



Абсолютный первый центральный момент случайных величин



Анатолий ГУСЕВ

Anatoly I. GUSEV

Гусев Анатолий Иванович — кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), Москва, Россия.

The Absolute First Central Moment of Random Variables

(текст статьи на англ. яз. — English text of the article — p. 24)

В статье рассмотрены геометрический, пуассоновский и биномиальный законы распределения. Для каждого из них выводится аналитическая формула абсолютных первых центральных моментов, что позволяет найти среднюю зону распределения. Работа носит фундаментальный характер и может быть использована в исследованиях по теории вероятностей, в прикладных задачах, где присутствуют указанные законы распределения.

Ключевые слова: случайная величина, законы распределения, математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратичное отклонение, моменты случайных величин.

Пусть взята некоторая случайная величина X (неважно какая, непрерывная или дискретная), например, зарплата рабочего. Математическое ожидание MX (берём только величины с конечным значением MX) характеризует среднее значение случайной величины. При оценке отклонения случайной величины от среднего значения в обширной литературе по теории вероятностей [см., в част., 1–3] рассматривают дисперсию случайной величины $D(X) = M(X - MX)^2$, затем вводят понятие среднее квадратичное отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ и говорят, что $\sigma(X)$ и есть отклонение случайной величины от математического ожидания. Что именно характеризует полученное отклонение, не очень понятно, попробуем разобраться.

ТРИ ЗОНЫ ЗНАЧЕНИЯ

Пусть заработная плата имеет закон распределения, показанный в таблице 1.

Средняя заработанная плата

$$MX = 10 \cdot \frac{1}{5} + 30 \cdot \frac{1}{5} + 90 \cdot \frac{1}{5} + 150 \cdot \frac{1}{5} + 170 \cdot \frac{1}{5} = 90.$$



Рис. 1. Зоны значений произвольной случайной величины.

Таблица 1

X (тысяч руб.)	10	30	90	150	170
P	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

Таблица 2

X(тысяч руб.)	10	22	34
P	4/6	1/6	1/6

Таблица 3

X (тысяч руб.)	12	24	36
P	1/6	1/6	4/6

Таблица 4

X	1	2	3	...	n	...
P	p	pq	pq ²	...	pq ⁿ⁻¹	...

Дисперсия

$$D(X) = 80^2 \cdot \frac{1}{5} + 60^2 \cdot \frac{1}{5} + 60^2 \cdot \frac{1}{5} + 80^2 \cdot \frac{1}{5} = 4000,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{3560} = 63,25.$$

Теперь вычислим истинное среднее отклонение случайной величины от математического ожидания, т.е. найдем абсолютный первый центральный момент для X (обозначать его будем $\Delta(X)$):

$$\Delta(X) = M|X - MX| =$$

$$= 80 \cdot \frac{1}{5} + 60 \cdot \frac{1}{5} + 60 \cdot \frac{1}{5} + 80 \cdot \frac{1}{5} = 56.$$

Как видно, расхождение между $\sigma(X)$ и $\Delta(X)$ большое — 7,25 (тыс. руб.). Возьмем случайные величины, у которых $\Delta(X)$ — конечное число (если $\Delta(X) = 0$, тогда случайная величина X — константа), при этом $\sigma(X)$ может равняться ∞ (например, X принимает значения $\pm \frac{2^n}{n^{1.5}}$ с вероятностью

$$\frac{1}{2^{n+1}}, n = 1; 2; \dots; \dots n).$$

Рассмотрим для произвольной случайной величины три зоны её значений (рис. 1).

Низшая зона H: $x < MX - \Delta(X)$.

Средняя зона C: $[MX - \Delta(X); MX + \Delta(X)]$.

Высшая зона B: $x > MX + \Delta(X)$.

Соответственно имеем зону низких заработков при уровне меньше 34, зону среднего заработка с 34 до 146 и зону высших заработков при уровне выше 146. Заработок в размере 30 попадает в низшую зону, однако если ориентироваться по среднеквадратичному отклонению $\sigma(X)$, то заработок попадает в среднюю зону. Возможно, что случайная величина принимает только два значения $MX - \Delta(X)$ и $MX + \Delta(X)$, тогда легко допустить, что вероятности принятия этих значений = 1/2.

