



Решение транспортной задачи методом последовательного уменьшения её размерности



Виктор ИВНИЦКИЙ
Victor A. IVNITSKY

Андрей МАКАРЕНКО
Andrey A. MAKARENKO



Ивницкий Виктор Аронович — доктор технических наук, профессор кафедры автоматизированных систем управления Российского университета транспорта (МИИТ), Москва, Россия.

Макаренко Андрей Александрович — студент Российского университета транспорта (МИИТ), Москва, Россия.

Solution of the Transport Problem by the Method of Successively Decreasing its Dimension

(текст статьи на англ. яз. — English text of the article — p. 39)

В статье рассматривается решение транспортной задачи двумя способами: методом северо-западного угла и методом минимального элемента. В результате анализа доказывается, что метод минимального элемента позволяет сократить количество итераций в несколько раз. При решении сложных задач большой размерности выбор рационального метода играет определяющую роль, что и демонстрирует способ последовательного уменьшения подобной размерности посредством используемых алгоритмов оптимизации распределения поставок (перевозок) товара.

Ключевые слова: транспортная задача, логистика, оптимизация, программирование, методы решения, размерность, алгоритмы.

Транспортная задача — это поиск оптимального распределения поставок однородного товара от поставщиков к потребителям при известных затратах на перевозку (тарифах) между пунктами отправления и назначения. Является задачей линейного программирования специального вида. Решение её начинается с нахождения опорного плана.

В публикуемой статье сравниваются два способа решения такой задачи:

1. Опорный план формируется методом северо-западного угла.
2. Опорный план найден методом минимального элемента.

Искомый результат решения транспортной задачи: все заявки удовлетворены, все запасы исчерпаны, суммарная стоимость всех перевозок минимальна. Методы решения сводятся к операциям с таблицей, где в определённом порядке записаны все условия задачи. Такая таблица называется транспортной. В ней записываются:

- пункты отправления и назначения;
- запасы, имеющиеся в пунктах отправления (ПО);
- заявки, поданные пунктами назначения (ПН);

Образец транспортной таблицы

ПО / ПН	B_1	B_2	...	B_n	Запасы a_i
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_m
Заявки b_j	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

— стоимости перевозок из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеется m пунктов отправления: $A_1, \dots, A_m$, в которых сосредоточены запасы какого-то однородного товара (груза) в количестве $a_1, \dots, a_m$ единиц. Кроме того, известны n пунктов назначения: $B_1, \dots, B_n$, подавших заявку соответственно на $b_1, \dots, b_n$ единиц товара. Предполагается, что сумма всех заявок равна сумме всех запасов:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Установлена стоимость a_{ij} перевозки единицы груза от каждого пункта отправления до каждого пункта назначения. Таблица (матрица) стоимостей перевозки a_{ij} единиц груза задана в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Размерностью этой матрицы $m \cdot n$ можно определять и размерность самой транспортной задачи.

Требуется составить такой план перевозок, при котором все заявки были бы выполнены, и при этом общая стоимость перевозок оказалась минимальна. При такой постановке задачи показателем эффективности плана является стоимость.

Обозначим x_{ij} — количество груза, перевозимого из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j . Неотрицательные переменные x_{ij} должны удовлетворять следующим условиям:

1. Суммарное количество груза, направляемого из каждого пункта отправления во

все пункты назначения, должно быть равно запасу груза в своём пункте. Это даёт m

условий равенств: $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, \dots, m.$

2. Суммарное количество груза, доставляемого в каждый пункт назначения из всех пунктов отправления, должно быть равно заявке, поданной соответствующим пунктом. Это даёт n условий равенств:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n.$$

3. Суммарная стоимость всех перевозок должна быть минимальной, т.е. должен

быть найден $\min_{x_{11}, \dots, x_{mn}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij}.$

Стоимости перевозок помещаются в правом верхнем углу каждой ячейки таблицы 1, чтобы в самой ячейке при составлении плана помещать перевозки x_{ij} (см. таблицу 1).

Ранг системы ограничений-уравнений равен $r = m + n - 1$, где m — число строк, n — число столбцов транспортной таблицы. В каждом опорном плане будут отличны от нуля не более $m + n - 1$ перевозок. Ячейки таблицы, в которых будем записывать отличные от нуля перевозки, называются базисными, а остальные (пустые) — свободными.

