцент Российского университета транспорта (МИИТ), Москва, Россия.

Гусев Сергей Анатольевич — управляющий финансового отдела ООО «Стройторги», Москва, Россия.

Optimal Location of Rescue Service

(текст статьи на англ. яз. –
English text of the article – p. 199)

В работах (1–4) исследуются задачи об оптимальном расположении магистрали, оптимальном распределении средств между программами по безопасности движения на транспорте.

В публикуемой статье предложена модель расположения вагонного парка (автомобильного) в его динамике и исследована задача об оптимальном нахождении спасательной службы на магистрали при наличии на ней нескольких транспортных узлов. Модельные расчёты могут быть использованы как в практических целях, так и дальнейших теоретических исследованиях.

Ключевые слова: безопасность, транспорт, нормальный закон распределения, функция Лапласа, транспортный узел, оптимальное расположение, спасательная служба.

В момент аварии транспортных средств необходима срочная помощь спасательных служб. При большой протяжённости железнодорожных, автомобильных магистралей невозможно их расположить достаточно часто. Возникает задача об оптимальном распределении таких служб на магистрали. При обслуживании некоторого дорожного участка спасатели передвигаются к месту аварии на разные расстояния и к тому же на одни участки чаще, на другие реже, поэтому возникает потребность расположить спасательную службу так, чтобы среднее время прибытия было минимальным. В данной статье разработана экономико-математическая модель оптимального размещения спасательной службы при обслуживании нескольких узлов транспорта на магистрали.

НОРМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ТРАНСПОРТА

Пусть мы имеем транспортный узел $T(a)$ (станция, сортировочная база и т.д.) на некоторой определённой магистрали, причём одни составы идут по выделенной магистрали, а другие с неё уходят в каких-

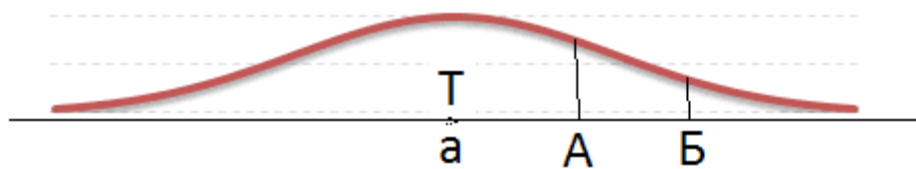


Рис. 1. Нормальное распределение транспорта возле транспортных узлов.

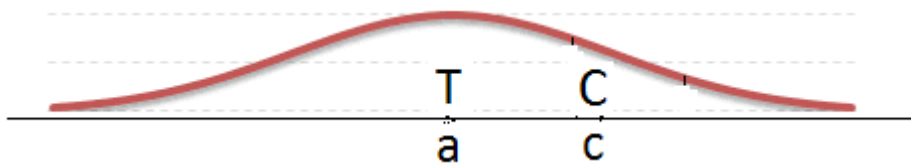


Рис. 2. Расположение спасательной службы на магистрали.

то местах. Обозначим через I число вагонов, которые проследовали через узел за месяц (если некий вагон проследует несколько раз, столько раз его и зачтём, причём эти вагоны приписаны к данному транспортному узлу, приписанные к иному узлу в расчёт не берутся).

Отметим, что выбранный период времени не влияет на результат. Будем предполагать, что число вагонов на магистрали за месяц распределено по нормальному закону (5) с математическим ожиданием a , средним квадратичным отклонением σ и интенсивностью I (см. рис. 1), т.е. число вагонов, побывавших за месяц на участке AB магистрали, составляет:

$$N = \frac{I}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Число вагонов, требующих обслуживания спасательной службы на участке AB , пропорционально количеству вагонов N . Наша задача разместить спасательную службу так, чтобы общие её затраты на прибытие для обслуживания были минимальны.

Пусть мы спасательную службу C поместили в точку c (рис. 2). Тогда общие затраты службы на прибытие к месту аварии будут пропорциональны:

$$A = \frac{I}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^c (c-x)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{I}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_c^{\infty} (x-c)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Итак, нам надо найти c , при котором A минимальны. В данном случае, при одном транспортном узле, ответ очевиден: $c = a$, однако мы проведём исследование на оптимальность поставленной задачи, чтобы воспользоваться полученными исследованиями при рассмотрении задач при наличии нескольких транспортных узлов.