В то же время, когда случайная величина принимает более двух значений, внутренность средней зоны всегда не пуста. Зона H может быть пуста, тогда зона B не пуста (и это означает, что в наличии только средние и высшие заработки, то есть, хорошие, которые благоприятны для общества). И здесь $MX = 16$; $\Delta(X) = 8$. Пример такого распределения дает таблица 2.

Если, наоборот, зона B — пуста, тогда зона H — не пуста (это означает, что есть только средние и низкие заработки, и речь уже о плохом состоянии общества). В таблице 3 представлен пример такого распределения, где $MX = 30$; $\Delta(X) = 8$.

Из общей теории следует, что и для дискретных, и для непрерывных случайных величин $\sigma(X) \geq \Delta(X)$, однако для распро-



Таблица 5

$\left X - \frac{1}{p}\right $	$\frac{1}{p} - 1$	$2 - \frac{1}{p}$	$3 - \frac{1}{p}$	...	$n - \frac{1}{p}$	...
P	p	pq	pq ²	...	pq ⁿ⁻¹	...

Таблица 6

$\left X - \frac{1}{p}\right $	$\frac{1}{p} - 1$	$\frac{1}{p} - 2$	...	$\frac{1}{p} - n$	$\frac{1}{p} - (n+1)$	$(n+2) - \frac{1}{p}$	...
P	p	pq	...	pq ⁿ⁻¹	pq ⁿ	pq ⁿ⁺¹	...

Таблица 7

Значения $\sigma(X)$, $\Delta(X)$ и $\sigma(X) - \Delta(X)$ для геометрического закона распределения

p	б	Δ	б-Δ
1	0	0	0
0,9	0,351364	0,2	0,151364
0,8	0,559017	0,4	0,159017
0,7	0,782461	0,6	0,182461
0,6	1,054093	0,8	0,254093
0,5	1,414214	1	0,414214
1/3	2,44949	1,777778	0,671712
1/4	3,464102	2,53125	0,932852
1/5	4,472136	3,2768	1,195336
1/6	5,477226	4,018776	1,45845
1/7	6,480741	4,758833	1,721907
1/8	7,483315	5,497743	1,985572
1/9	8,485281	6,235909	2,249372
1/10	9,486833	6,973569	2,513264
1/20	19,49359	14,33944	5,154152
1/30	29,49576	21,69969	7,796072
1/40	39,49684	29,0586	10,43824
1/50	49,49747	36,41697	13,08051
1/60	59,4979	43,77508	15,72282
1/70	69,4982	51,13304	18,36516
1/80	79,49843	58,4909	21,00752
1/90	89,4986	65,84871	23,6499
1/100	99,49874	73,20647	26,29228

Таблица 8

X	0	1	2	...	n	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$	...

Таблица 9

$ X - \lambda $	λ	$1 - \lambda$	$2 - \lambda$	...	$n - \lambda$	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$	...

Таблица 10

$ X - \lambda $	λ	$\lambda - 1$	...	$\lambda - n$	$\lambda - (n + 1)$	$(n + 2) - \lambda$	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$		$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$	$\frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda}}{(n + 1)!}$	$\frac{\lambda^{n+2} e^{-\lambda}}{(n + 2)!}$	...

странных случайных величин желательно знать зависимость их в виде $\sigma(X) = K\Delta(X)$ (т.е. явное значение коэффициента K). Биномиальный, пуассоновский и геометрический законы распределения широко используются в различных областях, поэтому целесообразно найти для них абсолютный первый центральный момент $\Delta(X)$.

ВАРИАНТ ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ЗАКОНА

Геометрический закон распределения (таблица 4) имеет числовые характеристики:

$$MX = \frac{1}{p}; \quad D(X) = \frac{q}{p^2}; \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

Теорема 1. Пусть $n \leq \frac{1}{p} < n + 1$, тогда $\Delta(X) = 2nq^n$, $n = 1; 2; \dots$. Доказательство проведем по индукции по n. При $1 \leq \frac{1}{p} < 2$

имеем вариант таблицы 5.

$$\frac{1}{p} - 1 \text{ представим в виде}$$

$$\frac{1}{p} - 1 = 1 - \frac{1}{p} + 2\left(\frac{1}{p} - 1\right), \text{ тогда}$$

$$M\left|X - \frac{1}{p}\right| = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} + 2\left(\frac{1}{p} - 1\right)p = 2 - 2p = 2q$$

удовлетворяет доказываемой формуле.