Решение задачи сводится к следующему. Надо найти те значения перевозок, которые, будучи проставлены в базисных клетках транспортной таблицы, удовлетворяли бы таким условиям:

— сумма перевозок в каждой строке таблицы должна быть равна запасу данного ПО;

— сумма перевозок в каждом столбце должна быть равна заявке данного ПН;

— общая стоимость перевозок — минимальная.



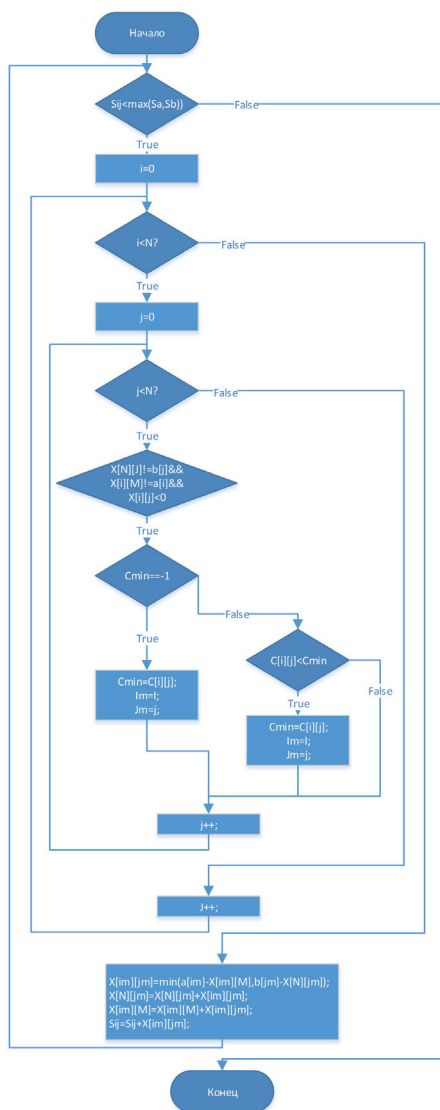


Рис. 1. Блок-схема алгоритма работы программы.

СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ

Метод северо-западного угла рассчитан на получение доступного начального решения транспортной задачи. Был предложен Дж. Данцигом в 1951 г. и позднее назван «правилом северо-западного угла» (Чарнес, Купер). Суть метода в последовательном переборе строк и столбцов транспортной таблицы, начиная с левого столбца и верхней строки, и выписывании максимально возможных отгрузок в соответствующие ячейки таблицы так, чтобы не были превышены заявленные в задаче ресурсы поставщика или потребности товарополучателя. На цены доставки метод не акцентирован, поскольку

в дальнейшем ожидается оптимизация отгрузок.

Метод последовательного уменьшения размерности транспортной задачи (метод минимального элемента) состоит в использовании следующего алгоритма.

1. Находим клетку таблицы 1 с минимальной стоимостью перевозки единицы груза, т.е. $\min_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} a_{ij}$, где i – номер пункта

отправления (ПО), j – номер пункта назначения (ПН).

2. В этой клетке будет находиться стоимость $a_{il,jl}$ и номер клетки равен (i, j) , то есть она находится на пересечении j -го столбца с заявкой b_{jl} и i -й строки с запасом a_{il} .

3. Далее находим $\min(a_{il}, b_{jl})$.

4. Если $\min(a_{il}, b_{jl}) = a_{il}$, то в клетку с номером (i, j) ставим перевозку $x_{il,jl} = a_{il}$, запас a_{il} полагается равным нулю и строчка A_{il} вычёркивается. При этом транспортная задача исходной размерности $m \cdot n$ превращается в транспортную задачу размерности $(m - 1) \cdot n$. Стоимость обслуживаемой перевозки будет равна $a_{il} \cdot a_{il,jl}$.

5. Если $\min(a_{il}, b_{jl}) = b_{jl}$, то в клетку с номером (i, j) ставим перевозку $x_{il,jl} = b_{jl}$, заявка b_{jl} полагается равной нулю и столбец B_{jl} вычёркивается. При этом транспортная задача исходной размерности $m \cdot n$ превращается в транспортную задачу размерности $m \cdot (n - 1)$. Стоимость перевозки будет $b_{jl} \cdot a_{il,jl}$.