ОПТИМУМ ПРИ НАЛИЧИИ ОДНОГО УЗЛА

Сделаем замену переменной $x - a = y$ (поскольку результат не зависит от I , положим $I = 1$), получим:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{c-a} (c-a-y)e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy +$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{c-a}^{\infty} (y-(c-a))e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{c-a}^{\infty} (y-(c-a))e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy +$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (c-a-y)e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy =$$

$$= c-a-2(c-a) \left[\Phi\left(\frac{\infty}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right) \right] -$$

$$\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{c-a}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} d\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) =$$



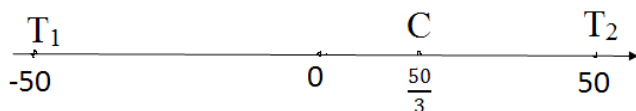


Рис. 3. Оптимальное расположение спасательной службы для двух транспортных узлов.

Таблица 1
Нахождение координаты спасательной службы с шагом 10 (км)

c	Φ_1	Φ_2	$3\Phi_1 + \Phi_2$
-50	0	-0,47725	-0,47725
-40	0,039828	-0,46407	-0,34459
-30	0,07926	-0,4452	-0,20742
-20	0,117911	-0,41924	-0,06551
-10	0,155422	-0,38493	0,081335
0	0,191462	-0,34134	0,233043
10	0,225747	-0,28814	0,389096
20	0,258036	-0,22575	0,548362
30	0,288145	-0,15542	0,709012
40	0,31594	-0,07926	0,86856
50	0,341345	0	1,024034

Таблица 2
Нахождение координаты спасательной службы с точностью 1 (км)

c	Φ_1	Φ_2	$3\Phi_1 + \Phi_2$
-20	0,117911	-0,41924	-0,06551
-19	0,12172	-0,41621	-0,05105
-18	0,125516	-0,41309	-0,03654
-17	0,1293	-0,40988	-0,02198
-16	0,133072	-0,40658	-0,00737
-15	0,136831	-0,4032	0,007292
-14	0,140576	-0,39973	0,022002
-13	0,144309	-0,39617	0,036761
-12	0,148027	-0,39251	0,05157
-11	0,151732	-0,38877	0,066428
-10	0,155422	-0,38493	0,081335

$$= c - a - 2(c - a) \left(\frac{1}{2} - \Phi \left(\frac{c - a}{\sigma} \right) \right) -$$

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{y^2}{2(c-a)^2}} \Big|_{c-a}^{\infty} =$$

$$= 2(c - a) \Phi \left(\frac{c - a}{\sigma} \right) + \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(c-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$ — функция Лапласа.

$$\frac{dA}{dc} = 2\Phi \left(\frac{c - a}{\sigma} \right) + \frac{2(c - a)}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(c-a)^2}{2\sigma^2}} - \frac{2(c - a)}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(c-a)^2}{2\sigma^2}} = 2\Phi \left(\frac{c - a}{\sigma} \right).$$

При $c = a$ имеем $\frac{dA}{dc} = 0$: при $c > a$ про-

изводная больше 0, при $c < a$ производная меньше 0. Отсюда следует, что точка a — точка минимума, что и требовалось доказать.

ОПТИМУМ ПРИ ДВУХ УЗЛАХ

Пусть на участке обслуживания находятся два транспортных узла $T_1(a_1)$ и $T_2(a_2)$ с соответствующими нормальными законами распределения вагонов с параметрами (a_1, σ_1) и (a_2, σ_2) . Интенсивности узлов равны I_1, I_2 . Надо найти для них оптимальное расположение спасательной службы $C(c)$. Произведя аналогичные выкладки, как в предыдущем разделе, получим:

$$A = 2I_1(c - a_1)\Phi \left(\frac{c - a_1}{\sigma_1} \right) +$$

$$\frac{2I_1\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(c-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} + 2I_2(c - a_2)\Phi \left(\frac{c - a_2}{\sigma_2} \right) +$$

$$\frac{2I_2\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(c-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

$$\frac{dA}{dc} = 2I_1\Phi \left(\frac{c - a_1}{\sigma_1} \right) + 2I_2\Phi \left(\frac{c - a_2}{\sigma_2} \right).$$

$$\frac{d^2A}{dc^2} = \frac{2I_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{\frac{(c-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{2I_2}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{\frac{(c-a_2)^2}{2\sigma_2^2}} > 0.$$

Поэтому функция $\frac{dA}{dc}$ возрастает. Пусть для определённости $a_1 < a_2$, тогда при $c = a_1$ имеем $\frac{dA}{dc} = 2I_2\Phi \left(\frac{a_1 - a_2}{\sigma_2} \right) < 0$, а при $c = a_2$ получаем $\frac{dA}{dc} = 2I_1\Phi \left(\frac{a_2 - a_1}{\sigma_1} \right) > 0$, и значит

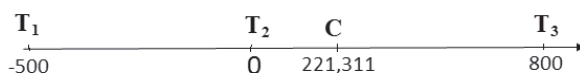


Рис. 4. Оптимальное расположение спасательной службы для трёх транспортных узлов.