Пусть при $n \leq \frac{1}{p} < n + 1$ имеем $\Delta(X) = 2nq^n$ (см. таблицу 6), докажем, что при $n + 1 \leq \frac{1}{p} < n + 2$ $\Delta(X) = 2(n + 1)q^{n+1}$.

$$\frac{1}{p} - (n + 1) \text{ представим в виде}$$

$$(n + 1) - \frac{1}{p} + 2\left(\frac{1}{p} - (n + 1)\right), \text{ тогда}$$

$$M\left|X - \frac{1}{p}\right| = 2nq^n + 2\left(\frac{1}{p} - (n + 1)\right)pq^n =$$

$$= 2nq^n + 2q^n - 2(n + 1)pq^n =$$

$$= 2(n + 1)q^n - 2(n + 1)pq^n =$$

$$= 2(n + 1)q^n(1 - p) = 2(n + 1)q^{n+1},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Легко проверить, что в теореме можно заменить $n \leq \frac{1}{p} < n + 1$ на

$n \leq \frac{1}{p} \leq n + 1$, т.е. $\Delta(X)$ — непрерывная функция от p.

Для сравнения $\sigma(X)$ и $\Delta(X)$ в варианте геометрического закона распределения составлена таблица 7.

ВАРИАНТ ДЛЯ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА

Рассмотрим закон распределения Пуассона (таблица 8).

Случайная величина, распределенная по закону Пуассона, имеет числовые характеристики: $MX = \lambda$; $D(X) = \lambda$; $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

Теорема 2. Пусть $n \leq \lambda < n + 1$, тогда $\Delta(X) = \frac{2\lambda^{n+1}e^{-\lambda}}{n!}$, $n = 0; 1; 2; \dots$. Доказатель-

ство проведем по индукции по n. При $0 \leq \lambda < 1$ имеем вариант таблицы 9.

λ представим в виде $\lambda = (0 - \lambda) + 2\lambda$, тогда $M|X - \lambda| = \lambda - \lambda + 2\lambda e^{-\lambda} = 2\lambda e^{-\lambda} = \lambda - \lambda + 2\lambda e^{-\lambda}$ — что удовлетворяет доказываемой формуле.

Пусть при $n \leq \lambda < n + 1$ имеем

$$\Delta(X) = \frac{2\lambda^{n+1}e^{-\lambda}}{n!}$$



Таблица 11

Значения $\sigma(X)$, $\Delta(X)$ и $\sigma(X) - \Delta(X)$ для закона распределения Пуассона

λ	σ	Δ	$\sigma - \Delta$
1	1	0,735759	0,264241
2	1,414214	1,082682	0,331531
3	1,732051	1,344251	0,3878
4	2	1,562935	0,437065
5	2,236068	1,754674	0,481394
6	2,44949	1,927478	0,522012
7	2,645751	2,086039	0,559712
8	2,828427	2,233385	0,595043
9	3	2,371602	0,628398
10	3,162278	2,502201	0,660077
20	4,472136	3,553413	0,918723
30	5,477226	4,358072	1,119154
40	6,324555	5,035763	1,288792
50	7,071068	5,632501	1,438567
60	7,745967	6,171809	1,574157
70	8,3666	6,667639	1,698961
80	8,944272	7,129067	1,815205
90	9,486833	7,562392	1,924441
100	10	7,972199	2,027801

Таблица 12

X	0	1	...	k	...	n
P	q^n	npq^{n-1}	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

Таблица 13

$ X - np $	np	1-np	...	k-np	...	n-np
P	q^n	npq^{n-1}	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

Таблица 14

$ X - np $	np	np-1	...	np-k	k+1-np	...	n-np
P	q^n	npq^{n-1}	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}$	...	p^n

Значения $\sigma(X)$, $\Delta(X)$ и $\sigma(X) - \Delta(X)$ для биномиального закона распределения при $n = 100$

p	б	Δ	б-Δ
0	0	0	0
0,01	0,994987	0,732064683	0,262923
0,02	1,4	1,071782533	0,328217
0,03	1,705872	1,323899422	0,381973
0,04	1,959592	1,531303658	0,428288
0,05	2,179449	1,710169359	0,46928
0,06	2,374868	1,868659559	0,506209
0,07	2,55147	2,011576901	0,539893
0,08	2,712932	2,142031945	0,5709
0,09	2,861818	2,262177211	0,59964
0,1	3	2,373576243	0,626424
0,2	4	3,177606874	0,822393
0,3	4,582576	3,64492232	0,937653
0,4	4,898979	3,89851896	1,000461
0,5	5	3,979461869	1,020538
0,6	4,898979	3,89851896	1,000461
0,7	4,582576	3,64492232	0,937653
0,8	4	3,177606874	0,822393
0,9	3	2,373576243	0,626424
1	0	0	0