6. Если $\min(a_{il}, b_{jl}) = a_{il} = b_{jl}$, то в клетку с номером (i, j) ставим перевозку $x_{il,jl} = b_{il} = a_{il}$, запас a_{il} полагается равным нулю и строчка A_{il} вычёркивается и заявка b_{jl} полагается равной нулю и столбец B_{jl} вычёркивается. Стоимость перевозки $b_{jl} \cdot a_{il,jl} = a_{il} \cdot a_{il,jl}$.

7. При этом транспортная задача исходной размерности $m \cdot n$ превращается в транспортную задачу размерности $(m - 1) \cdot (n - 1)$.

8. Далее в видоизменённой таблице 1 находим клетку с минимальной стоимостью перевозки единицы груза, т.е.

$\min_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} a_{ij}$, где i – номер пункта отправления, j – номер пункта назначения.

9. Затем повторяются пункты 2–7 алгоритма до тех пор, пока не будут вычеркнуты все строки и столбцы таблицы 1.

//Макаренко А.А. УИС-411

```
float Sij = 0;
do
{
    int im;
    int jm;
    int Cmin = -1;
    for(int i = 0; i < N; i++)
    for(int j = 0; j < M; j++)
        if(X[N][j] != b[j])
        if(X[i][M] != a[i])
        if(X[i][j] < 0)
        {
            if(Cmin == -1)
            {
                Cmin = C[i][j];
                im = i;
                jm = j;
            }
            else
            if(C[i][j] < Cmin)
            {
                Cmin = C[i][j];
                im = i;
                jm = j;
            }
        }

    X[im][jm] = min(a[im] - X[im][M], b[jm] - X[N][jm]);
    X[N][jm] = X[N][jm] + X[im][jm];
    X[im][M] = X[im][M] + X[im][jm];
    Sij = Sij + X[im][jm];
} while(Sij < max(Sa, Sb));
```

Рис. 2. Код программы. Построение начального опорного плана методом минимального элемента.

Максимальное число шагов предлагаемого алгоритма равно $n + m - 1$. Минимальное число шагов $\lfloor \frac{n+m-1}{2} \rfloor$, т.е. целая часть от $\frac{n+m-1}{2}$ плюс 1.

Опишем теперь алгоритм поиска клетки таблицы 1 с минимальной стоимостью перевозки единицы груза.

1. Выделяем три ячейки для хранения текущего минимума стоимости перевозки единицы груза и координат этой стоимости: номера строки и номера столбца. В эти три ячейки записываем последовательно значение вектора $(a_{i,1}, 1, 1)$.

2. В верхней строке таблицы 1 берём вектор $(a_{1,2}, 1, 2)$.

3. Проверяем выполнение неравенства $a_{i,1} > a_{1,2}$. Если оно выполняется, то в выде-

ленные три ячейки для хранения текущего минимума стоимости перевозки единицы груза и координат этой стоимости записываем последовательно значение вектора $(a_{1,2}, 1, 2)$. Если оно не выполняется, то в выделенных ячейках ничего не изменяется.

4. Далее п. 3 выполняется для всех оставшихся стоимостей первой строки.

5. Затем пп. 3 и 4 выполняются для всех последующих строк таблицы 1.

Таким образом, находим клетку таблицы с минимальной стоимостью перевозки единицы груза.

ВЫВОДЫ

Проведя ряд опытов, можно убедиться, что построение начального опорного плана с помощью метода минимального





F=20900

Рис. 3. Метод северо-западного угла.

$$E = 17/4 = 4.25$$

Рис. 4. Метод минимального элемента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивницкий В. А. Лекции по математическим методам транспортной логистики. – М.: МИИТ, 2015. – 336 с.
2. Данциг Дж. Б. Линейное программирование, его обобщения и применения: Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.
3. Кравцов М. К. К вопросу понижения размерности транспортной задачи // Известия АН БССР: Серия физ.-мат. наук. – 1973. – № 2. – С. 59–62. ●

● МИР ТРАНСПОРТА, том 15, № 4, С. 34–41 (2017)

Ивницкий В. А., Макаренко А. А. Решение транспортной задачи методом последовательного уменьшения её размерности