уравнение $\frac{dA}{dc} = 0$ имеет единственное решение на интервале (a_1, a_2) , причём в этой точке достигается минимум. В общем случае пример решения уравнения $\frac{dA}{dc} = 0$ с указанной точностью на Excel рассмотрим позже, а сейчас разберём частный случай, когда интенсивности транспортных узлов равны, т.е. $I_1 = I_2$. Тогда уравнение $\frac{dA}{dc} = 0$

эквивалентно уравнению

$$\Phi\left(\frac{c-a_1}{\sigma_1}\right) = \Phi\left(\frac{a_2-c}{\sigma_2}\right).$$

Отсюда $\frac{c-a_1}{\sigma_1} = \frac{a_2-c}{\sigma_2}$ и получаем формулу для оптимального расположения службы спасения:

$$c = \frac{a_1\sigma_2 + a_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

В частности, если $\sigma_2 = \sigma_1$, тогда $c = \frac{a_1 + a_2}{2}$.

Пример 1. Рассмотрим задачу в конкретных числах. Пусть интенсивности транспортных узлов T_1 (-50 км), T_2 (50 км) одинаковы; $\sigma_1 = 100$ км; $\sigma_2 = 50$ км. Здесь координата оптимального расположения спасательной службы

$$c = \frac{50(100-50)}{150} = \frac{50}{3} \text{ (км)}.$$

На рис. 3 показано схематическое расположение транспортных узлов и спасательной службы.

Теперь возьмём пример, когда интенсивности транспортных узлов не равны.

Пример 2. Интенсивность транспортного узла T_1 в три раза больше, чем T_2 , т.е. $I_1 = 3I_2$. Требуется найти оптимальные координаты спасательной службы с точностью до 1 метра.

Решение. Оптимальные координаты находятся из уравнения:

$$\frac{dA}{dc} = 2I_1\Phi\left(\frac{c-a_1}{\sigma_1}\right) + 2I_2\Phi\left(\frac{c-a_2}{\sigma_2}\right) = 0.$$

Или

$$3\Phi\left(\frac{c+50}{100}\right) + \Phi\left(\frac{c-50}{50}\right) = 0.$$

Аналитически это уравнение решить невозможно, однако найти оптимальную координату с любой точностью можно. Причём разными способами (с помощью инструментов Excel).

Сделаем это в несколько шагов. (-50; 50) разбиваем с шагом 10 (км), в точках разбиения вычисляем

$$\Phi_1 = \Phi\left(\frac{c+50}{100}\right), \quad \Phi_2 = \Phi\left(\frac{c-50}{50}\right),$$

$3\Phi_1 + \Phi_2$. Результаты вычислений даны в таблице 1.

Из таблицы видно, что оптимальная координата лежит между -20 (км) и -10 (км). Теперь отрезок (-20, -10) разбиваем с шагом 1 (км), в точках разбиения вычисляем

$$\Phi_1 = \Phi\left(\frac{c+50}{100}\right), \quad \Phi_2 = \Phi\left(\frac{c-50}{50}\right), \quad 3\Phi_1 + \Phi_2.$$

Результаты даны в таблице 2.

Из таблицы 2 видно, что оптимальная координата лежит между -16 (км) и -15 (км). Продолжая аналогично ещё три раза, найдём оптимальную координату спасательной службы с точностью до 1 метра. Получим $c = -15497$ метров.

ОПТИМУМ ДЛЯ БОЛЕЕ ЧЕМ ДВУХ УЗЛОВ

Пусть на участке обслуживания находятся несколько транспортных узлов $T_1(a_1)$, $T_2(a_2), \dots, T_k$ с соответствующими нормальными законами распределения вагонов с параметрами (a_1, σ_1) , $(a_2, \sigma_2), \dots, (a_k, \sigma_k)$. Интенсивности узлов равны $I_1, I_2, \dots, I_k$. Надо найти оптимальное расположение спасательной службы $C(c)$.