(см. таблицу 10), докажем, что при

$$n+1 \leq \lambda < n+2\Delta(X) = \frac{2\lambda^{n+2}e^{-\lambda}}{(n+1)!}.$$

$\lambda - (n+1)$ представим в виде $(n+1) - \lambda + 2(\lambda - (n+1))$, тогда

$$M|X - \lambda| = \frac{2\lambda^{n+1}e^{-\lambda}}{n!} + 2(\lambda - (n+1)) \cdot \frac{\lambda^{n+1}e^{-\lambda}}{(n+1)!} = \frac{2\lambda^{n+2}e^{-\lambda}}{(n+1)!},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Легко проверить, что в теореме можно заменить $n \leq \lambda < n+1$ на $n \leq \lambda \leq n+1$, т.е. $\Delta(X)$ — непрерывная функция от λ .

Для сравнения $\sigma(X)$ и $\Delta(X)$ в варианте распределения Пуассона составлена таблица 11.

ВАРИАНТ ДЛЯ БИНОМИАЛЬНОГО ЗАКОНА

Рассмотрим биномиальный закон распределения (таблица 12).

Случайная величина, распределённая по биномиальному закону, имеет числовые характеристики: $MX = np$; $D(X) = npq$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Теорема 3. Пусть $k-1 \leq np \leq k$, $k = 1; 2; \dots, n$, тогда $\Delta(X) = 2kC_n^k p^k q^{n-k+1}$. Доказательство проведем по индукции по k . При $k = 1$, т.е. $0 \leq np \leq 1$, имеем вариант таблицы 13.

Здесь np представим в виде $0 - np + 2np$, тогда $M|X - np| = np - np + 2npq^n = 2npq^n$ — что удовлетворяет доказываемой формуле.

Пусть при $k-1 \leq np \leq k$ имеем $\Delta(X) = 2kC_n^k p^k q^{n-k+1}$ (см. таблицу 14).





Значения $\sigma(X)$, $\Delta(X)$ и $\sigma(X) - \Delta(X)$ для биномиального закона распределения при $n = 1000$

p	σ	Δ	$\sigma - \Delta$
0	0	0	0
0,001	0,9995	0,735391	0,264109
0,002	1,412799	1,081599	0,3312
0,003	1,729451	1,342233	0,387218
0,004	1,995996	1,559805	0,436191
0,005	2,230471	1,750281	0,48019
0,006	2,44213	1,921686	0,520445
0,007	2,636475	2,078724	0,557751
0,008	2,817091	2,224432	0,592659
0,009	2,986469	2,360903	0,625566
0,01	3,146427	2,489656	0,65677
0,05	6,892024	5,489858	1,402166
0,1	9,486833	7,563022	1,923811
0,15	11,29159	9,004249	2,287341
0,2	12,64911	10,08812	2,560995
0,25	13,69306	10,92154	2,771524
0,3	14,49138	11,55882	2,932555
0,35	15,0831	12,03117	3,051933
0,4	15,49193	12,35751	3,13442
0,45	15,73213	12,54925	3,182887
0,5	15,81139	12,61251	3,198879

Докажем, что при $k \leq np \leq k+1$

$$\Delta(X) = 2(k+1)C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k}.$$

$np-k$ представим в виде $np-k = k-np+2(np-k)$, тогда имеем

$$M|X - np| = 2kC_n^k p^k q^{n-k+1} +$$

$$2(np-k)C_n^k p^k q^{n-k} =$$

$$= 2npC_n^k p^k q^{n-k} + 2kC_n^k p^k q^{n-k}(q-1) =$$

$$= 2nC_n^k p^{k+1} q^{n-k} - 2kC_n^k p^{k+1} q^{n-k} =$$

$$= 2(n-k)C_n^k p^{k+1} q^{n-k} =$$

$$= 2(k+1) \frac{C_n^k (n-k)}{(k+1)} p^{k+1} q^{n-k} =$$

$$= 2(k+1)C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k},$$

что и требовалось доказать.

Для сравнения $\sigma(X)$ и $\Delta(X)$ в варианте биномиального закона распределения составлены две таблицы: при $n = 100$ и при $n = 1000$.

Ввиду симметрии ясно, что при симметричных значениях p результаты будут одинаковы, например при $p = 0,6$ и $p = 0,4$

(см. таблицу 15). Поэтому таблица 16 составлена до $p = 0,5$.

ВАРИАНТ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В этом разделе находятся абсолютные первые центральные моменты для равномерного, показательного и нормального законов распределения.

Равномерный закон распределения

Случайная величина X , равномерно распределенная на отрезке $[a, b]$, имеет плотность $p(x)$, равную $\frac{1}{b-a}$, на отрезке

$[a, b]$, вне — 0. При этом

$$MX = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вычислим $\Delta(X)$ (результат, конечно, очевиден и равен $\frac{b-a}{4}$):

$$\begin{aligned}\Delta(X) &= \int_a^{\frac{a+\theta}{2}} \left(\frac{a+\theta}{2} - x \right) \frac{1}{\theta-a} dx + \\ &+ \int_{\frac{a+\theta}{2}}^{\theta} \left(x - \frac{a+\theta}{2} \right) \frac{1}{\theta-a} dx = \\ &= \frac{1}{\theta-a} \left(\frac{a+\theta}{2} x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_a^{\frac{a+\theta}{2}} + \\ &+ \frac{1}{\theta-a} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a+\theta}{2} x \right) \Big|_{\frac{a+\theta}{2}}^{\theta} = \\ &= \frac{1}{\theta-a} \left(\frac{(a+\theta)^2}{4} - \frac{(a+\theta)^2}{8} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a+\theta}{2} a + \frac{a^2}{2} \right) - \\ &- \frac{1}{\theta-a} \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{a+\theta}{2} \theta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(a+\theta)^2}{8} + \frac{(a+\theta)^2}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{\theta-a} \left(\frac{(a+\theta)^2}{4} - a\theta \right) = \frac{\theta-a}{4} \approx \\ &\approx 0,866 \sigma(X).\end{aligned}$$

Показательный закон распределения

Случайная величина X , распределенная по показательному закону, имеет плотность $p(x)$, равную $\lambda e^{-\lambda x}$, при $x \geq 0$ и нулевую плотность при $x < 0$.

$$MX = \frac{1}{\lambda}; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Вычислим $\Delta(X)$ (результат здесь, конечно, не очевиден):

$$\begin{aligned}\Delta(X) &= \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{1}{\lambda} - x \right) e^{-\lambda x} dx + \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda x} dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{-\lambda x} dx - \int_0^{\frac{1}{\lambda}} x \lambda e^{-\lambda x} dx + \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx - \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{-\lambda x} dx - 2 \int_0^{\frac{1}{\lambda}} x \lambda e^{-\lambda x} dx + \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \Big|_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 2 \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{-\lambda x} dx + 2 \left(x e^{-\lambda x} \Big|_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{1}{\lambda}} - \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{-\lambda x} dx \right) = \\ &= \frac{2}{e\lambda} \approx 0,736 \sigma(X).\end{aligned}$$

Нормальный закон распределения

Случайная величина X , распределенная по нормальному закону, имеет плотность

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad MX = a,$$

$$D(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma.$$

Можно считать, что $a = 0$ (иначе возьмем случайную величину $X-a$, которая имеет такой же $\Delta(X)$).

Вычислим $\Delta(X)$:

$$\begin{aligned}\Delta(X) &= 2 \int_0^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d(x^2) = \\ &= \frac{-2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Big|_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \approx 0,798 \sigma.\end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье выведены аналитические формулы абсолютных первых центральных моментов для геометрического, биномиального и пуассоновского законов распределения. Это позволяет найти среднюю зону распределений, важную для расчетов в прикладных задачах. Работа может быть использована и в исследованиях по теории вероятностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. — Изд. 6-е, перераб. и доп. — М.: Наука, 1988. [Электронный ресурс]: <http://www.bookshare.net/books/physics/gnedenko-bv/1988/files/kursteoriiveroyatnostey1988.pdf>. Доступ 15.11.2016.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 2003. — 479 с.
3. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Юнити, 2012. — 552 с.

Координаты автора: **Гусев А. И.** — +7 (495) 684–24–82.

Статья поступила в редакцию 09.11.2016, принята к публикации 20.01.2017.