Используя предыдущие вычисления, получим, что общие затраты спасательной службы C будут пропорциональны:

$$A = 2I_1(c-a_1)\Phi\left(\frac{c-a_1}{\sigma_1}\right) + \frac{2I_1\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(c-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} + 2I_2(c-a_2)\Phi\left(\frac{c-a_2}{\sigma_2}\right) +$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{2I_2\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(c-a_2)^2}{2\sigma_2^2}} + \dots + 2I_\kappa(c-a_\kappa)\Phi\left(\frac{c-a_\kappa}{\sigma_\kappa}\right) + \\
& \frac{2I_\kappa\sigma_\kappa}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(c-a_\kappa)^2}{2\sigma_\kappa^2}}; \\
\frac{dA}{dc} &= 2I_1\Phi\left(\frac{c-a_1}{\sigma_1}\right) + \\
& 2I_2\Phi\left(\frac{c-a_2}{\sigma_2}\right) + \dots \\
& + 2I_\kappa\Phi\left(\frac{c-a_\kappa}{\sigma_\kappa}\right); \\
\frac{d^2A}{dc^2} &= -\frac{2I_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(c-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \\
& -\frac{2I_2}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(c-a_2)^2}{2\sigma_2^2}} + \dots \\
& + \frac{2I_\kappa}{\sqrt{2\pi}\sigma_\kappa} e^{-\frac{(c-a_\kappa)^2}{2\sigma_\kappa^2}} > 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $\frac{dA}{dc}$ возрастает. Пусть для определённости $a_1 < a_2 < \dots < a_\kappa$, тогда при $c = a_1$ имеем $\frac{dA}{dc} < 0$, а при $c = a_\kappa$ получаем $\frac{dA}{dc} > 0$. Поэтому для уравнения $\frac{dA}{dc} = 0$ возможно единственное решение на интервале (a_1, a_κ) , причём в этой точке достигается минимум. И именно тут рационально поместить спасательную службу. Разберём подтверждающий пример.

Пример 3. Пусть имеются три транспортных узла $T_1(-500 \text{ км})$, $T_2(0)$, $T_3(800 \text{ км})$, соответственно $\sigma_1 = 800 \text{ км}$, $\sigma_2 = 400 \text{ км}$, $\sigma_3 = 300 \text{ км}$. Интенсивности всех одинаковы. Найти надо оптимальные координаты спасательной службы с точностью до 1 метра.

Решение связано с уравнением

$$\Phi\left(\frac{c-a_1}{\sigma_1}\right) + \Phi\left(\frac{c-a_2}{\sigma_2}\right) + \Phi\left(\frac{c-a_3}{\sigma_3}\right) = 0.$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$\Phi\left(\frac{c+500}{800}\right) + \Phi\left(\frac{c}{400}\right) + \Phi\left(\frac{c-800}{300}\right) = 0.$$

Далее действуем аналогично примеру 2. В результате находим, что $c = 183297$ метров.

Пример 4. Рассмотрим предыдущий пример, в котором интенсивности транспортных узлов относятся как 1:3:2.

Решение сводится к уравнению

$$\Phi\left(\frac{c-a_1}{\sigma_1}\right) + 3\Phi\left(\frac{c-a_2}{\sigma_2}\right) + 2\Phi\left(\frac{c-a_3}{\sigma_3}\right) = 0.$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$\Phi\left(\frac{c+500}{800}\right) + 3\Phi\left(\frac{c}{400}\right) + 2\Phi\left(\frac{c-800}{300}\right) = 0.$$

Действуем аналогично примеру 2. Результат: $c = 221311$ метров. На рис. 4 показано схематическое расположение транспортных узлов и спасательной службы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана методика оптимального размещения спасательной службы при обслуживании нескольких транспортных узлов, распределённых по нормальному закону. Найдены уравнения для нахождения координаты спасательной службы. Приведены примеры и соответствующие численные вычисления с помощью инструментов Excel.

Приведённые способы выбора вариантов могут быть использованы при расчётах места нахождения спасательной службы на железнодорожной магистрали, определения оптимального расположения остановок автотранспорта, других важных объектов, а также в дальнейших теоретических исследованиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев А. И. Почему все дороги ведут в Москву // Мир транспорта. – 2005. – № 4. – С. 22–25.
2. Гусев С. А. Теоремы распределения ресурсов // Мир транспорта. – 2010. – № 3. – С. 30–35.
3. Гусев С. А. Функции дохода и профилактика рисков // Мир транспорта. – 2011. – № 3. – С. 88–91.
4. Гусев С. А. Линейные и дискретные функции безопасности // Мир транспорта. – 2012. – № 2. – С. 182–185.
5. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – Изд. 6-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 400 с. ●

Координаты авторов: **Гусев А. И.** – aigus7@gmail.com, **Гусев С. А.** – 7781011@gmail.com.

Статья поступила в редакцию 21.02.2017, принята к публикации 20.05.2017.